

ESERCIZI DI INFERENZA STATISTICA SVOLTI IN AULA DAL DOTT. CLAUDIO CONVERSANO

ARGOMENTI TRATTATI:

- *VARIABILI CASUALI DISCRETE*
- *VARIABILI CASUALI CONTINUE*
- *DISEGUAGLIANZA DI TCHEBYCHEFF*
- *TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE*
- *METODI DI COSTRUZIONE DEGLI STIMATORI*

ESERCIZIO 1

Una macchina di precisione produce pezzi di ricambio per auto con una percentuale pari all'1% dei pezzi difettosi.

Su una produzione giornaliera di 300 pezzi, si chiede qual è la probabilità:

- a) di avere 4 pezzi difettosi;
- b) di avere almeno 5 pezzi difettosi;

Calcolare la speranza matematica, la varianza e la deviazione standard della v.c. percentuale di pezzi difettosi.

SOLUZIONE

Bisogna ricorrere alla funzione di probabilità della v.c. binomiale, data da:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$\text{a) } P(X = 4) = f(4) = \binom{300}{4} 0,01^4 0,99^{300-4} = \frac{300!}{4!(300-4)!} 0,01^4 0,99^{300-4} = 0,1689$$

b) La probabilità che in un giorno vi siano 5 o più pezzi difettosi sarà:

$$P(X \geq 5) = \sum_{i=5}^{300} \binom{300}{i} 0,01^i 0,99^{300-i} = 1 - \sum_{i=0}^4 \binom{300}{i} 0,01^i 0,99^{300-i}$$

$$P(X = 0) = f(0) = \binom{300}{0} 0,01^0 0,99^{300-0} = 0,049$$

$$P(X = 1) = f(1) = \binom{300}{1} 0,01^1 0,99^{300-1} = 0,1486$$

$$P(X = 2) = f(2) = \binom{300}{2} 0,01^2 0,99^{300-2} = 0,2244$$

$$P(X = 3) = f(3) = \binom{300}{3} 0,01^3 0,99^{300-3} = 0,2252$$

$$P(X \geq 5) = 1 - (0,049 + 0,1486 + 0,2244 + 0,2252 + 0,1689) = 1 - 0,8161 = 0,1839$$

(cioè 18,39%)

c) La speranza matematica di questa variabile casuale binomiale sarà:

$$np=300 \cdot 0,01 = 3$$

la varianza:

$$npq=300 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 2,97$$

la deviazione standard:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{2,97} = 1,723$$

ESERCIZIO 2

Si supponga di lanciare simultaneamente 3 monete; si vuole sapere qual è la probabilità di avere:

- a) 2 teste
- b) non più di una testa.

SOLUZIONE

Applicando la v.c. binomiale, notando che $p=q=1/2$, si avrà:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$\text{a) } P(X = 2) = f(2) = \binom{3}{2} 0,5^2 0,5^{3-2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} 0,5^2 0,5^{3-2} = 0,375$$

$$\text{b) } P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \binom{3}{0} 0,5^0 0,5^{3-0} + \binom{3}{1} 0,5^1 0,5^{3-1} = 0,125 + 0,375 = 0,5$$

Senza l'utilizzazione della binomiale:

a) (*TTC, CTT, TCT*) su $2^3=8$ prove possibili, per cui:

$$P(2.\text{teste}) = \frac{3}{8} = 0,375$$

b) (*CCC, TCC, CTC, CCT*) su $2^3=8$ prove possibili, per cui:

$$P(\text{non.più.di.1.testa}) = \frac{4}{8} = 0,5$$

ESERCIZIO 3

Da un'indagine svolta in Sardegna su un campione di giovani di età compresa tra i 18 ed i 25 anni risulta che il 20% degli intervistati si interessa di astronomia.

Volendo assicurarsi una probabilità superiore o uguale a 0,99 che la differenza in valore assoluto tra il risultato campionario e la percentuale di giovani che si interessa di astronomia nell'intera regione Sardegna sia inferiore all'1%, qual è il numero n di prove che si debbono effettuare per raggiungere questo risultato?

SOLUZIONE

In questo caso, bisogna fare riferimento alla v.c. *binomiale relativa*, in quanto risulta che la "proporzione di successi" nel campione è $X/n = 0,20$.

In pratica, si chiede quante rilevazioni campionarie bisogna effettuare affinché la differenza in valore assoluto tra la proporzione di successi derivante dal campione e quella relativa all'intera popolazione di riferimento, che indicheremo con p , sia inferiore all'1%.

In questo caso bisogna applicare la disuguaglianza di Tchebycheff, in base alla quale:

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

che nel nostro caso diventa:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \Rightarrow P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < 0,01\right) \geq 0,99$$

per cui:

- $1 - \frac{1}{k^2} = 0,99$, da cui segue che $k=10$
- $k\sigma = 0,01$

La varianza della v.c. binomiale relativa è data da:

$$\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

da cui segue che:

$$k\sigma = 10 \cdot \sqrt{\frac{0,20(1-0,20)}{n}} = 0,01$$

$$\text{ed } n = \frac{10^2 \cdot 0,2 \cdot 0,8}{0,01^2} = 160.000$$

ESERCIZIO 4

Un lotto di 15 cilindri è stato ricevuto da un committente che vuole impiegare i cilindri nel seguente modo: 5 per il progetto n.1 in cui si richiede una resistenza minima; 10 per il progetto 2 in cui si richiede una maggiore resistenza. Si suppone che 6 dei 15 cilindri abbiano una forza di rottura inferiore al minimo specificato.

- a) Selezionando casualmente dai 15 cilindri i 5 da destinare al progetto n.1, qual è la probabilità che 4 dei 5 cilindri selezionati abbiano una forza di rottura inferiore al minimo?
- b) Qual è la probabilità che almeno uno dei 5 cilindri selezionati abbia una forza di rottura inferiore al minimo?
- c) Si supponga che dei 6 cilindri aventi una forza di rottura inferiore al minimo, 4 abbiano una resistenza accettabile per il committente che può impiegarli in un altro progetto. I restanti 2 cilindri sono troppo deboli per qualsiasi uso. Inoltre, selezionando 5 dei 15 cilindri, calcolare la probabilità che esattamente 2 dei 5 cilindri estratti hanno una forza di rottura accettabile e che 1 (dei 5) non è accettabile.

