

**Nazario Magnarelli**

**Latina**

**GEOMETRIA ANALITICA  
E PROIETTIVA**

**Parte prima**

# BIBLIOGRAFIA

- 1) **L. Campedelli:** Lezioni di geometria, vol. I – CEDAM, Bologna.
- 2) **G. Castelnuovo:** Lezioni di geometria analitica.
- 3) **F. Conforto:** Geometria descrittiva – Ed. Universitarie Docet; Roma.
- 4) **E. Martinelli:** Lezioni di geometria; Ed. M. Bozzi – Genova.
- 5) **D. Ghinelli – R. Mazzocco:** Esercizi di geometria – Mediterranean Press, Cosenza.
- 6) **N. Magnarelli:** Nuova dimostrazione delle proposizioni 138 e 139 del libro VII -  
Collezione Matematica di Pappo; Centro Morin, Paderno del Grappa - Agosto 1996.
- 7) **G. Orecchia – S. Spataro:** Le quadriche (vol. 33) – Ed. Tecnos, Milano.

## Indice

BIBLIOGRAFIA .....	2
PARTICOLARI SEZIONI PIANE DI UN CONO ROTONDO .....	5
n. 1 – Sezioni di un cono rotondo .....	5
n. 2 – Luogo dei punti dello spazio da cui un'iperbole equilatera è proiettata secondo un cono rotondo .....	9
SEZIONI CIRCOLARI DI PARTICOLARI QUADRICHE .....	15
n. 1 – Sezioni circolari di un ellissoide .....	15
n. 2 – Sezioni circolari di un iperboloido ad una falda .....	20
n. 3 – Sezioni circolari dei coni e dei cilindri ellittici .....	22
n. 4 – Studio di un cilindro .....	25
n. 5 – Equazione del cilindro circoscritto ad una data sfera e con le generatrici di direzione assegnata .....	30
n. 6 – Equazione del cilindro di cui sono assegnati la direttrice e i parametri direttori delle generatrici .....	32
n. 7 – Riduzione dell'equazione di una quadrica a forma canonica .....	34
n. 8 – Rotazione ortogonale per la riduzione a forma canonica di una quadrica a centro .....	38
n. 9 – Riduzione a forma canonica di una quadrica senza centro di simmetria .....	41
n. 1 – Area di un segmento di parabola .....	44
n. 2 – Volume di una semisfera .....	48
ARGOMENTI DI STORIA DELLA MATEMATICA .....	51
n. 1 – La trisettrice di Ippia ( a cura di Nazario Magnarelli) .....	51
n. 2 – Trisezione di un angolo: altra dimostrazione .....	54
n. 3 – Centro di curvatura ed evolvente di una curva .....	56
LE SUPERFICI COME LUOGHI GEOMETRICI .....	59
n. 1 – PROBLEMA 1 E (testo di G. Vaccaro; Le superfici, pag. 100) .....	59
n. 2 – Conoide di Plücker ( G. Vaccaro; Le superfici, pag. 106) .....	62
n. 3 – Esempio di superficie rigata (G. Vaccaro; Le superfici, pg. 107) .....	64
ELEMENTI DI GEOMETRIA PROIETTIVA .....	66
n. 1 – Coordinate proiettive omogenee in un piano .....	66
n. 2 – Esercizio 1 (D. Ghinelli; Esercizi di Geometria, pag. 104) .....	71
n. 3 – Esercizio 2 (D. Ghinelli; Esercizi di Geometria, pag. 105) .....	73
n. 4 – Esercizio 3 (D. Ghinelli; Esercizi di Geometria, pag. 105) .....	75
n. 5 – Esercizio 4 (D. Ghinelli; Esercizi di Geometria, pag. 106) .....	77
n. 7 – Punti uniti di una proiettività fra due punteggiate sovrapposte .....	80
n. 11 – Problemi di applicazione su proiettività e involuzioni .....	85
n. 12 – Punti limite di due punteggiate proiettive: 1° esempio .....	87
n. 14 – Problemi sulle involuzioni (L. Campedelli; Es. di Geometria, pag. 214) .....	89
n. 15 – Esercizio sull'involuzione ( Cacciafesta; Es. di Geometria, pag. 24) .....	90
PROBLEMA 1 B ( Testo di L. Campedelli; Geometria pag. 253) .....	92
DIMOSTRAZIONI PROIETTIVE .....	99
DEI TEOREMI DI PAPPO E DI PASCAL .....	99
n. 1 – Nozioni preliminari di geometria proiettiva .....	99
n. 2 – Proposizione 139 di Pappo .....	103
N. 3 – Proposizione 138 di Pappo .....	106

n. 4 –Primo teorema di Steiner-Chasles .....	107
n. 5 – Secondo teorema di Steiner-Chasles.....	108
n. 6 – Teorema di Pascal (prima parte) .....	109
n. 7 – Inverso del teorema di Pascal (seconda parte).....	111
n. 8 – Altro esempio della retta di Pascal relativa ad un esagono semplice inscritto in una conica .....	113
Appendice A .....	116
n. 9 – Dimostrazione del teorema di Pascal basata sull'asse di collineazione di una proiettività .....	116
Appendice B.....	118
n. 10 – Altra dimostrazione dell'invarianza di un birapporto .....	118
Appendice C.....	119
n. 11 – Teorema di Pascal nel caso di un esagono inscritto in una circonferenza ....	119

# PARTICOLARI SEZIONI PIANE DI UN CONO ROTONDO

di Nazario Magnarelli

P.le Carturan, 12 – LATINA – Tel.: 0773-697994

## Sunto

Nella prima parte dell'articolo sono studiati i coni di rotazione circoscritti ad una data sfera, aventi il vertice sul piano  $yz$ , e le cui sezioni con il piano  $xy$  siano iperboli equilateri. Si trova che il luogo dei vertici che hanno tale proprietà è un'ellisse  $L_1$  del piano  $yz$ .

Nella seconda parte dell'articolo si considera una di queste iperboli, si ricava l'equazione della sua ellisse focale  $L_2$ , che appartiene anch'essa al piano  $yz$ , e si mette in risalto la differenza tra i due luoghi  $L_1$  ed  $L_2$ .

## n. 1 –Sezioni di un cono rotondo

Sia dato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico  $Oxyz$ .

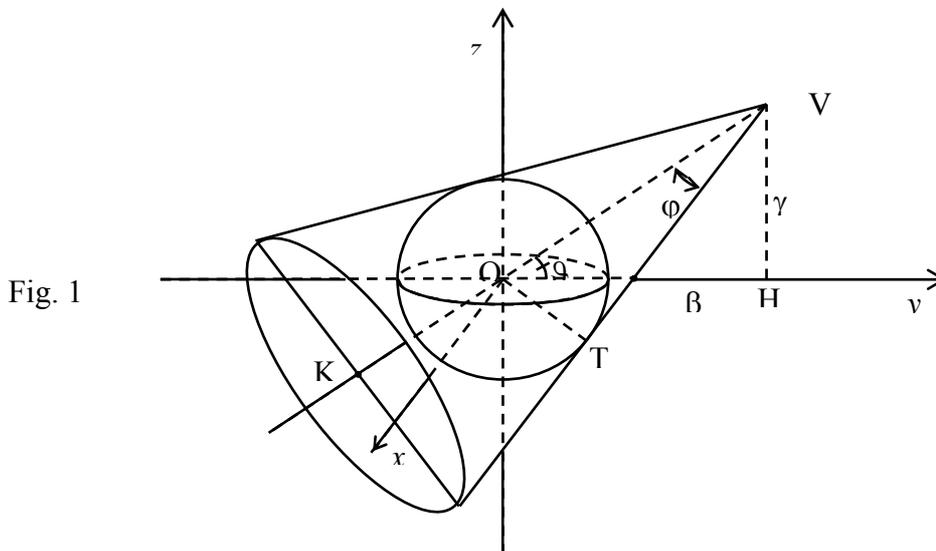


Fig. 1

Consideriamo la superficie conica di rotazione (o, brevemente, cono di rotazione) di vertice  $V(0, \beta, \gamma)$ , circoscritta alla sfera di equazione

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

che ha raggio  $r = 1$  e centro  $O(0,0,0)$ .

Osservazione I - Senza togliere nulla al caso generale, possiamo supporre che il punto  $V$  cada nel primo quadrante del piano  $yz$ , cioè che si abbia

$$x_v = 0, \quad y_v = \beta \geq 0, \quad z_v = \gamma \geq 0.$$

Esaminiamo la sezione del cono con il piano  $xy$ . Affinché tale sezione sia un'iperbole deve essere  $\gamma < 1$ ; infatti per  $\gamma \geq 1$  il piano  $xy$  interseca una sola falda del cono e quindi la curva di intersezione può essere un'ellisse o una parabola, ma non un'iperbole. Per  $\gamma$  si ha quindi la limitazione

$$(2) \quad 0 \leq \gamma < 1 .$$

Osservazione II - Il lettore tenga anche presente che quando il vertice  $V$  appartiene alla sfera, il cono si riduce al piano ad essa tangente nel punto stesso, contato due volte: ciò sarà spiegato poco più avanti. Escludiamo questo caso perché privo di interesse per la nostra ricerca.

Fatte queste riflessioni preliminari, consideriamo il cono  $\Phi$  circoscritto ad una quadrica non degenera  $\Sigma$  da un punto  $Q$  dello spazio. In coordinate cartesiane

omogenee l'equazione della quadrica è  $\sum_{h,k=1}^4 a_{hk} x_h x_k = 0$ , con  $a_{hk} = a_{kh}$  e

$|a_{hk}| \neq 0$ . Per un generico punto  $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$  della quadrica poniamo

$$f(P) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{h,k=1}^4 a_{hk} x_h x_k .$$

Indicando con  $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$  le coordinate omogenee del punto  $Q$ , l'equazione del cono è

$$(3) \quad [f(P,Q)]^2 - f(P)f(Q) = 0$$

ove  $f(P,Q)$  ha l'espressione

$$(4) \quad f(P,Q) = \sum_{k=1}^4 \left( a_{k1}x'_1 + a_{k2}x'_2 + a_{k3}x'_3 + a_{k4}x'_4 \right) x_k$$

Se il punto  $Q$  appartiene alla quadrica si ha  $f(Q) = 0$  e la (3) si riduce all'equazione  $[f(P,Q)]^2 = 0$ : questa rappresenta il piano tangente alla quadrica nel punto stesso, con il piano contato due volte.

Risulta così chiarita l'osservazione II.

