

Matematica Finanziaria A

a.a. 2004 – 2005

30 novembre 2004

Struttura a termine dei tassi di interesse

Abbiamo un capitale $C = 12.500$ euro che vogliamo investire.

I tassi di interesse di mercato alla data di valutazione sono pari a:

✓ $i(0; 1) = 2,6\%$ (annuo composto) per investimenti a 1 anno

✓ $i(0; 18/12) = 3\%$ (annuo composto) per investimenti a 18 mesi

Struttura a termine dei tassi di interesse

Ipotizzando un orizzonte temporale di investimento di 18 mesi, abbiamo due possibilità:

➤ **ipotesi 1:** Investire a 18 mesi

tempo	0	1	18/12
Tasso			$i(0,18/12) = 3\%$
Cash-flow	-12.500		$+12.500(1,03)^{18/12} =$ 13.066,70

Struttura a termine dei tassi di interesse

- **ipotesi 2:** Investire a 1 anno e poi reinvestire per ulteriori 6 mesi il montante dell'investimento alle condizioni di mercato che emergeranno tra un anno.

tempo	0	1	18/12
Tasso		$i(0,1) = 2,6\%$	$i(1,18/12) = ?$
Cash-flow	-12.500	+12.825 -12.825	$+12.825(1+i(1,18/12))^{6/12}$

Struttura a termine dei tassi di interesse

- Se fosse $i(1, 18/12) = 2,8\%$ avremmo:

$$12.825 (1 + 2,8\%)^{6/12} = 13.003,31$$

e, quindi, sarebbe preferibile investire direttamente a 18 mesi (ipotesi 1).

- Se fosse $i(1, 18/12) = 4\%$ avremmo

$$12.825 (1 + 4\%)^{6/12} = 13.078,99$$

e, quindi, sarebbe preferibile l'ipotesi 2.

Struttura a termine dei tassi di interesse

- Il tasso di reinvestimento da $t = 1$ a $t = 18/12$ $i^*(1, 18/12)$ che rende indifferenti le due alternative si ottiene imponendo:

$$12.500 (1 + i(0,1))^1 (1 + i^*)^{6/12} = 12.500 (1 + i(0,18/12))^{18/12}$$

$$(1 + 2,6\%)^1 (1 + i^*)^{6/12} = (1 + 3\%)^{18/12}$$

da cui, risolvendo si ha:

$$i^* = [(1,03)^{18/12} / (1,026)^1]^{12/6} - 1 = 3,80\%$$

Struttura a termine dei tassi di interesse

t	i(0,t)
3 m	2,5%
6 m	2,9%
1 yr	3,2%
...	...
15 yr	4,5%
30 yr	5,0%

✓ $i(0,t)$ = tasso a “pronti” o “spot”; tasso di rendimento annuale su impieghi che iniziano oggi e si concludono in t.

✓ $P(1+i(0,t))^t = 100$

✓ $i(0,t) = [100 / P]^{1/t} - 1$

Struttura a termine dei tassi di interesse

- impliciti nella curva dei tassi di interesse di mercato spot, il mercato quota dei tassi “a termine” o “forward” $i(0,t,T-t)$ che, fissati oggi dal mercato regolano operazioni che inizieranno in t e si concluderanno in T .
- In questo modo, il mercato fissa oggi le condizioni di reinvestimento in un'epoca futura eliminando l'incertezza.
- I tassi a termine sono fissati in modo da escludere la possibilità di arbitraggi non rischiosi.

Struttura a termine dei tassi di interesse

Ipotesi di mercato:

- ✓ $i(0,1) = 2,6\%$
- ✓ $i(0,18/12) = 3\%$
- ✓ $i(0,1,6/12) = 4\%$

Possibile strategia di **arbitraggio**:

- ✓ mi finanziaio per 100 a 18 mesi al tasso 3%
- ✓ Investo 100 a pronti a 1 anno al tasso 2,6% e, contestualmente, stipulo un contratto a termine con decorrenza tra un anno e durata 6 mesi al tasso 4%

Struttura a termine dei tassi di interesse

tempo	0	1	18/12
finanziamento	+ 100		$-100(1,03)^{18/12} = -104,53$
investimento	-100	$+100(1,026)$ $=+102,6$ $-102,6$	$+102,6 (1,04)^{6/12} =$ $+104,63$
Flussi netti	0	0	+0,098

Struttura a termine dei tassi di interesse

Noti i tassi a pronti $i(0,t)$ e $i(0,T)$ i tassi a termine si ottengono imponendo:

$$(1 + i(0,t))^t (1 + i(0,t,T-t))^{(T-t)} = (1 + i(0,T))^T$$

da cui, risolvendo si ha:

$$i(0,t,T-t) = [(1 + i(0,T))^T / (1 + i(0,t))^t]^{1/(T-t)} - 1$$

Struttura a termine dei tassi di interesse

(t,T)	(t ; T-t)	i(0,t,T-t)
(3m ; 6m)	(3m ; 3m)	3,30%
(6m ; 1yr)	(6m ; 6m)	3,50%
(3m ; 1yr)	(3m ; 9m)	3,43%
...
(1yr ; 15yr)	(1yr ; 14yr)	4,59%

Struttura a termine dei tassi di interesse

Valore Nominale	Vita residua (anni)	Cedola annuale (pag.semestrale)	Prezzo del titolo
100	0,25	0,0	99,50
100	0,50	0,0	98,75
100	1,00	0,0	97,00
100	1,50	4,0	99,50
100	2,00	4,5	98,75
100	2,25	4,5	98,50

Struttura a termine dei tassi di interesse

Vita residua (anni)	tasso di interesse (base annua)
0,25	2,03%
0,50	2,55%
1,00	3,09%
1,50	4,43%
2,00	5,29%

Struttura a termine dei tassi di interesse

- ✓ I tassi spot si ottengono dai prezzi dei titoli imponendo che il prezzo corrente sia pari al valore scontato dei cash-flows previsti dai titoli.

$$(i - i_1) / (i_2 - i_1) = (t - t_1) / (t_2 - t_1)$$

$$i = i_1 + [(t - t_1) / (t_2 - t_1)] (i_2 - i_1)$$

Struttura a termine dei tassi di interesse