SOLUZIONE

- a) Indicando con:

x = numero di cilindri difettosi nel campione;

$N = 15$, numero di cilindri nel lotto;

$n = 5$, numero di cilindri nel campione

$k = 6$, numero di cilindri difettosi nel lotto;

La probabilità di cui al punto a) si ottiene utilizzando la v.c. ipergeometrica, la cui funzione di probabilità è la seguente:

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Nel punto a) del nostro esercizio bisogna calcolare:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{6}{4} \binom{15-6}{5-4}}{\binom{15}{5}} = \frac{6! \cdot 9!}{4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 8!} = \frac{135}{3003} = 0,045$$

b) La probabilità di avere almeno un cilindro difettoso in 5 estrazioni è data da:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{\binom{6}{0} \binom{15-6}{5-0}}{\binom{15}{5}} = 1 - \frac{126}{3003} = 1 - 0,042 = 0,958$$

c) I dati possono essere riformulati nel seguente modo:

x = numero di cilindri difettosi nel campione;

$N = 15$, numero di cilindri nel lotto;

$n = 5$, numero di cilindri nel campione

$k = 6$, numero di cilindri difettosi nel lotto;

$S = 4$, numero di cilindri accettabili nell'insieme dei cilindri difettosi (e cioè impiegabili per un altro processo);

$R = 2$, numero di cilindri completamente inutilizzabili nell'insieme dei cilindri difettosi;

$s = 2$, numero di cilindri accettabili nel campione di cilindri da selezionare;

$r = 1$, numero di cilindri completamente inutilizzabili nel campione di cilindri da selezionare.

La funzione di probabilità ipergeometrica diventa:

$$P(X = x) = \frac{\binom{R}{r} \binom{k-R}{x-r} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Applicando tale formula si ottiene:

$$P(x = 3, r = 1) = \frac{\binom{2}{1} \binom{6-2}{3-1} \binom{15-6}{5-3}}{\binom{15}{5}} = 0,144$$

ESERCIZIO 5

All'arrivo nell'aeroporto internazionale di Cagliari, i passeggeri transitano per la dogana alla media di 2 ogni 30 secondi. Assumendo che il numero dei passeggeri che attraversano la dogana in un dato intervallo di tempo abbia una distribuzione di Poisson, determinare la probabilità che

- non più di 2 passeggeri abbiano attraversato la dogana, sempre in un periodo di 30 secondi;
- il numero di passeggeri che attraversano la dogana in un periodo di 30 secondi sia compreso tra 1 e 4.

SOLUZIONE

La funzione di probabilità della v.c. di Poisson è la seguente:

$$P(X = x) = f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{(-\lambda)} \quad \text{per } x = 0, 1, 2, \dots,$$

a) La probabilità richiesta è:

$$P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$$

poiché $\lambda = 2$ si avrà:

$$P(X = 0) = f(0) = \frac{2^0}{0!} e^{(-2)} = 0,13534$$

$$P(X = 1) = f(1) = \frac{2^1}{1!} e^{(-2)} = 0,27067$$

$$P(X = 2) = f(2) = \frac{2^2}{2!} e^{(-2)} = 0,27067$$

e quindi: $P(X \leq 2) = 0,1354 + 0,27067 + 0,27067 = 0,67668$

b) La probabilità richiesta è la seguente:

$$P(1 \leq X \leq 4) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$$

per cui:

$$P(X = 3) = f(3) = \frac{2^3}{3!} e^{(-2)} = 0,18045$$

$$P(X = 4) = f(4) = \frac{2^4}{4!} e^{(-2)} = 0,09022$$

e quindi: $P(1 \leq X \leq 4) = 0,27067 + 0,27067 + 0,18045 + 0,09022 = 0,81201$

ESERCIZIO 6

Una fabbrica di cioccolato promuove una campagna pubblicitaria per la vendita di un nuovo tipo di uova pasquali, caratterizzate dal contenuto della sorpresa, costituita da bracciali di ottone. Su una partita di 1.000 uova, 5 di esse contengono dei bracciali d'oro, del valore di un milione cadauno. Le uova contenenti bracciali d'oro, a loro volta, vengono inserite in modo casuale in scatole da 20, e vendute ai negozianti. Qual è la probabilità che un negoziante che acquista una scatola di uova, vende al pubblico 1 o più uova contenenti bracciali d'oro?

SOLUZIONE

La risposta può essere ottenuta ricorrendo alla v.c. binomiale, i cui parametri sono $n=20$ e $p= 5/1.000=0,005$;

La probabilità richiesta è:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - \binom{20}{0} 0,005^0 (1 - 0,005)^{20-0} = 1 - 0,9046104803 = 0,0953895197$$

Il numero atteso di bracciali d'oro per scatola è dato da $np=20$. Poiché la v.c. di Poisson di parametro $\lambda = np$ può essere una buona approssimazione della binomiale quando p è molto piccolo, come in questo caso, si può usare la distribuzione di Poisson per avere 0,1,2 ... uova contenenti bracciali d'oro.

Ricorrendo alla v.c. di Poisson la probabilità richiesta diventa:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - \frac{0,1^0}{0!} e^{(-0,1)} = 1 - 0,904837418 = 0,09516258$$

Ai fini di effettuare un confronto tra la probabilità calcolata con la distribuzione binomiale e la sua approssimazione attraverso la distribuzione di Poisson si riportano in tabella le probabilità calcolate per $0 \leq x \leq 5$.