Passiamo a coordinate non omogenee. Nel nostro caso la quadrica è la sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  e il punto  $Q$ , vertice del cono, è il punto  $V(0, \beta, \gamma)$ . Si trova facilmente

$$(5) \quad f(P,Q) = \beta y + \gamma z - 1, \quad f(P) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \\ f(Q) = f(V) = \beta^2 + \gamma^2 - 1 .$$

Sostituendo le (5) nella (3) si ha

$$(\beta y + \gamma z - 1)^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - 1)(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$$

da cui 
$$\beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 + 1 + 2\beta\gamma yz - 2\beta y - 2\gamma z - \beta^2 x^2 - \beta^2 y^2 - \beta^2 z^2 + \beta^2 +$$

$$- \gamma^2 x^2 - \gamma^2 y^2 - \gamma^2 z^2 + \gamma^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Semplificando e raggruppando si trova che l'equazione del cono è

$$(6) \quad \Phi : (1 - \beta^2 - \gamma^2) x^2 + (1 - \gamma^2) y^2 + (1 - \beta^2) z^2 +$$

$$+ 2\beta\gamma \cdot yz - 2\beta y - 2\gamma z + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

Intersecando con il piano  $xy$ ,  $z = 0$ , si ha la conica  $\Gamma$  di equazione

$$(7) \quad (1 - \beta^2 - \gamma^2) x^2 + (1 - \gamma^2) y^2 - 2\beta y + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

Poiché vogliamo che essa sia un'iperbole equilatera deve essere  $\gamma^2 \neq 1$  e  $a_{11} + a_{22} = 1 - \beta^2 - \gamma^2 + 1 - \gamma^2 = 0$ . Si ricava

$$(8) \quad \beta^2 + 2\gamma^2 = 2, \quad \beta^2 + \gamma^2 = 2 - \gamma^2, \quad 1 - 1 - \beta^2 - \gamma^2 = \gamma^2 - 1.$$

Pertanto l'equazione dell'iperbole equilatera è

$$(\gamma^2 - 1) x^2 - (\gamma^2 - 1) y^2 - 2\beta y + 2 - \gamma^2 = 0.$$

La (8)<sub>1</sub> ci permette di trarre una prima conclusione:

nel piano  $yz$ , il luogo dei vertici  $V(0, \beta, \gamma)$  dei coni rotondi circoscritti alla sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e le cui intersezioni con il piano  $xy$  siano delle iperboli equilatera è l'ellisse  $L_1$  di equazione

$$\beta^2 + 2\gamma^2 = 2, \quad x = 0$$

o, come è lecito scrivere, (9)  $y^2 + 2z^2 = 2$ ,  $x = 0$ .

Da questa ellisse vanno esclusi i punti  $(0; 0; \pm 1)$ . Essi, infatti, appartengono alla sfera (1) e quindi i coni che hanno tali punti come vertici degenerano in piani tangenti (osservazione II)

La (8)<sub>1</sub> ci dice che il vertice  $V$  del cono proiettante è esterno alla sfera. Infatti per un punto interno alla sfera, potendolo pensare appartenente al piano  $yz$ ,  $x = 0$ , si avrebbe:  $\beta^2 + \gamma^2 < 1$  e  $\gamma^2 < 1$ , quindi

$$\beta^2 + 2\gamma^2 < 2. \text{ Ma ciò è in contrasto con la stessa (8)}_1.$$

Ci interessa ora conoscere i valori che possono assumere l'angolo di semiapertura  $\varphi$  del cono e l'angolo di inclinazione  $\vartheta$  che l'asse del cono forma con il piano secante  $xy$ . Dall'esame della fig. 1 si ha

$$\overline{VO} = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{2-2\gamma^2 + \gamma^2} \quad \text{quindi} \quad \overline{VO} = \sqrt{2-\gamma^2}$$

$$\overline{OT} = \overline{VO} \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad \overline{HV} = \overline{VO} \operatorname{sen} \vartheta \quad .$$

Si ricava (10)  $\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2-\gamma^2}} \quad , \quad \operatorname{sen} \vartheta = \frac{\gamma}{\sqrt{2-\gamma^2}} \quad .$

Poiché  $0 \leq \gamma < 1$  , come già osservato da esse si deduce  $\vartheta < \varphi$  ;  
cioè l'angolo di inclinazione  $\vartheta$  che l'asse del cono forma con il piano secante  $xy$   
è minore dell'angolo di semiapertura  $\varphi$  del cono.

Come si vede dalle formule (10), l'angolo  $\varphi$  può assumere infiniti valori, a ciascuno dei quali corrisponde un particolare valore dell'angolo  $\vartheta$  . Per quanto riguarda la semiapertura  $\varphi$  del cono, la (10)<sub>1</sub> e la limitazione  $0 \leq \gamma < 1$  mostrano che deve essere  $\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$  . L'osservazione I impone invece che sia  $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$  . Infatti per  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  dalla (10)<sub>2</sub> si avrebbe  $\gamma = \sqrt{2-\gamma^2}$  e quindi  $\gamma^2 = 1$  ma ciò è in contrasto con la considerazione fatta. Vediamo alcune coppie di valori  $\varphi$  e  $\vartheta$  .

Per  $\beta = 1$  si ha  $\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ,  $\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$  ,  $\operatorname{sen} \vartheta = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ;  
 $\varphi \approx 54^\circ 44' 8''$        $\vartheta \approx 35^\circ 15' 51''$  .

Il cono corrispondente al punto  $V\left(0; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  ha l'equazione

$$\Phi : x^2 - y^2 - 2\sqrt{2}yz + 4y - 3 = 0 \quad .$$

Esso interseca il piano  $xy$  secondo l'iperbole equilatera

$$C : x^2 - y^2 + 4y - 3 = 0 \quad .$$

Per  $\beta = \frac{1}{2}$  si ha  $\gamma^2 = \frac{7}{8}$  ,  $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{8}}{3}$  ,  $\operatorname{sen} \vartheta = \frac{\sqrt{7}}{3}$  ;

$$\varphi \approx 70^\circ 31' 4'' \quad \vartheta \approx 61^\circ 52' 28'' \quad .$$

Per  $\gamma = 0$  si ha  $\beta = \sqrt{2}$  ,  $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ,  $\operatorname{sen} \vartheta = 0$  ,

quindi  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  e  $\vartheta = 0$  .

In tal caso l'equazione del cono rotondo è

$$-x^2 + (y - \sqrt{2})^2 - z^2 = 0 .$$

Si tratta di un cono rotondo avente per asse l'asse  $y$  e l'apertura uguale ad un angolo retto. Il piano  $xy$   $z = 0$ , lo interseca secondo un'iperbole equilatera spezzata in due rette fra loro ortogonali. Qualsiasi altro piano

$z = k$  ( $k \neq 0$ ), parallelo al piano  $xy$ , interseca il cono secondo un'iperbole equilatera non degenera.

Si trova così un caso particolare ben noto ad ogni cultore di Geometria.

## **n. 2 – Luogo dei punti dello spazio da cui un'iperbole equilatera è proiettata secondo un cono rotondo**

Dato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico  $Oxyz$ , riprendiamo in considerazione l'iperbole equilatera, del piano  $xy$ , già vista al n. 1

$$(1) \quad C : x^2 - y^2 + 4y - 3 = 0,$$

o, se si vuole  $C : (y-2)^2 - x^2 = 1.$

L'iperbole ha il centro  $C(0, 2)$ , interseca l'asse  $y$  nei punti  $A_1(0; 1)$ ,  $A_2(0; 3)$  e quindi la lunghezza dell'asse trasverso è  $A_1A_2 = 2a = 2$ .

Inoltre si ricavano facilmente i seguenti elementi :

- 1) gli asintoti sono le rette  $y = \pm x + 2$  ;
- 2) il semiasse trasverso è  $b = 1$  ;
- 3) la semidistanza focale è  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$  ;
- 4) i fuochi dell'iperbole sono i punti  $F_1(0; 2 - \sqrt{2})$  ed  $F_2(0; 2 + \sqrt{2})$ .

Ricavati questi elementi, vogliamo ora trovare il luogo  $L_2$  dei punti  $V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  dello spazio dai quali la data iperbole  $C$  è proiettata secondo un cono rotondo.

Per semplificare i calcoli, riduciamo l'iperbole a forma canonica con una traslazione di assi che ha come nuova origine il centro  $C(0;2)$  della iperbole considerata.

Le equazioni della traslazione sono:

$$(2) \quad x = X, \quad y = 2 + Y, \quad z = Z .$$

Sostituendo le (2) nell'equazione dell'iperbole si ha:

$$X^2 - (2+Y)^2 + 4(2+Y) - 3 = 0 .$$

$$X^2 - 4 - Y^2 - 4Y + 8 + 4Y - 3 = 0 \quad , \quad X^2 - Y^2 = -1 .$$

Infine (3)  $Y^2 - X^2 = 1 \quad , \quad Z = 0 .$

Troviamo ora l'equazione del cono di vertice  $V(\alpha, \beta, \gamma)$  che ha per direttrice l'iperbole (3) ( $\alpha, \beta, \gamma =$  nuove coordinate di  $V$ ). La generica retta  $g$  passante per il punto  $V$  ha le equazioni ridotte

$$(4) \quad \begin{cases} X - \alpha = \ell(Z - \gamma) \\ Y - \beta = m(Z - \gamma) \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X = \ell Z + \alpha - \ell\gamma \\ Y = m Z + \beta - m\gamma \end{cases}$$

La traccia della retta  $g$  sul piano  $XY$  è il punto  $P_0$  di coordinate

$$X_0 = \alpha - \ell\gamma \quad , \quad Y_0 = \beta - m\gamma .$$

Imponendo che il punto appartenga all'iperbole (3) si ha la relazione

$$(5) \quad (\beta - m\gamma)^2 - (\alpha - \ell\gamma)^2 = 1 .$$

Sostituendo nella (5) i valori di  $\ell, m$  che si ricavano dal sistema (4) si ha un'equazione nelle incognite  $X, Y, Z$  che è soddisfatta da tutti i punti della superficie del cono che proietta l'iperbole  $Y^2 - X^2 = 1$  e quindi essa rappresenta l'equazione del cono. Procedendo nei calcoli si ha :

$$\left[ \beta - \frac{\gamma(Y - \beta)}{Z - \gamma} \right]^2 - \left[ \alpha - \frac{\gamma(X - \alpha)}{Z - \gamma} \right]^2 = 1 \quad ;$$

$$(\beta Z - \gamma Y)^2 - (\alpha Z - \gamma X)^2 - (Z - \gamma)^2 = 0$$

$$(\beta^2 - \alpha^2 - 1)Z^2 + \gamma^2 Y^2 - \gamma^2 X^2 + 2\alpha\gamma XZ - 2\beta\gamma YZ + 2\gamma Z - \gamma^2 = 0 ;$$

$$(6) \quad \Phi : \gamma^2 X^2 - \gamma^2 Y^2 + (1 + \alpha^2 - \beta^2)Z^2 - 2\alpha\gamma XZ + 2\beta\gamma YZ - 2\gamma Z + \gamma^2 = 0 .$$

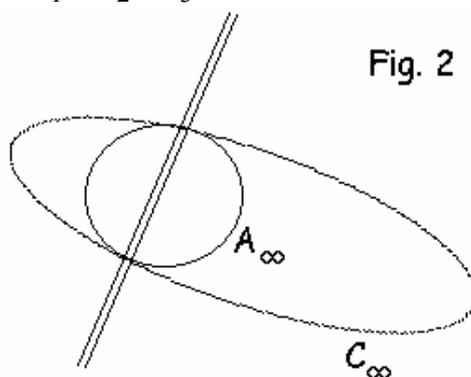
La (6), per  $\gamma \neq 0$ , è l'equazione del cono  $\Phi$  che dal punto  $V(\alpha, \beta, \gamma)$  proietta l'iperbole equilatera  $Y^2 - X^2 = 1$  del piano  $XY$ .

Passiamo a coordinate omogenee  $x_1, x_2, x_3, x_4$  e imponiamo la condizione che il cono sia rotondo. Intersecando il cono con il piano improprio  $x_4 = 0$  si ottiene l'equazione della conica all'infinito  $C_\infty$  del cono stesso. Essa è

$$(7) \quad C_\infty: \quad \gamma^2 x_1^2 - \gamma^2 x_2^2 + (1 + \alpha^2 - \beta^2) x_3^2 - 2\alpha\gamma x_1 x_3 + 2\beta\gamma x_2 x_3 = 0 .$$

Se vogliamo che il cono  $\Phi$  sia rotondo è necessario e sufficiente che la conica  $C_\infty$  sia bitangente al circolo assoluto dello spazio

$$A_\infty: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad , \quad x_4 = 0 .$$



Ma allora la  $C_\infty$  deve assumere la forma omogenea

$$(8) \quad \rho (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (\ell x_1 + m x_2 + n x_3)^2 = 0 .$$

La (8) ci dice che la  $C_\infty$  appartiene al fascio di coniche individuato dal circolo assoluto  $A_\infty$  e dalla retta  $\ell x_1 + m x_2 + n x_3 = 0$ , contata due volte. Abbiamo introdotto il parametro  $\rho$  perché altrimenti l'equazione della  $C_\infty$  sul piano improprio sarebbe la somma di 4 quadrati: in tal caso la  $C_\infty$  non avrebbe alcun punto reale. Sviluppando i calcoli si ha:

$$\rho x_1^2 + \rho x_2^2 + \rho x_3^2 + \ell^2 x_1^2 + m^2 x_2^2 + n^2 x_3^2 + 2\ell m x_1 x_2 + 2\ell n x_1 x_3 + 2m n x_2 x_3 = 0 .$$

Quindi la  $C_\infty$  ha la seguente equazione (9)

$$\rho (1 + \ell^2) x_1^2 + \rho (1 + m^2) x_2^2 + \rho (1 + n^2) x_3^2 + 2\ell m x_1 x_2 + 2\ell n x_1 x_3 + 2m n x_2 x_3 = 0 .$$

Affinché le coniche di equazione (7), (9) coincidano è necessario e sufficiente che esse abbiano i coefficienti proporzionali; ciò porta alle relazioni

$$(10) \quad \begin{cases} \ell m = 0 \\ \frac{\gamma^2}{\rho + \ell^2} = \frac{-\gamma^2}{\rho + m^2} = \frac{1 + \alpha^2 - \beta^2}{\rho + n^2} = \frac{-\alpha\gamma}{\ell n} = \frac{\beta\gamma}{mn} . \end{cases}$$

Se poniamo  $m = 0$ , il rapporto  $\frac{\beta\gamma}{mn}$  che figura nelle (10)<sub>2</sub> ci dice che deve essere  $\beta = 0$  e  $\gamma \neq 0$ . Infatti, se fosse  $\gamma = 0$  il punto

$V(\alpha, \beta, \gamma)$  appartenerebbe al piano su cui giace l'iperbole  $Y^2 - X^2 = 1$ ; e proiettando questa conica dal punto  $V$  si avrebbe un cono degenerare in due piani sovrapposti.

Ora per  $m = 0$  e  $\beta = 0$  si trova, tramite le equazioni (10)  $Y^2 - X^2 = 1$ , che il luogo dei punti  $V(\alpha, \beta, \gamma)$  da cui viene proiettata l'iperbole ha l'equazione

$$X^2 + 2Y^2 = -2;$$

esso, quindi, non è un luogo reale.

I calcoli relativi sono analoghi a quelli che si vedranno nel prossimo caso.

Poniamo allora  $\ell = 0$ . Il rapporto  $\frac{-\alpha\gamma}{\ell n}$  che figura nelle (10)<sub>2</sub> ci dice che deve essere  $\alpha = 0$  e  $\gamma \neq 0$ . Infatti se fosse  $\gamma = 0$  il punto  $V(\alpha, \beta, \gamma)$  appartenerebbe al piano su cui giace l'iperbole e proiettando questa conica dal punto  $V$  si avrebbe un cono degenerare nel piano  $xy$  contato due volte.

Per  $\ell = 0$  e  $\alpha = 0$  la seconda delle (10) diventa

$$\frac{\gamma^2}{\rho} = \frac{-\gamma^2}{\rho + m^2} = \frac{1 - \beta^2}{\rho + n^2} = \frac{\beta\gamma}{mn}.$$

Si ricava (11)  $\rho + m^2 = -\rho$ ,  $\frac{\gamma^2}{\rho} = \frac{1 - \beta^2}{\rho + n^2}$ ,  $\frac{\gamma^2}{\rho} = \frac{\beta\gamma}{mn}$ .

Da cui  $\rho = -\frac{m^2}{2}$ ,  $mn = \rho \frac{\beta}{\gamma}$  cioè  $mn = -\frac{m^2}{2} \frac{\beta}{\gamma}$ ;

quindi  $n = -\frac{m\beta}{2\gamma}$ . Dalla (11)<sub>2</sub> si ha:  $\frac{\gamma^2}{\rho}(\rho + n^2) = 1 - \beta^2$

e sostituendo in essa le espressioni di  $\rho$  ed  $n$  si ottiene

$$\gamma^2 \left( -\frac{2}{m^2} \right) \cdot \left( -\frac{m^2}{2} + \frac{m^2\beta^2}{4\gamma^2} \right) = 1 - \beta^2$$

$$-\frac{2\gamma^2(-2m^2\gamma^2 + m^2\beta^2)}{4m^2\gamma^2} = 1 - \beta^2 \quad \rightarrow \quad 2\gamma^2 - \beta^2 = 2 - 2\beta^2$$

Infine (12)  $\beta^2 + 2\gamma^2 = 2$ ,  $\alpha = 0$ .

Poiché siamo nello spazio  $XYZ$ , possiamo sostituire, come è d'uso, le lettere  $\alpha, \beta, \gamma$  con  $X, Y, Z$ ; si ottiene così l'equazione cartesiana del luogo  $L_2$  da cui l'iperbole  $Y^2 - X^2 = 1$  è proiettata secondo un cono rotondo. Essa è

$$(13) \quad Y^2 + 2Z^2 = 2, \quad X = 0.$$

Poiché  $\ell = 0$  ed  $n = -m\beta/2\gamma$ , la retta  $\ell x_1 + mx_2 + nx_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$  assume le equazioni

$$\begin{cases} mx_2 - m\frac{\beta}{2\gamma}x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2\gamma x_2 - \beta x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Come si vede, la retta che passa per i punti di contatto delle coniche  $A_\infty$  e  $C_\infty$  del piano improprio  $x_4 = 0$  è reale.

Tenendo presente che abbiamo posto

$$\begin{aligned} x &= X, & y &= 2 + Y, & z &= Z \\ \text{si ricava:} & & X &= x, & Y &= y - 2, & Z &= z. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (13) si ottiene l'equazione del luogo  $L_2$  nel riferimento  $Oxyz$ : si ha

$$(*) \quad (y-2)^2 + 2z^2 = 2, \quad \text{ossia} \quad (14) \quad y^2 + 2z^2 - 4y + 2 = 0, \quad x=0.$$

Conclusione: il luogo dei punti dello spazio da cui l'iperbole equilatera

$C: x^2 - y^2 + 4y - 3 = 0, z = 0$  è proiettata secondo un cono rotondo è l'ellisse  $L_2$  di equazione  $y^2 + 2z^2 - 4y + 2 = 0, x = 0$ .

Da questa curva vanno esclusi i due punti di coordinata  $z = 0$  che si ottengono come soluzione del sistema

$$x = 0, \quad z = 0, \quad y^2 - 4y + 2 = 0.$$

Tali punti appartengono infatti al piano dell'iperbole

$$C: x^2 - y^2 + 4y - 3 = 0$$

e quindi proiettano la conica stessa secondo un cono degenerare in due piani sovrapposti.

Si riconosce subito che i due punti hanno le coordinate

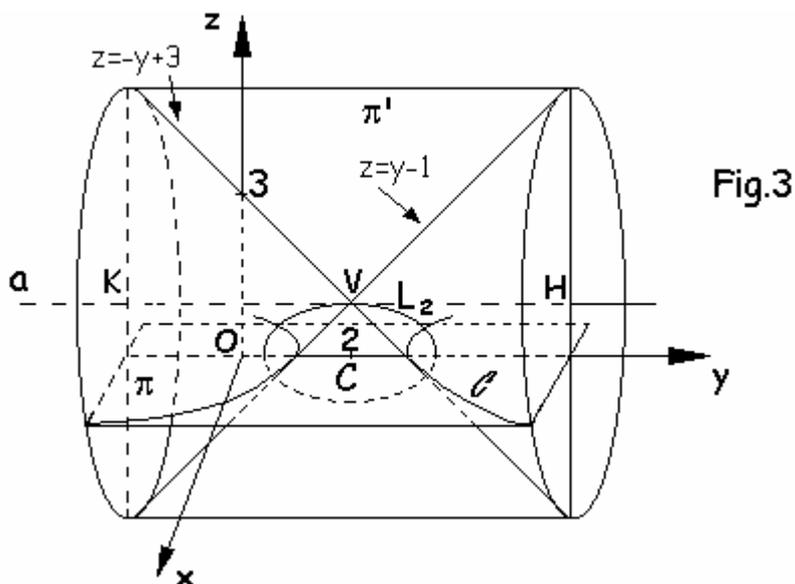
$(0, 2 - \sqrt{2}, 0)$ ,  $(0, 2 + \sqrt{2}, 0)$  e rappresentano i vertici dell'ellisse  $L_2$ .

Essa è detta ellisse focale dell'iperbole (Fig. 3). Tale denominazione è giustificata da quanto segue.