N. di uova contenuti bracciali d'oro in una scatola	Prob. v.c. binomiale	Prob. v.c. Poisson	Differenze
0	0,9046104803	0,9048374180	-0,0002269377
1	0,0909156262	0,0904837420	0,0004318842
2	0,0043401932	0,0045241871	-0,0001839939
3	0,0001308601	0,0001508062	-0,0000199461
4	0,0000027948	0,0000037702	-0,0000009754
5	0,0000000444	0,0000000754	-0,0000000310
totale	1	1	0

ESERCIZIO 7

Il numero medio di chiamate che arrivano ad un centralino telefonico in un'ora è 300. Sapendo che il numero di chiamate che arrivano allo stesso centralino in un minuto segue una distribuzione di Poisson, calcolare la probabilità che in un minuto non arrivino più di 2 chiamate.

SOLUZIONE

La media della distribuzione del numero di chiamate che arrivano al centralino in un minuto è:

$$\lambda = \frac{300}{60} = 5$$

La probabilità richiesta è:

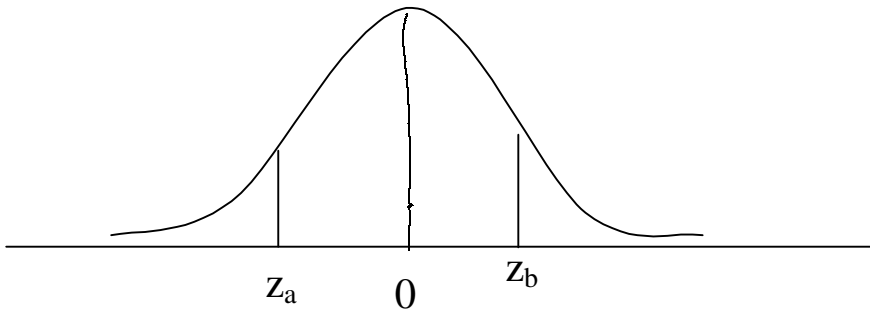
$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^2 \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \frac{5^0}{0!} e^{-5} + \frac{5^1}{1!} e^{-5} + \frac{5^2}{2!} e^{-5} = 0,0067 + 0,0337 + 0,0842 = 0,1246$$

ESERCIZIO 8

In un'industria di detersivi vi è una macchina confezionatrice la quale fornisce scatole il cui peso non è costante, ma varia e più precisamente segue una distribuzione normale con media 10 kg e scarto quadratico medio 0,2 kg. Si vuole conoscere la probabilità che il peso di una scatola presa a caso non abbia più dell'1% di scarto dal peso medio.

Si tratta di calcolare la:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(-z_a < Z < z_b) \\ &= P(-\infty < Z < z_b) - P(-\infty < Z < z_a) \end{aligned}$$



Nel caso in esame i parametri μ e σ sono noti, e si vuole conoscere la probabilità che la v.c. X assuma valori compresi all'interno dell'intervallo (a,b) , con a e b fissati e $a < b$.

$$\begin{aligned}
 P(9,9 < X < 10,1) &= P\left(\frac{9,9-10}{0,2} < \frac{X-10}{0,2} < \frac{10,1-10}{0,2}\right) = \\
 &= P(-0,5 < Z < 0,5) = \\
 &= 2P(0 < Z < 0,5) = \\
 &= 2 \cdot 0,1915 = 0,383
 \end{aligned}$$

La probabilità di avere delle scatole di detersivo con un peso compreso tra i 9,9 kg ed i 10,1 kg è pari al 38,3%; poiché questa è la tolleranza concessa per legge, l'impresa in questione avrà interesse a sostituire la macchina confezionatrice, dato che la probabilità di avere confezioni con un peso che rientra nei termini di legge è troppo bassa, e quindi è elevato il rischio di infrazione, con le conseguenze che ne possono derivare.

ESERCIZIO 9

Essendo X una v.c. che si distribuisce normalmente con media incognita μ e varianza incognita σ^2 , trovare:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$,
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$,
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$.

SOLUZIONE

$$a) P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P\left(\frac{(\mu - \sigma) - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{(\mu + \sigma) - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$P(-1 < Z < 1) = 2P(0 < Z < 1) =$$

$$2 \cdot 0,3413 = 0,6826$$

$$b) P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P\left(\frac{(\mu - 2\sigma) - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{(\mu + 2\sigma) - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$P(-2 < Z < 2) = 2P(0 < Z < 2) =$$

$$2 \cdot 0,4772 = 0,9544$$

$$c) P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = P\left(\frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{(\mu + 3\sigma) - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$P(-3 < Z < 3) = 2P(0 < Z < 3) =$$

$$2 \cdot 0,4987 = 0,9974$$

Quindi in una v.c. normale la probabilità che un valore x della v.c. cada all'interno dell'intervallo $[(\mu - 3\sigma), (\mu + 3\sigma)]$ è prossima ad 1.

ESERCIZIO 10

La v.c. X si distribuisce secondo una legge normale con media pari a 100 e varianza pari a 225; si vogliono determinare gli estremi dell'intervallo, centrato su 100, all'interno del quale viene a trovarsi l'80% dei casi.

SOLUZIONE

In questo caso, i parametri μ e σ^2 sono noti, e si vogliono conoscere gli estremi a e b dell'intervallo, centrato su μ , che comprende un livello di probabilità fissato p .