I piani su cui giacciono le due coniche sono i piani coordinati  $xy$  e  $yz$ , e quindi sono fra loro perpendicolari. L'ellisse  $L_2$  interseca il piano  $xy$  nei punti  $A_1(0; 2 - \sqrt{2})$  e  $A_2(0; 2 + \sqrt{2})$  dell'asse  $y$ . Essi sono gli estremi dell'asse maggiore dell'ellisse e coincidono con i fuochi

$F_1(0; 2 - \sqrt{2})$ ,  $F_2(0; 2 + \sqrt{2})$  dell'iperbole  $C$ . Le due coniche hanno come centro il medesimo punto  $C(0; 2)$ .

Ultimo: il semiasse minore dell'ellisse,  $b = 1$ , è uguale al semiasse non trasverso dell'iperbole :



Accanto all'ellisse  $L_2$  ricordiamo l'ellisse  $L_1: y^2 + 2z^2 = 2$ ,  $x = 0$ .

Nel primo paragrafo abbiamo visto che  $L_1$  è il luogo dei vertici  $V(0, \beta, \gamma)$  dei coni circoscritti ad una data sfera, aventi il vertice nel piano  $yz$  e le cui intersezioni con il piano  $xy$  siano delle iperboli equilateri. Come si vede i due luoghi  $L_1$  ed  $L_2$ , pur rappresentando due ellissi luogo di vertici di coni rotondi, sono diverse fra loro. Ciò ha una semplice spiegazione.

Ad  $L_1$  corrispondono i vertici dei coni rotondi che soddisfano alle condizioni appena ricordate e che hanno per sezioni iperboli equilateri del piano  $xy$ . Ad  $L_2$ , invece, corrispondono i vertici dei coni rotondi che hanno per sezioni la sola iperbole equilatera  $C: x^2 - y^2 + 4y - 3 = 0$  dello stesso piano  $xy$ .

### Bibliografia

LUIGI CAMPEDELLI, Lezioni di geometria, vol. I – CEDAM – Bologna.

FABIO CONFORTO, Esercizi di Geometria Analitica – Edizioni Universitarie, Roma.

# SEZIONI CIRCOLARI DI PARTICOLARI QUADRICHE

## Sunto

Tra le quadriche non rotonde, gli ellissoidi, gli iperboloidi, i paraboloidi ellittici, i coni e i cilindri ellittici hanno la particolare proprietà di ammettere infinite sezioni circolari, distribuite secondo due fasci impropri di piani. Nel presente articolo si spiega il procedimento che consente di trovare tali fasci e le equazioni delle circonferenze che i piani producono con le loro intersezioni. Di alcune circonferenze viene determinato il raggio.

### n. 1 – Sezioni circolari di un ellissoide.

Dato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico  $Oxyz$ , consideriamo l'ellissoide  $Q$  di equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{1} = 1$$

Passando a coordinate omogenee possiamo scrivere

$$(1) \quad x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 = 4x_4^2 .$$

Esistono due fasci di piani paralleli che intersecano l'ellissoide secondo circonferenze irriducibili; ne considereremo uno solo.

Il Prof. L. Campedelli, ([1], pag. 407), dimostra chiaramente che, nel caso di un ellissoide di equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a > b > c ,$$

i due fasci di piani sono dati dalle equazioni

$$x\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} = \pm z\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} + k .$$

Vogliamo riproporre l'argomento perché il metodo seguito nel presente articolo non richiede che l'equazione della quadrica sia ridotta a forma canonica, come si può vedere nei due esempi che proporranno.

Troviamo i quattro punti impropri, a due a due complessi coniugati, comuni al circolo assoluto  $A_\infty$  dello spazio e alla conica  $C_\infty$  della quadrica.

Si tratta evidentemente di quattro punti ciclici  $A, \bar{A}$  e  $B, \bar{B}$ . Per la coppia di punti impropri  $A, \bar{A}$  (o  $B, \bar{B}$ ) passano infiniti piani reali e paralleli, che formano un fascio

improprio. Quando si interseca la quadrica  $Q$  con uno di questi piani, si ha una conica  $\gamma$  i cui punti impropri sono i punti ciclici  $A$  e  $\bar{A}$ , quindi  $\gamma$  è una circonferenza.

Conclusione:

le rette  $A\bar{A}$  e  $B\bar{B}$  danno origine a due giaciture distinte di sezioni circolari della nostra quadrica.

Evidentemente, quando i due fasci di piani coincidono, la quadrica diviene rotonda; ma non è questo il caso dell'ellissoide (1).

Intersechiamo ora il circolo assoluto  $A_\infty$  dello spazio con la conica  $C_\infty$  della quadrica. Si ha il sistema

$$(2) \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 = 4x_4^2, \quad x_4 = 0 \end{cases} .$$

Dalla prima equazione si ricava  $x_1^2 = -x_2^2 - x_3^2$ ; sostituendo nella seconda e tenendo presente che  $x_4 = 0$ , si ottiene:

$$x_2^2 + 3x_3^2 = 0; \quad \text{quindi} \quad x_3 = 1 \quad x_2 = \pm i\sqrt{3} .$$

Sostituendo i valori di  $x_2$  e  $x_3$  nella prima equazione del sistema si ha  $x_1 = \pm\sqrt{2}$ .

Si hanno così i quattro punti impropri, a due a due complessi coniugati e ciclici:

$$A(\sqrt{2}, i\sqrt{3}, 1, 0), \bar{A}(\sqrt{2}, -i\sqrt{3}, 1, 0), B(-\sqrt{2}, i\sqrt{3}, 1, 0), \bar{B}(-\sqrt{2}, -i\sqrt{3}, 1, 0).$$

Consideriamo ora un generico piano dello spazio di equazione

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0,$$

e imponiamo la condizione che esso passi per i punti  $A, \bar{A}$ , cioè che esso abbia la giacitura data dalla retta impropria  $A\bar{A}$ . Si ha il sistema

$$(3) \quad \begin{cases} \sqrt{2}a + i\sqrt{3}b + c = 0 \\ \sqrt{2}a - i\sqrt{3}b + c = 0 \end{cases} .$$

Si ricava  $2i\sqrt{3}b = 0$ . Quindi la soluzione del sistema è

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad d \text{ indeterminato}$$

Si ha il fascio di piani, paralleli all'asse  $y$ , di equazione

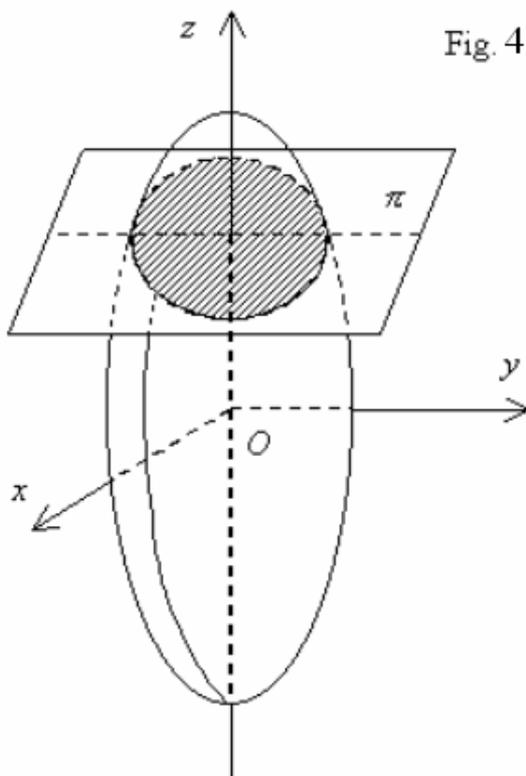
$$x_1 - \sqrt{2}x_3 + dx_4 = 0$$

cioè (4)  $x - \sqrt{2}z + d = 0$ .

Come abbiamo spiegato nei richiami di teoria, essi intersecano l'ellissoide secondo circonferenze (vedi fig. 4).

Per  $d = 0$  si ha il piano  $\pi$  passante per l'origine  $O(0,0,0)$ . Esso interseca la quadrica  $Q$  secondo la conica  $\gamma$  di equazioni

$$(5) \quad x - \sqrt{2}z = 0, \quad x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4 \dots$$



La conica è una circonferenza: essa, infatti, interseca la retta impropria del piano  $\pi$  nei punti  $A$  e  $\bar{A}$ , che sono punti ciclici in quanto appartengono al circolo assoluto  $A_\infty$  dello spazio.

Il raggio  $R$  di questa circonferenza è uguale al raggio del cilindro circolare retto perpendicolare al piano  $\pi$  e avente come sezione sul piano stesso la circonferenza  $\gamma$ . Le generatrici di questo cilindro hanno i coefficienti direttori della generica normale al piano  $\pi$ , che sono

$$\ell = 1, \quad m = 0, \quad n = -\sqrt{2}.$$

Pertanto se indichiamo con  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  un generico punto della circonferenza  $\gamma$ , la generatrice passante per tale punto ha le equazioni

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{z - z_0}{-\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = y_0.$$

Per trovare l'equazione del cilindro basta eliminare  $x_0, y_0, z_0$  fra le equazioni del seguente sistema:

$$(6) \quad \begin{cases} x - x_0 = \frac{z - z_0}{-\sqrt{2}}, & y = y_0 \\ x_0 = \sqrt{2}z_0, & x_0^2 + 2y_0^2 + 4z_0^2 = 4. \end{cases}$$

Dalle prime tre uguaglianze si ha

$$(7) \quad x_0 = \frac{1}{3}(\sqrt{2}z + 2x) \quad , \quad y_0 = y \quad , \quad z_0 = \frac{1}{3}(z + \sqrt{2}x) \quad .$$

Sostituendo le espressioni (7) nella quarta relazione del sistema si ricava l'equazione del cilindro:

$$\frac{1}{9}(\sqrt{2}z + 2x)^2 + 2y^2 + \frac{4}{9}(z + \sqrt{2}x)^2 = 4 \quad ,$$

$$2z^2 + 4x^2 + 4\sqrt{2}xz + 18y^2 + 4z^2 + 8x^2 + 8\sqrt{2}xz - 36 = 0 \quad ,$$

da cui (8)  $2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2\sqrt{2}xz - 6 = 0 \quad .$

Possiamo trovare il raggio del cilindro con il seguente ragionamento.