Si tratta di trovare sulle tavole un valore z_0 tale che:

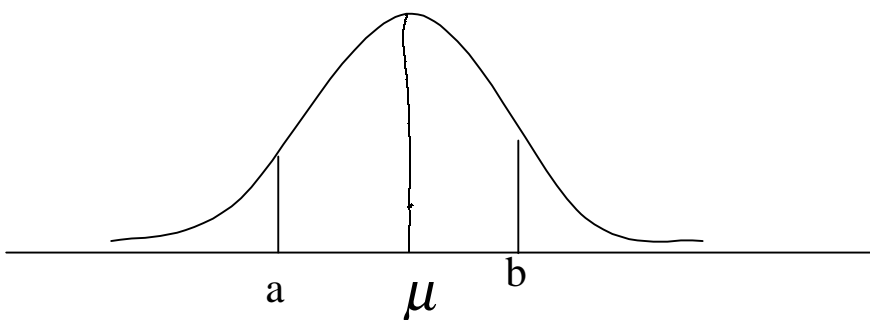
$$P(-z_0 < Z < z_0) = p$$

$$P\left(-z_0 < \frac{X - \mu}{\sigma} < z_0\right) = p$$

$$P(-z_0\sigma < X - \mu < z_0\sigma) = p$$

$$P(\mu - z_0\sigma < X < \mu + z_0\sigma) = p$$

$$P(a < X < b) = p$$



Nel caso in esame, dalle tavole della v.c. normale standardizzata risulta:

$$P(-1,285 < Z < 1,285) = 0,80$$

$$P\left(-1,285 < \frac{X - 100}{15} < 1,285\right) = 0,80$$

$$P(-1,285 \cdot 15 < X - 100 < 1,285 \cdot 15) = 0,80$$

$$P(100 - 1,285 \cdot 15 < X < 100 + 1,285 \cdot 15) = 0,80$$

$$P(80,725 < X < 119,275) = 0,80$$

ESERCIZIO 11

Sapendo che la v.c. X si distribuisce normalmente, ed inoltre l'intervallo $[0,20]$ è il più piccolo contenente il 95% di probabilità, si vogliono determinare la media e lo scarto quadratico medio di tale v.c..

SOLUZIONE

In questo caso sono noti sia il livello di probabilità p che gli estremi a e b dell'intervallo, ma si vogliono conoscere i parametri μ e σ della distribuzione affinché l'intervallo $[a, b]$ all'interno del quale cade la probabilità p sia il più piccolo possibile: tra tutti gli intervalli $[a, b]$, il più piccolo al quale associare una stessa probabilità p sarà quello centrato su μ in quanto in una v.c. normale il maggior addensamento di probabilità lo si ha proprio intorno a μ .

Quindi, sapendo che $P(a < X < b) = p$, poiché l'intervallo è centrato su μ , ne segue che:

$$\mu = \frac{a + b}{2}$$

Inoltre, poiché $a = \mu - z_0\sigma$, sostituendo il valore di μ si avrà:

$$a = \frac{a + b}{2} - z_0\sigma \quad \text{da cui:} \quad \frac{b - a}{2} = z_0\sigma$$

$$\text{e quindi:} \quad \sigma = \frac{b - a}{2 \cdot z_0}$$

Dai dati a disposizione risulta:

- $\mu = \frac{0 + 20}{2} = 10$
- $P(-z_0 < Z < z_0) = 0,95$ da cui: $P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95$

Quindi lo scarto quadratico medio e la varianza sono dati da:

$$\sigma = \frac{b - a}{2 \cdot z_0} = \frac{20}{2 \cdot 1,96} = 5,102 \quad \sigma^2 = 26,03$$

ESERCIZIO 12

Sapendo che il primo quartile di una v.c. normale X è pari a 20 ed il terzo quartile è pari a 40, si vogliono determinare i parametri della distribuzione della v.c. X .

SOLUZIONE

Poiché i quartili dividono una distribuzione in quattro parti uguali, sarà:

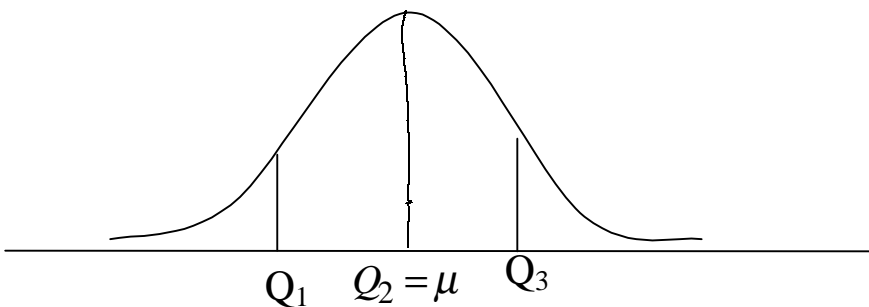
$$P(Q_1 < X < Q_3) = 0,5,$$

cioè:

$$P(20 < X < 40) = 0,5$$

Inoltre, il secondo quartile coincide con la mediana, ed essendo la mediana coincidente con la media per una distribuzione simmetrica, si ha:

$$\mu = Q_2 = \frac{Q_1 + Q_3}{2} = \frac{20 + 40}{2} = 30$$



Dalle tavole della v.c. normale standard risulta:

$$P(-0,675 < X < 0,675) = 0,5$$

e quindi:
$$\sigma = \frac{Q_3 - Q_1}{2 \cdot z_0} = \frac{40 - 20}{2 \cdot 0,675} = \frac{20}{1,35} = 14,815 \quad \text{e} \quad \sigma^2 = 219,48$$

ESERCIZIO 13

Delle viti hanno il diametro che si distribuisce secondo la v.c. normale, con media pari ad 1 cm e deviazione standard pari 0,003 cm.

A queste viti si accoppiano dei dadi aventi un diametro interno distribuito normalmente con media uguale a 1,005 cm e deviazione standard di 0,004 cm.

Vengono formate delle coppie casuali di dadi e viti e ci si chiede qual è la percentuale delle viti che sono troppo piccole per essere avvitate sui rispettivi dadi.

SOLUZIONE

Indichiamo con X la v.c. relativa al diametro interno dei dadi, con Y il diametro esterno delle viti e con $S=X - Y$ la differenza tra questi diametri.

Se $S > 0$ la vite si infilerà nel dado, diversamente no.

I parametri che caratterizzano la v.c. S sono:

$$E(S) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 1,005 - 1,000 = 0,005 \text{ cm}$$

$$Var(S) = Var(X) - Var(Y) = (0,004)^2 - (0,003)^2 = 0,000007 \text{ cm}$$

$$DS(S) = (0,000007)^{1/2} = 0,003 \text{ cm}$$

La probabilità richiesta è:

$$\begin{aligned} P(S < 0) &= P\left(\frac{S - E(S)}{DS(S)} < \frac{0 - 0,005}{0,003}\right) = P(Z < -1,89) = P(Z > 1,89) = \\ &= 0,5 - P(0 < Z < 1,89) = 0,5 - 0,47062 = 0,029. \end{aligned}$$

Quindi, nel 2,9% dei casi i dadi non entreranno nelle viti, mentre nel restante 97,1% dei casi vi entreranno.

ESERCIZIO 14

Si vuole sapere quanti lanci di una moneta regolare debbono essere fatti affinché la proporzione del numero di teste uscite abbia una probabilità almeno pari allo 0,95 di essere compresa tra i valori 0,48 e 0,52.

SOLUZIONE

Si definiscono le n variabili casuali Y_1, Y_2, \dots, Y_n dove:

$$Y_i = \begin{cases} 0 & \text{se nell'i - mo lancio esce croce} \\ 1 & \text{se nell'i - mo lancio esce testa} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

La proporzione di successi in n lanci è data da:

$$\frac{X}{n} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}$$

dove X è il numero di teste uscite in n lanci.

Le n v.c. Y_1, Y_2, \dots, Y_n sono indipendenti e identicamente distribuite, con distribuzione di probabilità:

$$P(Y_i = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(Y_i = 1) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Inoltre:

$$E(Y_i) = p = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(Y_i) = p(1-p) = \frac{1}{4},$$

Perla v.c. proporzione campionaria X/n si avrà quindi:

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(Y_i) = \frac{np}{n} = \frac{1}{2} = 0,5,$$

$$\text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i) = \frac{1}{n^2} n \frac{1}{4} = \frac{1/4}{n} = \frac{0,25}{n}$$

Il problema può essere risolto in due modi:

1. Si può applicare il teorema di Tchebycheff per il quale si richiede di conoscere solamente la media e la varianza della v.c. X/n .

Infatti, si vuole determinare un valore X/n in n prove tale che:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - 0,5\right| < 0,02\right) > 0,95$$

o, equivalentemente:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - 0,5\right| \geq 0,02\right) \leq 0,05$$

Applicando il teorema di Tchebycheff, si ha:

$$1 - \frac{1}{k^2} = 0,95 \quad \text{da cui} \quad \frac{1}{k^2} = 0,05 \quad \text{e} \quad k^2 = 20.$$

Dalla relazione sopra scritta si ricava che $k\sigma = 0,02$ che, nel caso della v.c. X/n diventa:

$$\frac{(k \cdot \sqrt{0,25})}{\sqrt{n}} = 0,02$$

e risolvendo per n :

$$n = \frac{k^2 \cdot 0,25}{(0,02)^2} = \frac{20 \cdot 0,25}{0,0004} = 12.500$$

Quindi, in base al teorema di Tchebycheff, si può concludere che il numero di prove necessarie per assicurare la precisione desiderata, con una probabilità almeno pari allo 0,95 è molto elevato e non deve essere inferiore a 12.500.

2. Si può impiegare il teorema del limite centrale, in base al quale è possibile derivare la distribuzione della v.c. X/n che risulterà normale con media pari a 0,5 e varianza pari a $0,25/n$.

Dopo n lanci la v.c. Z_n sarà:

$$Z_n = \frac{X/n - 0,5}{\sqrt{0,25}} \sqrt{n}$$

che si distribuisce secondo la variabile casuale normale standardizzata e soddisfa le condizioni del teorema del limite centrale.

Dalle tavole della v.c. normale standardizzata risulta che la v.c. Z_n è compresa nell'intervallo $\pm 1,96$, con una probabilità pari allo 0,95, cioè:

$$P(|Z_n| < 1,96) = 0,95,$$

che si scrive, tenendo conto della relazione di cui sopra:

$$P\left(\left|\frac{X/n - 0,5}{\sqrt{0,25}} \sqrt{n}\right| < 1,96\right) = P\left(\left|\frac{X}{n} - 0,5\right| < \frac{1,96\sqrt{0,25}}{\sqrt{n}}\right) = 0,95,$$

Dai dati del problema, deve essere scelto un n tale che:

$$\frac{1,96\sqrt{0,25}}{\sqrt{n}} = 0,02 \quad \text{cioè} \quad n = 2.401$$

Questo risultato è di circa 1/5 inferiore a quello ottenuto attraverso il teorema di Tchebycheff.

ESERCIZIO 15

Su 1.000 nascite, qual è la probabilità che la percentuale di nati maschi si trovi tra il 48% ed il 52%?

SOLUZIONE

Si indichi con X la v.c. “nato maschio” e si supponga che ogni nascita sia indipendente, nel senso che il sesso dei nati precedentemente non influenzi quello dei nati a venire, e per semplicità, che $p = 0,5$. Si chiede di calcolare $P(480 < X < 520)$. La media di X sarà $p = 500$ e la deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{500(1000-500)}{1000}} = 15,8.$$

Si definisce:

$$z_1 = \frac{480 - 1/2 - 500}{15,8} = -1,297$$

$$z_2 = \frac{520 + 1/2 - 500}{15,8} = +1,297$$

Quindi la probabilità relativa ad una v.c. binomiale relativa può essere calcolata mediante l'approssimazione alla distribuzione normale:

$$P(480 < X < 520) = P(-1,297 < Z < 1,297) = 2P(0 < Z < 1,297) = 2 \cdot 0,4032 = 0,8064$$

La probabilità che i nati maschi si trovino tra il 48-mo ed il 52-mo percentile è pari all'80,64% circa.

ESERCIZIO 16

In un processo di produzione in serie il 10% della popolazione viene abitualmente scartato perché difettoso. Avendo scelto a caso un campione di 100 pezzi della produzione, si è constatato che ben 14 erano da scartare. Non essendo soddisfatti di questo primo risultato, si prende un ulteriore campione casuale di 400 pezzi e in questo caso vi sono 56 pezzi difettosi.