Il punto  $P(\sqrt{3}, 0, 0)$  appartiene alla superficie del cilindro e la generatrice  $g$  passante per esso è

$$\frac{x - \sqrt{3}}{1} = \frac{z - 0}{-\sqrt{2}} \quad , \quad y = 0 \quad .$$

Intersecando il cilindro con il piano  $xy$  si ha l'ellisse di equazione

$$2x^2 + 3y^2 = 6 \quad , \quad z = 0 \quad .$$

Il centro dell'ellisse è il punto  $O(0,0,0)$ , che appartiene anche all'asse del cilindro. Ciò ci permette di dire che il raggio  $R$  della circonferenza  $\gamma$  è uguale alla distanza del punto  $O$  dalla generatrice  $g$ . Teniamo ora presente che la distanza di un punto  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  dalla retta di equazioni

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

è data dalla formula 
$$d^2 = \frac{\left\| \begin{matrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ \ell & m & n \end{matrix} \right\|^2}{\ell^2 + m^2 + n^2} \quad .$$

Questa formula ci permette quindi di ricavare il raggio  $R$  della circonferenza  $\gamma$ . Procedendo nei calcoli si ha

$$R^2 = \frac{\left\| \begin{matrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{matrix} \right\|^2}{1 + 0 + 2} = \frac{(\sqrt{6})^2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad , \quad \text{quindi} \quad R = \sqrt{2} \quad .$$

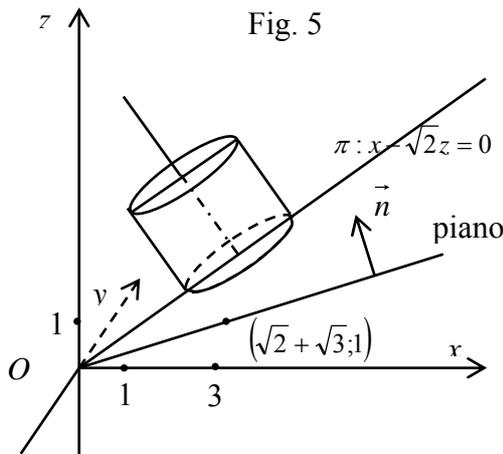
Notiamo, per inciso, che il raggio della circonferenza  $\gamma$  coincide con il semiasse dell'ellissoide di lunghezza  $b = \sqrt{2}$ .

**Nota.** C'è un altro procedimento, poco noto ma veramente interessante, che ci permette di dimostrare che la conica  $\gamma$  di equazioni

$$x - \sqrt{2}z = 0, \quad x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$$

è una circonferenza. Esso consiste nel ribaltare la conica sul piano  $xy$ ; in tal modo possiamo studiare più facilmente la curva  $C$  che così si ottiene.

Indichiamo le tappe di questo procedimento, che è illustrato nella fig. 5.



1) Si trova il piano  $\beta$  che divide in parti uguali il diedro avente come sezione normale l'angolo acuto formato dalle rette  $x - \sqrt{2}z = 0$  e  $z = 0$  del piano  $xz$ .

Si ha  $\beta: x - (\sqrt{2} + \sqrt{3})z = 0$ .

2) Si trovano i parametri direttori della normale al piano  $\beta$ ; essi sono:

$$\ell = 1, \quad m = 0, \quad n = -(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

3) Si trova l'equazione del cilindro  $\Sigma$  le cui generatrici si appoggiano alla conica  $\gamma$  ed hanno i parametri direttori  $\ell, m, n$  sopra scritti.

Ciò porta a risolvere il sistema

$$(a) \begin{cases} x - x_0 = \frac{z - z_0}{-(\sqrt{2} + \sqrt{3})}, & y = y_0 \\ x_0 - \sqrt{2}z_0 = 0, & x_0^2 + 2y_0^2 + 4z_0^2 = 4, \end{cases}$$

ove  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  è un punto generico di  $\gamma$ . Dalle prime tre relazioni del sistema (a) si ricava

$$x_0 = \frac{3 - \sqrt{6}}{3} [(2 + \sqrt{6})x + \sqrt{2}z], \quad y_0 = y, \quad z_0 = \frac{3 - \sqrt{6}}{3} [(\sqrt{2} + \sqrt{3})x + z].$$

Sostituendo queste nell'ultima relazione del sistema si trova, con l'aiuto di un computer, l'equazione del cilindro  $\Sigma$ . Essa è:

$$\Sigma: 2x^2 + 2y^2 + (10 - 4\sqrt{6})z^2 + 4(\sqrt{3} - \sqrt{2})zx - 4 = 0.$$

4) L'intersezione di questo cilindro  $\Sigma$  con il piano  $xy$  ( $z = 0$ ) è la conica  $C$  di equazione  $x^2 + y^2 = 2$  che si ottiene ribaltando la conica  $\gamma$  sul piano stesso. La  $C$  è una circonferenza di raggio  $r = \sqrt{2}$ ; quindi anche la conica  $\gamma$  (da cui si ottiene  $C$  per ribaltamento) è una circonferenza avente lo stesso raggio.

## n. 2 – Sezioni circolari di un iperboloide ad una falda.

Nel solito riferimento cartesiano Oxyz consideriamo la quadrica Q di equazione

$$(1) \quad x^2 + y^2 - z^2 + 2xz - 9 = 0 \quad \text{e la sua } C_\infty : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 = 0 .$$

Calcoliamone il determinante  $|A|$  e il discriminante  $A_{44}$  ; si trova:

$|A| = -9(-2) > 0$  ,  $A_{44} = -2 \neq 0$ . La quadrica, non degenera, è un iperboloide ad una falda. Ciò è confermato dal fatto che la  $C_\infty$  è una conica non degenera e reale: essa, infatti, contiene i punti reali  $(0; \pm 1; \pm 1; 0)$  e  $(2; \pm 1; -1; 0)$

Poiché nell'equazione (1) mancano i termini di primo grado, il centro dell'iperboloide coincide con l'origine O del riferimento cartesiano. Si nota subito che i piani paralleli al piano  $xy$ ,  $z = k$ , tagliano la Q secondo circonferenze.

Facciamo vedere, seguendo il procedimento generale illustrato nell'esercizio precedente, che esiste un altro fascio di piani paralleli che intersecano la Q secondo circonferenze e quindi la quadrica non è rotonda.

Troviamo i quattro punti impropri comuni al cerchio assoluto  $A_\infty$  dello spazio e alla conica  $C_\infty$  dell'iperboloide. Questi quattro punti impropri

$A, \bar{A}$  e  $B, \bar{B}$  sono complessi coniugati e ciclici poiché appartengono al cerchio assoluto  $A_\infty$ . Ne segue che le coniche - sezioni di Q - appartenenti ai piani che hanno la giacitura della retta impropria  $A\bar{A}$  (o  $B\bar{B}$ ) sono circonferenze.

Passiamo a coordinate omogenee e risolviamo il sistema

$$(2) \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 - 9x_4^2 = 0 \end{cases} , \quad x_4 = 0 .$$

Esso si spezza nei due sistemi

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases} , \quad x_4 = 0 \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases} , \quad x_4 = 0 .$$

Risolvendo i sistemi si trovano le due coppie di punti

$$A(1, i, 0, 0) \quad \bar{A}(1, -i, 0, 0) \quad B(1, i\sqrt{2}, 1, 0) \quad \bar{B}(1, -i\sqrt{2}, 1, 0).$$

Il fascio di piani passanti per la retta impropria  $A\bar{A}$  ha l'equazione  $z = k$ . Già abbiamo visto che questi piani tagliano la quadrica Q secondo circonferenze.

I piani che hanno la giacitura della retta  $B\bar{B}$  costituiscono il fascio improprio di equazione

$$x - z + d = 0 .$$

Per  $d = 0$  si ha il piano per il punto O (0,0,0), che coincide con il centro dell'iperboloide, ossia si ha il piano diametrale  $\pi : x - z = 0$ . Esso interseca la quadrica Q secondo la circonferenza  $\gamma$  di equazioni

$$(3) \quad x^2 + y^2 - z^2 + 2xz - 9 = 0 \quad , \quad x - z = 0 \quad .$$

Il raggio della circonferenza è uguale al raggio del cilindro circolare  $\Phi$  perpendicolare al piano  $\pi$  e che ha questa circonferenza come sezione normale.

Teniamo presente che le generatrici del cilindro hanno i parametri direttori della generica perpendicolare al piano  $\pi$ , quindi  $l=1$ ,  $m=0$ ,  $n=-1$ .

Pertanto, se  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  è un punto di  $\gamma$ , la generatrice passante per tale punto ha le equazioni

$$(4) \quad \frac{x-x_0}{1} = \frac{z-z_0}{-1} \quad \text{e} \quad y = y_0 \quad .$$

L'equazione del cilindro  $\Phi$  si ottiene eliminando  $x_0, y_0, z_0$  fra le equazioni del seguente sistema:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{x-x_0}{1} = \frac{z-z_0}{-1} \quad , \quad y = y_0 \\ x_0 = z_0 \quad , \quad x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 + 2x_0z_0 - 9 = 0 \quad . \end{cases}$$

Si ricava  $x+z = x_0+z_0$  e poiché  $x_0 = z_0$  ne segue

$$(6) \quad x_0 = z_0 = \frac{1}{2}(x+z) \quad , \quad y_0 = y \quad .$$

Sostituendo le espressioni di  $x_0, y_0, z_0$  nella quarta relazione del sistema (5) si ottiene l'equazione del cilindro  $\Phi$ :

$$\frac{1}{4}(x+z)^2 + y^2 - \frac{1}{4}(x+z)^2 + \frac{1}{2}(x+z)(x+z) - 9 = 0$$

quindi  $\Phi : x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 18 = 0 \quad .$

Il punto  $P(\sqrt{18}, 0, 0)$  appartiene alla superficie del cilindro. Un punto dell'asse è il centro dell'ellisse che si ottiene intersecando il cilindro con il piano  $xy$ ,  $z=0$ . Essa ha l'equazione

$$f(x,y) \equiv x^2 + 2y^2 - 18 = 0 \quad , \quad z = 0 \quad .$$

Il centro dell'ellisse è il punto  $O(0,0,0)$ ; come abbiamo detto, esso appartiene anche all'asse del cilindro.

Il raggio  $R$  del cilindro è uguale alla distanza del punto  $O$  dalla generatrice passante per il punto  $P$ , della quale conosciamo i parametri direttori  $l=1$ ,  $m=0$ ,  $n=-1$ . Ricordiamo, dalla Geometria Analitica, la formula della distanza punto-retta nello spazio

$$d^2 = \frac{\left\| \begin{matrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ \ell & m & n \end{matrix} \right\|^2}{\ell^2 + m^2 + n^2} .$$

Nel nostro caso il punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  coincide con il punto  $O(0, 0, 0)$  mentre il punto  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  coincide con  $P(\sqrt{18}, 0, 0)$ . Applicando la formula si ha

$$d^2 = \frac{\left\| \begin{matrix} \sqrt{18} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \right\|^2}{1+1} = \frac{\left| \begin{matrix} \sqrt{18} & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right|^2}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad \text{quindi } d = R = 3 .$$

Il centro della circonferenza  $\gamma$  si ottiene intersecando l'asse del cilindro ( $x = -z$ ,  $y = 0$ ) con il piano  $x - z = 0$ . Si ha la soluzione  $x = y = z = 0$ . Pertanto il centro di  $\gamma$  coincide con l'origine  $O(0, 0, 0)$  del riferimento cartesiano.