Cosa è possibile concludere riguardo alla produzione esaminando il primo campione estratto? Tali risultati sono confermati dal secondo campione di 400 pezzi?

SOLUZIONE

In base al teorema del limite centrale la proporzione di successi X/n , per n sufficientemente elevato, può essere approssimata da una distribuzione normale con parametri p e pq/n .

Nel caso del processo di produzione a cui si fa riferimento, $p = 0,10$ ed $n = 100$, e quindi si avrà:

$$(X/n) \sim N(p = 0,10; p \cdot (1-p)/n = 0,0009)$$

da cui segue che:

$$\frac{(X/n) - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \approx N(0,1)$$

1. Nel caso del primo campione di dimensione 100, la proporzione X/n di pezzi difettosi che si possono trovare in un campione nel 95% varia tra i valori $\pm 1,96$, e cioè:

$$P \left(-1,96 < \frac{(X/n) - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < 1,96 \right) = 0,95$$

da cui:

$$P \left(p - 1,96 \sqrt{\frac{pq}{n}} < \frac{X}{n} < p + 1,96 \sqrt{\frac{pq}{n}} \right) = 0,95$$

$$P\left(0,10 - 1,96\sqrt{\frac{0,10 \cdot 0,9}{100}} < \frac{X}{n} < 0,10 + 1,96\sqrt{\frac{0,10 \cdot 0,9}{100}}\right) = 0,95$$

cioè:

$$0,041 < \frac{X}{n} < 0,1588$$

Si dirà quindi che una proporzione di pezzi difettosi nella popolazione pari a 0,10, ci si può aspettare delle proporzioni campionarie X/n che, per campioni di dimensione $n = 100$, nel 95% dei casi si troveranno comprese tra i valori 0,0412 e 0,1588.

Poiché in questo caso $X/n = 0,14$ è compreso all'interno di questo intervallo si ritiene che il processo di produzione non abbia subito alterazioni e quindi continui a produrre pezzi difettosi con una percentuale del 10%.

2. Per il secondo campione risulta:

$$P\left(0,10 - 1,96\sqrt{\frac{0,10 \cdot 0,9}{400}} < \frac{X}{n} < 0,10 + 1,96\sqrt{\frac{0,10 \cdot 0,9}{400}}\right) = 0,95$$

$$P\left(0,0706 < \frac{X}{n} < 0,1295\right) = 0,95$$

In questo caso la proporzione di scarto varia tra un minimo di 0,07 ed un massimo di 0,13 circa. Avendo riscontrato una proporzione campionaria pari a 0,14 si dirà che tale proporzione deve ritenersi scarsamente probabile che essa provenga da un processo produttivo con caratteristiche $p = 0,10$. Più precisamente, tale eventualità è relegata al 95% dei casi.

Questo risultato, inoltre, mostra come all'aumentare della numerosità del campione la precisione delle stime aumenta. Questa affermazione può essere dimostrata calcolando le varianze delle proporzioni campionarie per i 2 campioni, e cioè:

per $n = 100$ si ha:
$$\text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{0,1 \cdot 0,9}{100} = 0,0009,$$

per $n = 400$ si ha:
$$\text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{0,1 \cdot 0,9}{400} = 0,000225,$$

ESERCIZIO 17

In un agglomerato di 500 abitazioni deve essere posizionata una nuova fermata dell'autobus e al fine di collocarla nel punto più centrale si compie una rilevazione delle distanze tra le residenze delle famiglie ed il luogo dove dovrebbe essere posizionata la fermata.

Indicando con X la v.c. distanza, la società dei trasporti ha riscontrato che la distanza media delle abitazioni è di 100 metri e la deviazione standard delle distanze è di 45 metri. In base a queste indicazioni si trova il punto più centrale. I cittadini non ritengono giusta la collocazione della fermata e propongono uno spostamento di una decina di metri.

Per cercare di dimostrare che invece il luogo proposto è il più centrale, si sceglie un campione di 100 famiglie senza reintroduzione.

Qual è la probabilità che la distanza media dalla fermata delle abitazioni incluse nel campione sia compresa nell'intervallo (100 ± 10) metri?

SOLUZIONE

In pratica, si chiede di determinare la probabilità che la media campionaria \bar{X} trovata non si discosti più di 10 metri, in più o in meno, dal punto in cui è stata collocata la fermata dell'autobus.

Per il campione di dimensione $n = 100$ si avrà:

$$E(\bar{X}) = 100$$

mentre per il calcolo della varianza si dovrà tenere conto del fattore di correzione, trattandosi di campionamento senza ripetizione, cioè:

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1} = \frac{2.025}{100} \cdot \frac{400}{499} = 16,2325$$

quindi:

$$\begin{aligned} P(90 \leq \bar{X} \leq 110) &= P\left(\frac{90-100}{4,029} \leq Z \leq \frac{110-100}{4,029}\right) = \\ &= P(-2,48 \leq Z \leq 2,48) = 2P(0 \leq Z \leq 2,48) = 2 \cdot 0,4924 = 0,9868 \end{aligned}$$

Nel 98,68% dei casi la distanza media del campione sarà compresa tra (100 ± 10) metri

ESERCIZIO 18

Data la v.c. $X \sim \text{Bin}(n = 10, p = 0,5)$, che rappresenta il numero di successi in 10 prove, si determini la probabilità esatta di avere un numero di successi minore o uguale a 4 e la si confronti con quella analoga ottenuta attraverso l'approssimazione alla normale.

SOLUZIONE

La probabilità richiesta è:

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= \sum_{x=0}^4 \binom{10}{x} 0,5^x 0,5^{10-x} = \\ &= \binom{10}{0} 0,5^0 0,5^{10-0} + \binom{10}{1} 0,5^1 0,5^{10-1} + \binom{10}{2} 0,5^2 0,5^{10-2} + \binom{10}{3} 0,5^3 0,5^{10-3} + \binom{10}{4} 0,5^4 0,5^{10-4} = 0,37695 \end{aligned}$$

Utilizzando l'approssimazione alla normale, bisogna considerare la v.c. $X \approx N(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$, per cui:

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= P\left(Z \leq \frac{4 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{4 - 5}{\sqrt{2,5}}\right) = P(Z \leq -0,63) = \\ &= 1 - 0,73565 = 0,26435 \end{aligned}$$

Si osserva come per valori piccoli di n (in questo caso $n = 10$) l'approssimazione risulti insoddisfacente.