Possiamo ripetere lo studio per l'iperboloide ad una falda di equazione  $x^2 + y^2 - 3z^2 + 4xz - 2yz - 9 = 0$ . Si trova che i fasci di piani che lo intersecano secondo circonferenze sono  $z = k$  e  $2x - y - 2z + h = 0$ .

### n. 3 – Sezioni circolari dei coni e dei cilindri ellittici

a) - Troviamo (fig. 6) l'equazione del cono di vertice  $V(0, 0, 2)$  le cui generatrici si appoggiano alla circonferenza  $\gamma$ , del piano  $xy$ , di equazioni

$$(1) \quad (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 1, \quad z = 0 .$$

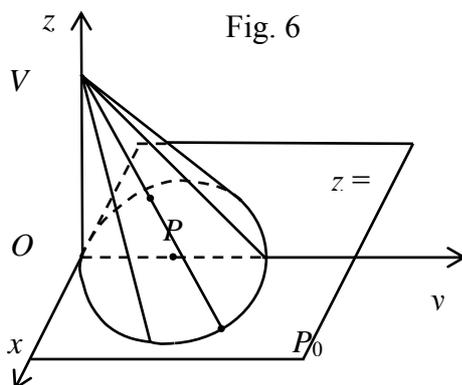


Fig. 6

Mostreremo che il cono non è rotondo. Infatti, seguendo il procedimento che ci ha consentito di trovare le sezioni circolari di una quadrica, troveremo che esistono due fasci di piani che intersecano il cono secondo circonferenze. Vedremo precisamente che i due fasci hanno le equazioni

$$z = k \quad \text{e} \quad y = z + h .$$

Troviamo l'equazione del cono, che indicheremo con la lettera  $\Phi$ . Sia  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , ove  $z_0 = 0$ , un generico punto della circonferenza  $\gamma$  e sia  $P(x, y, z)$  un punto della generatrice passante per tale punto  $P_0$ . L'equazione della generatrice è

$$(1) \quad \frac{x-0}{x_0-0} = \frac{y-0}{y_0-0} = \frac{z-2}{z_0-2} \rightarrow \text{da cui } \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z-2}{z_0-2} .$$

L'equazione del cono si ottiene eliminando  $x_0, y_0, z_0$  fra le equazioni del sistema

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z-2}{z_0-2} \\ z_0 = 0, \quad x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 = 0 . \end{cases}$$

Si ricava  $x_0 = \frac{2x}{2-z}, \quad y_0 = \frac{2y}{2-z}, \quad z_0 = 0 .$

Sostituendo le espressioni di  $x_0, y_0, z_0$  nell'ultima relazione del sistema (2) si ha

$$\frac{4x^2}{(2-z)^2} + \frac{4y^2}{(2-z)^2} - \frac{4y}{2-z} = 0 .$$

Da cui  $x^2 + y^2 - y(2-z) = 0$  e quindi  $x^2 + y^2 + yz - 2y = 0 .$

In coordinate omogenee l'equazione del cono  $\Phi$  è:

$$3) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_2x_3 - 2x_2x_4 = 0 .$$

I piani che intersecano il cono secondo circonferenze sono distribuite in uno o due fasci impropri. Troviamo l'equazione dei due fasci.

A tale scopo troviamo i quattro punti impropri, a due a due complessi coniugati, comuni al circolo assoluto  $A_\infty$  dello spazio e alla conica  $C_\infty$  del cono. Si tratta

evidentemente di quattro punti ciclici  $A, \bar{A}$  e  $B, \bar{B}$  .

Per la coppia di punti impropri  $A, \bar{A}$  (o  $B, \bar{B}$ ) passano infiniti piani reali e paralleli, che formano un fascio improprio. Quando si interseca il cono  $\Phi$  con uno di questi piani si ha una conica  $\gamma$  i cui punti impropri sono i punti ciclici  $A, \bar{A}$ ; quindi  $\gamma$  è una circonferenza.

Conclusione: le rette  $A\bar{A}$  e  $B\bar{B}$  danno origine a due giaciture distinte di sezioni circolari del nostro cono  $\Phi$  . Evidentemente se i due fasci di piani coincidono il cono è rotondo. Nel nostro caso vedremo che i fasci sono distinti e quindi il cono non è rotondo.

Passiamo dalla teoria all'esercizio e troviamo i punti comuni al circolo assoluto  $A_\infty$  dello spazio e alla conica all'infinito  $C_\infty$  del cono risolvendo il sistema

$$4) \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_2x_3 - 2x_2x_4 = 0 \quad \text{e} \quad x_4 = 0 . \end{cases}$$

Dalla (4)<sub>1</sub> si ha  $x_1^2 + x_2^2 = -x_3^2$  . Sostituendo nella (4)<sub>2</sub> e tenendo presente che

$x_4 = 0$  si ha

$$-x_3^2 + x_2x_3 = 0, \quad \text{da cui} \quad x_3(x_3 - x_2) = 0.$$

Il sistema (4) si spezza nei due sistemi

$$(a) \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0. \end{cases}$$

Sistema (a):  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \pm i$ ,  $x_3 = x_4 = 0$ .

La soluzione è la coppia di punti  $A(1, i, 0, 0)$ ,  $\bar{A}(1, -i, 0, 0)$ .

Sistema (b). Subito si ottiene  $x_1^2 + 2x_2^2 = 0$ ;

Posto  $x_2 = 1$ , si ha  $x_3 = 1$ ,  $x_1 = \pm i\sqrt{2}$ ,  $x_4 = 0$ .

Abbiamo l'altra coppia di punti di intersezione

$$B(i\sqrt{2}, 1, 1, 0) \quad \bar{B}(-i\sqrt{2}, 1, 1, 0).$$

I piani che intersecano il cono  $\Phi$  secondo circonferenze sono quelli che hanno la giacitura per la retta impropria  $A\bar{A}$  o la giacitura della retta impropria  $B\bar{B}$ . Essi costituiscono i due fasci impropri di piani.

Troviamo l'equazione del primo fascio ricordando che l'equazione di un generico piano nello spazio è

$$(5) \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0.$$

Imponendo il passaggio per i punti  $A$  e  $\bar{A}$  si ha il sistema

$$\begin{cases} a + ib + 0 + 0 = 0 \\ a - ib + 0 + 0 = 0. \end{cases}$$

Per i coefficienti del piano troviamo:  $a = b = 0$ ,  $c$  e  $d$  indeterminati.

L'equazione del primo fascio di piani è

$$cx_3 + dx_4 = 0 \quad \text{ossia} \quad (6) \quad z = k.$$

Come verifica, vediamo subito che i piani  $z = k$  intersecano il cono

$$x^2 + y^2 + yz - 2y = 0 \quad \text{secondo le circonferenze di equazione}$$

$$x^2 + y^2 + (k - 2)y = 0, \quad z = k.$$

Imponiamo ora la condizione che il piano (5) passi per i punti  $B(i\sqrt{2}, 1, 1, 0)$  e

$\bar{B}(-i\sqrt{2}, 1, 1, 0)$ . Si ha il sistema risolvente

$$\begin{cases} i\sqrt{2}a + b + c + 0 = 0 \\ -i\sqrt{2}a + b + c + 0 = 0 \end{cases} .$$

Soluzione:  $a = 0$ ,  $c = -b$ ,  $d$  indeterminato.

L'equazione del fascio di piani è  $bx_2 - bx_3 + dx_4 = 0$ .

In coordinate non omogenee si ha

$$y - z - k = 0 \quad \text{ossia} \quad y = z + k .$$

Le equazioni  $z = k$  e  $y = z + k$  ci dicono che i due fasci di piani paralleli che intersecano il cono  $\Phi$  secondo circonferenze sono distinti; quindi il cono  $x^2 + y^2 + y(z - 2) = 0$  non è rotondo. Solo quando i due fasci di piani paralleli coincidono il cono è rotondo.

b) – Consideriamo infine il cilindro ellittico avente l'asse coincidente con l'asse  $z$  e di equazione  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ .

I punti comuni al circolo assoluto  $A_\infty$  dello spazio e alla conica  $C_\infty$  del cilindro sono

$$\begin{aligned} & A(i\sqrt{2}, 1, 1, 0) , \quad \bar{A}(-i\sqrt{2}, 1, 1, 0) \\ \text{e} & B(i\sqrt{2}, -1, 1, 0) , \quad \bar{B}(-i\sqrt{2}, -1, 1, 0) . \end{aligned}$$

I fasci impropri di piani che passano per le due coppie di punti sono

$$y = z + k \quad \text{e} \quad y = -z + h .$$

Come abbiamo detto negli altri esempi, questi piani intersecano il cilindro secondo circonferenze. Si vede subito che essi sono paralleli all'asse  $x$  e che le loro tracce sul piano  $yz$  hanno i coefficienti angolari  $m = \pm 1$ .

#### n. 4 – Studio di un cilindro

Data la quadrica  $\Phi$  di equazione

$$(1) \quad 2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2\sqrt{2}xz - 6 = 0$$

dimostrare che essa è un cilindro e trovare i vari elementi di questo.

Troviamo i valori dei determinanti  $A$  e  $A_{44}$  della quadrica. Si ha:

$$(1) \quad A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6(6-6) = 0 .$$

Poiché  $A = 0$  la quadrica è degenera e quindi può essere un cono, un cilindro o una quadrica spezzata in due piani.

$$(1) \quad A_{44} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6-6, \quad A_{44} = 0 .$$

Poiché  $A = 0$  e  $A_{44} = 0$ , la quadrica è un cilindro; ne segue che la sua conica  $C_\infty$  (che si ottiene intersecando la quadrica con il piano improprio  $x_4 = 0$ ) si spezzerà in due rette parallele alle generatrici del cilindro stesso.

In coordinate omogenee si ha:

$$(2) \quad C_\infty : 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2\sqrt{2} \cdot x_1x_3 = 0, \quad x_4 = 0 .$$

$$(\sqrt{2}x_1 + x_3)^2 + 3x_2^2 = 0 \quad x_4 = 0 ,$$

$$(*) \quad (\sqrt{2}x_1 + x_3 + i\sqrt{3}x_2) \cdot (\sqrt{2}x_1 + x_3 - i\sqrt{3}x_2) = 0, \quad x_4 = 0 .$$

Si ricava

$$(3) \quad 1^a \text{ retta} \quad \sqrt{2}x_1 + x_3 + i\sqrt{3}x_2 = 0, \quad x_4 = 0 ;$$

$$(3') \quad 2^a \text{ retta} \quad \sqrt{2}x_1 + x_3 - i\sqrt{3}x_2 = 0 \quad x_4 = 0$$

La (3) [e la 3'] rappresenta un numero complesso nullo, quindi per esso deve essere nulla sia la parte reale che la parte immaginaria. Si avrà pertanto:

$$(4) \quad \sqrt{2} \cdot x_1 + x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = 0 .$$

Si ha la soluzione

$$(*) \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -\sqrt{2}, \quad x_4 = 0 .$$

Ne segue che le generatrici del cilindro hanno il punto improprio

$$(5) \quad Q_\infty(1, 0, -\sqrt{2}, 0) .$$

Le (4) sono le equazioni di una retta del piano improprio  $x_4 = 0$ . I parametri di questa retta sono anche i parametri direttori delle generatrici del cilindro. Passando ai calcoli si ha:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_3}{-\sqrt{2}}, \quad x_2 = 0.$$

Da questa si ricava che i parametri direttori sono

$$l = 1, \quad m = 0, \quad n = -\sqrt{2}.$$

Vediamo ora se il cilindro  $\Phi$  è rotondo. A tale scopo intersechiamo anzitutto il circolo assoluto  $A_\infty$  dello spazio con la conica  $C_\infty$  della quadrica. Passando a coordinate omogenee si ha il sistema:

$$(6) \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 6x_4^2 = 0, \quad x_4 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha  $x_2^2 = -x_1^2 - x_3^2$ . Sostituendo nella seconda equazione del sistema, e tenendo presente che  $x_4 = 0$ , si ottiene:

$$(*) \quad \begin{aligned} 2x_1^2 - 3x_1^2 - 3x_3^2 + x_3^2 + 2\sqrt{2} \cdot x_1x_3 &= 0, \\ -x_1^2 - 2x_3^2 + 2\sqrt{2} \cdot x_1x_3 &= 0, \\ (7) \quad x_1^2 - 2\sqrt{2} \cdot x_1x_3 + 2x_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

L'equazione (7) si può scrivere nella forma

$$(8) \quad \left( \frac{x_1}{x_3} \right)^2 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{x_1}{x_3} + 2 = 0,$$

da cui 
$$\frac{x_1}{x_3} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2-2};$$

si ha la **soluzione doppia** 
$$\frac{x_1}{x_3} = \sqrt{2}.$$

Ponendo  $x_3 = 1$  si ha  $x_1 = \sqrt{2}.$

Ricordando poi che  $x_2^2 = -x_1^2 - x_3^2$  si ottiene  $x_2^2 = -2 - 1$ ,  
cioè  $x_2^2 = -3$ , da cui  $x_2 = \pm i\sqrt{3}.$

Si hanno così 4 punti impropri, complessi coniugati e ciclici:  $A, \bar{A}$  e  $B, \bar{B}$ . Essi coincidono due a due poiché la (8) ha radici coincidenti; quindi la  $C_\infty$  è bitangente al

circolo assoluto dello spazio nei punti

$$A \equiv B(\sqrt{2}, i\sqrt{3}, 1, 0) \quad \text{e} \quad \bar{A} \equiv \bar{B}(\sqrt{2}, -i\sqrt{3}, 1, 0) .$$

I piani che passano per i due punti impropri  $A$  e  $\bar{A}$ , cioè che hanno la giacitura della retta impropria  $A\bar{A}$  (o  $B\bar{B}$ ) **formano un fascio di piani paralleli che intersecano il cilindro secondo sezioni circolari.**

Poiché c'è un solo fascio di piani paralleli che forma queste sezioni circolari, possiamo dire che **il cilindro  $\Phi$  è rotondo.**

Troviamo l'equazione di questo fascio ricordando che la generica equazione di un piano è

$$(9) \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 .$$

Imponendo il passaggio per i due punti impropri complessi coniugati  $A$  e  $\bar{A}$  si ha il sistema:

$$(10) \quad \begin{cases} \sqrt{2}a + i\sqrt{3}b + c + 0 = 0 \\ \sqrt{2}a - i\sqrt{3}b + c + 0 = 0 . \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha

$$(*) \quad 2\sqrt{2}a + 2c = 0 ,$$

quindi  $b = 0$ ,  $\sqrt{2}a + c = 0$  mentre  $d$  resta indeterminato.

Ponendo  $a = 1$ , la soluzione del sistema (10) è:

$$(11) \quad a = 1, \quad b = 0, \quad c = -\sqrt{2}, \quad d = \text{indeterminato}.$$

L'equazione del fascio di piani di piani paralleli aventi la giacitura della retta impropria  $A\bar{A}$  (o  $B\bar{B}$ ) è quindi

$$(*) \quad x_1 - \sqrt{2}x_3 + dx_4 = 0, \quad \text{ossia} \quad (12) \quad x - \sqrt{2}z + d = 0 .$$

Come abbiamo già detto, i piani di questo fascio intersecano il cilindro secondo sezioni circolari. Poiché il fascio di piani è unico, il cilindro  $\Phi$  è rotondo.

Ora, le rette perpendicolari al piano  $ax + by + cz + d = 0$  hanno i parametri direttori  $a, b, c$ ; e poiché le generatrici del cilindro sono perpendicolari al piano

$x - \sqrt{2}z + d = 0$ , ne segue analogamente che esse hanno i parametri direttori

$$\ell = 1, \quad m = 0, \quad n = -\sqrt{2} .$$

**Si ritrova così un risultato già ottenuto.**

Se ora intersechiamo il cilindro (1) con il piano  $xy$  ( $z = 0$ ) otteniamo una ellisse  $\gamma$  il cui centro  $C$  appartiene all'asse del cilindro.

Su questa ellisse è facile trovare un punto  $P(x_P, y_P, 0)$ , per il quale passa una generatrice del cilindro. Di questa generatrice già conosciamo i parametri direttori  $\ell, m, n$  e quindi possiamo scrivere comodamente la sua equazione

$$(*) \quad \frac{x - x_P}{\ell} = \frac{y - y_P}{m} = \frac{z - 0}{n} .$$

La distanza del punto  $C$  dalla generatrice  $g$  ci dà il raggio del cilindro. Procedendo nei calcoli si ha:

$$\text{Ellisse } \gamma : \quad 2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2\sqrt{2} \cdot xy - 6 = 0, \quad z = 0 ,$$

$$\text{quindi} \quad 2x^2 + 3y^2 = 6 .$$

Il centro  $C$  di questa ellisse è  $C(0,0,0)$ ; è facile vedere che essa passa per il punto  $P(\sqrt{3}, 0, 0)$ . L'equazione della generatrice passante per il punto  $P$  è:

$$(*) \quad \frac{x - \sqrt{3}}{1} = \frac{z - 0}{-\sqrt{2}}, \quad y = 0 .$$

La distanza del punto  $C \equiv 0(0,0,0)$  da questa generatrice è data dalla formula

$$(*) \quad d^2 = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} x_P - 0 & y_P - 0 & z_P - 0 \\ \ell & m & n \end{array} \right\|^2}{\ell^2 + m^2 + n^2} .$$

Nel nostro caso si ha:

$$(*) \quad d^2 = R^2 = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{array} \right\|^2}{1 + 0 + 2} ,$$

$$(*) \quad d^2 = R^2 = \frac{1}{3} \left\{ \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right|^2 \right\} ,$$

$$(*) \text{ ne segue} \quad d^2 = R^2 = \frac{1}{3} (-\sqrt{6})^2 = \frac{6}{3} = 2 .$$

$$\text{Si ottiene quindi} \quad R = \sqrt{2} .$$

Conclusione: la quadrica  $\Phi : 2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2\sqrt{2} \cdot xz - 6 = 0$  è un cilindro rotondo di

raggio  $R = \sqrt{2}$  e avente per asse la retta passante per l'origine  $O(0,0,0)$  del riferimento cartesiano e di equazione

$$(*) \quad \frac{x}{1} = \frac{z}{-\sqrt{2}}, \quad y = 0.$$

Per l'esattezza, questa retta passa per l'origine  $O$  del riferimento cartesiano, giace nel piano  $xz$  e attraversa il secondo e il quarto quadrante di tale piano.

### **n. 5 – Equazione del cilindro circoscritto ad una data sfera e con le generatrici di direzione assegnata**

Trovare l'equazione del cilindro circoscritto alla sfera di centro  $O(0,0,0)$ , raggio  $R = \sqrt{2}$

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$$

e le cui generatrici hanno i parametri direttori  $\ell = 1, m = 0, n = -\sqrt{2}$ .

Primo metodo di risoluzione.

Per i parametri direttori delle generatrici possiamo anche scrivere

$$(2) \quad \ell = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad m = 0, \quad n = 1;$$

ne segue che le generatrici hanno equazioni del tipo

$$(3) \quad \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}z + p \\ y = q \end{cases}.$$

Interseco la sfera con una generatrice e ordino l'equazione risolvente di 2° grado rispetto a  $z$ . Poiché la retta è tangente si avranno due soluzioni coincidenti e quindi il discriminante dell'equazione deve essere nullo.

Sostituendo le (3) nella (1) si ottiene

$$(*) \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}z + p\right)^2 + q^2 + z^2 - 2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}z^2 - \sqrt{2} \cdot pz + p^2 + q^2 + z^2 - 2 = 0,$$

$$z^2 - 2\sqrt{2} \cdot pz + 2p^2 + 2q^2 + 2z^2 - 4 = 0,$$

$$(4) \quad 3z^2 - 2\sqrt{2} \cdot pz + 2p^2 + 2q^2 - 4 = 0.$$

Poiché la (4) ha due radici coincidenti il suo discriminante deve essere nullo:

$$\begin{aligned} \Delta/4 = 0 \rightarrow & \quad 2p^2 - 3(2p^2 + 2q^2 - 4) = 0, \\ & \quad 2p^2 - 6p^2 - 6q^2 + 12 = 0, \\ & \quad -4p^2 - 6q^2 + 12 = 0 \\ (5) \quad & \quad 2p^2 + 3q^2 - 12 = 0. \end{aligned}$$

Ricavando p e q dalle equazioni (3), abbiamo:

$$(*) \quad p = x + \frac{\sqrt{2}}{2}z, \quad q = y.$$

Sostituendo nella (5) si ottiene:

$$2\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)^2 + 3y^2 - 6 = 0,$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{2}z^2 + \sqrt{2} \cdot xz\right) + 3y^2 - 6 = 0,$$

$$2x^2 + z^2 + 2\sqrt{2} \cdot xz + 3y^2 - 6 = 0,$$

e quindi  $2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2\sqrt{2} \cdot xz - 6 = 0.$

Secondo metodo di risoluzione.

Le generatrici del cilindro passano per il punto improprio dello spazio

$Q_\infty(1, 0, -\sqrt{2}, 0)$ , che è anche il vertice improprio del cilindro.