ESERCIZIO 19

Supposto che l'altezza di una popolazione di individui sia una v.c. $X \approx N(\mu = 170, \sigma^2 = 100)$:

- calcolare la probabilità di trovare un individuo con altezza compresa tra 150 e 160 cm.
- Determinare quell'altezza al di sopra della quale si trova il 5% degli individui.

SOLUZIONE

$$\begin{aligned} \text{a) } P(150 \leq X \leq 160) &= P\left(\frac{150 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{160 - \mu}{\sigma}\right) = P(-1 \leq Z \leq -2) = \\ &= P(Z \leq -1) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq 1) = \\ &= 0,97725 - 0,84134 = 0,13591 \end{aligned}$$

$$\text{c) } P(X \geq x_0) = P(Z \geq z_0) = P\left(Z \geq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = 0,05$$

Occorre trovare sulle tavole il valore z_0 per il quale risulta $P(Z \leq z_0) = 0,95$. Tale valore è:

$$z_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} = 1,65$$

da cui:

$$x_0 = \mu + 1,65\sigma = 170 + (1,65 \cdot 10) = 186,5$$

ESERCIZIO 20

In una ditta di prodotti alimentari vengono riempite e chiuse automaticamente confezioni di riso dal contenuto di 1 kg. In realtà il contenuto varia e si sa che l'8% delle confezioni contiene meno di 1 kg mentre il 30% contiene non meno di 1,05 kg. Assumendo che la quantità di riso contenuta nelle confezioni sia una v.c. X distribuita normalmente, calcolarne la media e la varianza.

SOLUZIONE

Dai dati a disposizione è possibile dedurre che:

$$P\left(Z \leq z' = \frac{1 - \mu}{\sigma}\right) = 0,08 \quad \text{e} \quad P\left(Z \geq z'' = \frac{1,05 - \mu}{\sigma}\right) = 0,7$$

Dalle tavole della v.c. normale standard risulta che $z' = -1,41$ e $z'' = 0,53$.

Devono quindi essere verificate simultaneamente le relazioni:

$$\frac{1 - \mu}{\sigma} = -1,41$$
$$\frac{1,05 - \mu}{\sigma} = 0,53$$

da cui:

$$1 = \mu - 1,41\sigma$$
$$1,05 = \mu + 0,53\sigma$$

Risolvendo il sistema si ha $\mu = 1,036$ e $\sigma = 0,025$

ESERCIZIO 21

La popolazione degli studenti del corso di Statistica si distribuisce, rispetto alla statura, con media 175 cm e varianza pari a 16 cm². Si determini la probabilità che un campione di 10 studenti abbia una statura media compresa tra 173 e 176 cm.

SOLUZIONE

Per determinare la probabilità richiesta bisogna ricordare che la v.c. media campionaria \bar{X} ha una distribuzione normale con media μ pari alla media della popolazione e varianza pari alla varianza della popolazione divisa per n .

Si avrà quindi:

$$P(173 \leq \bar{X} \leq 176) = P\left(\frac{173 - 175}{4/\sqrt{10}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{176 - 175}{4/\sqrt{10}}\right) =$$
$$= P\left(-1,58 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 0,79\right) = 0,78524 - (1 - 0,94295) = 0,72819$$

ESERCIZIO 22

Alle elezioni amministrative del comune di Cagliari del giugno 2003, i voti ottenuti dal partito XXX sono stati pari al 40%. Si determini la probabilità che, estraendo con ripetizione un campione di 1000 elettori, almeno il 38% di questi abbia votato XXX.

SOLUZIONE

La probabilità richiesta può essere calcolata come:

$$P(X/n \geq 0,38) = \sum_{x=380}^{1000} \binom{1000}{x} 0,4^x (1-0,4)^{1000-x}$$

Il calcolo è evidentemente lungo e laborioso. Tuttavia, per n che tende ad infinito, la v.c. X/n tende ad una distribuzione normale $X \approx N(\mu = p, \sigma^2 = p(1-p)/n)$. Quando si ha un campione sufficientemente grande, come in questo caso, si può approssimare la distribuzione binomiale con la distribuzione normale.

La probabilità richiesta risulta:

$$P\left(Z \leq \frac{0,38 - 0,40}{\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{1000}}}\right) = P(Z \leq -1,29) = 0,90147$$

ESERCIZIO 23

Sia X il contenuto di nicotina per sigaretta di una certa partita. Supponendo che $X \approx N(\mu = 0,9, \sigma^2 = 0,09)$ si determini la probabilità che il contenuto medio di nicotina in un campione di 25 sigarette sia superiore a 1,01.

SOLUZIONE

La probabilità richiesta può essere calcolata come:

$$P(\bar{X} \geq 1,01) = P\left(Z > \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1,01 - 0,9}{0,3/5}\right) = 1 - 0,96638 = 0,03365$$

ESERCIZIO 24

Un certo carattere X è distribuito normalmente. Inoltre, per tale carattere, $P(X > 112) = 0,2743$ e $P(X < 93) = 0,3632$. Trovare media e varianza della distribuzione.

SOLUZIONE

Nell'esercizio si richiede di determinare i parametri di una distribuzione normale per cui si definiscono due aree di probabilità.

Per il carattere considerato risulta:

$$P(X > 112) = 0,2743$$

Quindi:

$$P(\mu = E(X) < X < 112) = 0,5 - 0,2743 = 0,2257$$

da cui:

$$P(\mu = E(X) < X < 112) = P\left(0 < Z < z_0 = \frac{112 - \mu}{\sigma}\right) = 0,2257$$

Dalle tavole della v.c. normale standardizzata risulta che $z_0 = \frac{112 - \mu}{\sigma} = 0,6$.

Quest'unica condizione non è sufficiente per determinare entrambe le incognite.

Bisogna anche considerare l'altra condizione:

$$P(X < 93) = 0,3632$$

$$P(93 < \mu = E(X)) = 0,5 - 0,3632 = 0,1368$$

Il valore di Z tale che

$$P\left(\frac{93 - \mu}{\sigma} < Z < 0\right) = 0,1368 \quad \text{è} \quad z_1 = -0,35 = \frac{93 - \mu}{\sigma}$$

Si deve quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 112 - \mu = \sigma \cdot 0,6 \\ 93 - \mu = \sigma \cdot (-0,35) \end{cases} \quad \text{da cui si ricava } \mu = 100 \text{ e } \sigma = 20$$

ESERCIZIO 25

Ad uno sportello di un ufficio postale in 4 fasce orarie disgiunte ed indipendenti tra loro, si è osservato il numero X di utenti in fila, le cui determinazioni sono: 5, 9, 3, 7. Supponendo che la variabile casuale in oggetto segua una distribuzione di Poisson di parametro λ stimare il numero di utenti in fila attraverso:

- il metodo dei minimi quadrati;
- il metodo della massima verosimiglianza.

SOLUZIONE

- Per la stima dei minimi quadrati di un parametro θ deve essere:

$$G(\theta) = \sum_{i=1}^n (e_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - g_i(\theta))^2 = \min$$

Pertanto, per individuare il numero medio di utenti in fila deve risultare:

$$G(\lambda) = \sum_{i=1}^n (e_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \lambda)^2 = \min$$

cioè:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n (x_i - \lambda)^2 = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^n (x_i - \lambda) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \lambda) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i - n\lambda = 0$$

da cui:

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{5+9+3+7}{4} = \frac{24}{4} = 6^1$$

b) Per la stima di massima verosimiglianza di λ deve essere:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_i!}$$

da cui, passando ai logaritmi:

$$\log L(\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i \log \lambda - \log \prod_{i=1}^n x_i!$$

Calcolando la derivata rispetto a λ ed uguagliando a zero si ottiene:

$$\frac{\partial \log L(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

$$-n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} = 0$$

da cui:

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{5+9+3+7}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

ESERCIZIO 26

Un rivenditore autorizzato ha ordinato lo scorso semestre presso la società Alfa 30 condizionatori, 5 dei quali presentano una rumorosità eccessiva rispetto agli standard previsti.

Stimare, con il metodo della massima verosimiglianza, la probabilità che un condizionatore di quel tipo presenti una rumorosità eccessiva rispetto agli standard.

SOLUZIONE

¹ Avendo risolto un'equazione rispetto ad un parametro incognito si è posto il segno ^ sopra di esso per indicare il particolare valore che soddisfa l'equazione.

Supponendo che il numero N di condizionatori prodotti dalla società Alfa sia elevato rispetto ai 30 condizionatori consegnati al rivenditore autorizzato, il numero incognito di condizionatori eccessivamente rumorosi può essere considerato una v.c. X che si approssima ad una v.c. binomiale. Pertanto, la probabilità che 5 condizionatori su 30 siano eccessivamente rumorosi è:

$$P(X = 5) = f(5) = \binom{30}{5} p^5 (1-p)^{30-5}$$

In base al metodo della massima verosimiglianza la funzione di verosimiglianza è espressa da:

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = p^5 (1-p)^{25}$$

da cui, passando ai logaritmi:

$$\log L(\theta; x_1, \dots, x_n) = 5 \log p + 25 \log(1-p)$$

e derivando rispetto a p ed uguagliando a zero:

$$\frac{\partial \log L(\theta; x_1, \dots, x_n)}{\partial p} = \frac{5}{p} - \frac{25}{1-p} = 0$$

$$\frac{5 - 5p - 25p}{p(1-p)} = 0$$

$$5 - 30p = 0$$

da cui:

$$\hat{p} = \frac{5}{30} = 0,167$$

che è la stima più verosimile della proporzione di condizionatori con eccessiva rumorosità nella popolazione.

Per verificare che $\hat{p} = 0,167$ corrisponde ad un punto di massimo si controlla il segno della derivata seconda in quel punto:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{p}} \left(\frac{5}{\hat{p}} - \frac{25}{1-\hat{p}} \right) = -\frac{5}{\hat{p}^2} - \frac{25}{(1-\hat{p})^2} = -\frac{5}{(0,167)^2} - \frac{25}{(1-0,167)^2} = -215,311$$

Essendo il segno della derivata seconda negativo, $\hat{p} = 0,167$ esprime il valore di p che massimizza la probabilità di ottenere 5 condizionatori eccessivamente rumorosi in un campione di dimensione n .

ESERCIZIO 27

Data una popolazione X di tipo uniforme e di parametri a e b si suppone di estrarre, in modo casuale, un campione per il quale la media risulta pari a 10 e la varianza pari a 6. Stimare i parametri a e b della popolazione con il metodo dei momenti.

SOLUZIONE

Ricordando che per una distribuzione uniforme:

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

si pone:

$$\frac{b+a}{2} = 10 \quad \text{e} \quad \frac{(b-a)^2}{12} = 6$$

Risolvendo il sistema per a e b si trova:

$$\hat{b} = 14,24 \quad \text{e} \quad \hat{a} = 5,76.$$

ESERCIZIO 28

Data una popolazione normale di media pari a μ e varianza incognita è stato estratto un campione casuale (X_1, \dots, X_n) . Trovare la stima di massima verosimiglianza della varianza.

SOLUZIONE

Il logaritmo della funzione di verosimiglianza di σ^2 è:

$$\log L(x_1, \dots, x_n; \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

per cui bisogna risolvere l'equazione:

$$\frac{\partial \log L(x_1, \dots, x_n; \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0$$

la cui soluzione è fornita dal valore di $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

che è la stima di massima verosimiglianza di σ^2 quando la media della popolazione è nota.