Ora un cono, in particolare un cilindro, circoscritto alla quadrica

$$(*) \quad f(P) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

dal punto  $Q(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$  ha l'equazione generale

$$(*) \quad [f(P, Q)]^2 - f(P) \cdot f(Q) = 0.$$

Ricordiamo che si ha:

$$f(P, Q) =$$

$$\begin{aligned} &= (a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + a_{14}x'_4) + (a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + a_{24}x'_4)x_4 + \\ &+ (a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + a_{34}x'_4)x_3 + (a_{41}x'_1 + a_{42}x'_2 + a_{43}x'_3 + a_{44}x'_4)x_4. \end{aligned}$$

Nel nostro caso si hanno le relazioni (3) seguenti:

$$(3) \quad f(P) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2,$$

$$(*) \quad Q(1, 0, -\sqrt{2}, 0), \quad f(Q) = 1 + 0 + 2 - 0 = 3,$$

$$(*) \quad \begin{aligned} f(P, Q) &= (1 + 0 + 0 + 0)x_1 + (0 + 1 \cdot 0 + 0 + 0)x_2 + \\ &+ [0 + 0 + 1(-\sqrt{2}) + 0]x_3 + [0 + 0 + 0 + 2 \cdot 0]x_4; \end{aligned}$$

quindi  $f(P, Q) = x_1 - \sqrt{2} \cdot x_3$ .

Sostituendo queste espressioni nell'equazione (2) si ha, in coordinate non omogenee:

$$\begin{aligned} (*) \quad & (x - \sqrt{2} \cdot z)^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2 - 2) = 0, \\ & x^2 + 2z^2 - 2\sqrt{2} \cdot xz - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 6 = 0, \\ & -2x^2 - 3y^2 - z^2 - 2\sqrt{2} \cdot xz + 6 = 0, \\ (4) \quad & 2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2\sqrt{2} \cdot xz - 6 = 0. \end{aligned}$$

Si ritrova così il risultato ottenuto con il primo procedimento.

### **n. 6 – Equazione del cilindro di cui sono assegnati la direttrice e i parametri direttori delle generatrici**

Trovare l'equazione cartesiana del cilindro la cui direttrice sul piano  $z = 0$  (piano  $xy$ ) è la circonferenza

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2 = 0,$$

e le cui generatrici hanno i parametri direttori

$$\begin{aligned} (*) \quad & \ell = 1, \quad m = 0, \quad n = \sqrt{2}, \\ \text{ossia} \quad & \ell = \sqrt{2}/2, \quad m = 0, \quad n = 1. \end{aligned}$$

Risoluzione. Le generatrici del cilindro hanno le equazioni del tipo

$$(2) \quad \begin{cases} x = (\sqrt{2}/2)z + p \\ y = q \end{cases}.$$

Esse intersecano il piano  $z = 0$  nel punto  $P(p, q, 0)$ . Imponendo che il punto appartenga alla circonferenza (1) si ha:

$$(3) \quad p^2 + q^2 - 2 = 0.$$

Ricaviamo le espressioni di  $p$  e  $q$  dalle (2); si ha:

$$(4) \quad p = x - \frac{\sqrt{2}}{2}z, \quad q = y.$$

Sostituendo nella (3) si ha l'equazione cartesiana del cilindro:

$$\begin{aligned} (*) \quad & (x - z\sqrt{2}/2)^2 + y^2 - 2 = 0, \\ & x^2 + z^2/2 - \sqrt{2} \cdot xz + y^2 - 2 = 0, \end{aligned}$$

(5) infine  $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2\sqrt{2} \cdot xz - 4 = 0$ .

Vediamo se esso è un cilindro circolare retto. A tale scopo intersechiamo il circolo assoluto  $A_\infty$  dello spazio con la conica  $C_\infty$  del cilindro. Passando a coordinate omogenee si ha il sistema

$$(6) \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2\sqrt{2} \cdot x_1x_3 - 4x_4^2 = 0, \quad x_4 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema si ha

$$(7) \quad x_2^2 = -x_1^2 - x_3^2, \quad x_4 = 0.$$

Sostituendo nella seconda equazione si ottiene:

$$(8) \quad \begin{aligned} & \cancel{2x_1^2} - \cancel{2x_1^2} - 2x_3^2 + x_3^2 - 2\sqrt{2} \cdot x_1x_3 = 0, \\ & -x_3^2 - 2\sqrt{2} \cdot x_1x_3 = 0, \\ & x_3^2 + 2\sqrt{2} \cdot x_1x_3 = 0. \end{aligned}$$

La (8) si spezza nelle due equazioni

$$(*) \quad x_3 = 0, \quad x_3 + 2\sqrt{2} \cdot x_1 = 0.$$

La prima eq. ha la soluzione (9)  $x_3 = 0$  ;

la seconda eq. ha la soluzione (10)  $x_1 = 1, \quad x_3 = -2\sqrt{2}$  .

Sostituendo  $x_3 = 0$  nella (7) si ha:

$$\begin{aligned} & x_4 = 0, \quad x_2^2 = -x_1^2, \quad \text{da cui} \quad x_2 = \pm ix_1; \\ \text{ponendo ora} \quad & x_1 = 1 \quad \text{si ha} \quad x_2 = \pm i. \end{aligned}$$

Raccogliendo i dati, abbiamo che la prima coppia di punti di intersezione tra  $A_\infty$  e  $C_\infty$  è data dai punti ciclici

$$(11) \quad A(1, i, 0, 0), \quad \bar{A}(1, -i, 0, 0).$$

Troviamo la seconda coppia di punti di intersezione tra  $A_\infty$  e  $C_\infty$  .

Ricordiamo dalla (10) che  $x_1 = 1, \quad x_3 = -2\sqrt{2}$  . Sostituendo nella (7) si ha:

$$(*) \quad x_2^2 = -1 - 8, \quad \text{da cui} \quad x_2 = \pm 3i, \quad \text{e naturalmente} \quad x_4 = 0.$$

Concludendo, gli altri due punti di intersezione tra  $A_\infty$  e  $C_\infty$  sono i punti ciclici, complessi coniugati:

$$(12) \quad B(1, 3i, -2\sqrt{2}, 0), \quad \bar{B}(1, -3i, -2\sqrt{2}, 0).$$

Possiamo subito dire che i piani che intersecano il cilindro secondo sezioni circolari sono quelli che hanno la giacitura delle due rette improprie  $\overline{AA}$  e  $\overline{BB}$ . Poiché i due fasci di piani sono distinti, il cilindro non è rotondo, ossia non è circolare retto.

Troviamo l'equazione del primo fascio di piani. La generica equazione di un piano, in coordinate omogenee, è

$$(12) \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 .$$

Imponendo il passaggio per i punti impropri  $A, \overline{A}$  si ha il sistema:

$$(*) \quad \begin{cases} a + ib = 0 \\ a - ib = 0 . \end{cases}$$

Si ricava subito  $a = 0$ ,  $b = 0$ , mentre  $c$  e  $d$  restano indeterminati e quindi l'equazione del fascio di piani è:

$$(*) \quad cx_3 + dx_4 = 0 .$$

Passando a coordinate non omogenee si ha:

$$(13) \quad z + d = 0 :$$

infatti, per costruzione, i piani (13) intersecano il cilindro obliquo considerato secondo circonferenze.

Troviamo l'equazione del secondo fascio di piani paralleli e quindi imponiamo al piano  $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$  di passare per gli altri due punti ciclici  $B$  e  $\overline{B}$ . Si ha il sistema

$$(*) \quad \begin{cases} a + 3bi - 2\sqrt{2} \cdot c + 0 = 0 \\ a - 3bi - 2\sqrt{2} \cdot c + 0 = 0 . \end{cases}$$

Si ricava  $b = 0$ ,  $a - 2\sqrt{2} \cdot c = 0$ ,

quindi  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ ,  $d =$  indeterminato.

Per il secondo fascio di piani paralleli si ha quindi l'equazione

$$2\sqrt{2} \cdot x_1 + x_3 + dx_4 = 0 ,$$

e in coordinate non omogenee si ha

$$(14) \quad 2\sqrt{2} \cdot x + z + k = 0 .$$

Si riconosce subito che i piani di questo fascio non sono perpendicolari alle generatrici del cilindro.

## n. 7 – Riduzione dell'equazione di una quadrica a forma canonica

Dato un riferimento cartesiano  $Oxyz$ , consideriamo l'equazione generale di una quadrica:

$$(1) \quad f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 .$$

Supponiamo che questa abbia un centro di simmetria coincidente con l'origine  $O(0,0,0)$  del riferimento cartesiano. Dovendo allora essere

$$f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$$

si avrà la condizione

$$2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z = -2a_{14}x - 2a_{24}y - 2a_{34}z .$$

Poiché questa relazione deve essere identicamente soddisfatta per qualsiasi valore di  $(x,y,z)$ , deve essere

$$(2) \quad a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0 .$$

Se il centro di simmetria  $C(a,b,c)$  della quadrica non coincide con l'origine  $O$ , possiamo realizzare questa condizione con la traslazione di assi

$$(3) \quad x = \xi + a , \quad y = \eta + b , \quad z = \zeta + c .$$

La traslazione rende nulli i coefficienti dei termini di 1° grado e influisce sul termine noto, ma non trasforma i coefficienti dei termini di 2° grado. L'equazione della quadrica avrà pertanto un'equazione del tipo

$$(4) \quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + D\xi\eta + E\xi\zeta + F\eta\zeta + \lambda = 0 .$$

Operiamo ora una rotazione degli assi di riferimento in modo che questi coincidano con gli assi di simmetria della quadrica. In tal caso i coefficienti dei termini rettangolari  $XY, XZ, YZ$  si annullano: infatti, se la (4) è simmetrica rispetto all'asse  $\xi$  deve essere

$$f(\xi, \eta, \zeta) = f(\xi, -\eta, -\zeta) \quad \text{da cui}$$

$$(*) \quad D\xi\eta + E\xi\zeta + F\eta\zeta = -D\xi\eta - E\xi\zeta + F\eta\zeta .$$

Poiché questa condizione deve essere identicamente soddisfatta, si ricava necessariamente:

$$D = E = 0 .$$

Analogamente, se la (4) è simmetrica rispetto all'asse  $\eta$  si deve avere

$$f(\xi, \eta, \zeta) = f(-\xi, \eta, -\zeta) \quad \text{da cui}$$

$$D\xi\eta + E\xi\zeta + F\eta\zeta = -D\xi\eta + E\xi\zeta - F\eta\zeta$$

e questa relazione è identicamente soddisfatta solo se

$$D = F = 0 .$$

Raccogliendo i risultati si ricava

$$D = E = F = 0 .$$

l'equazione della quadrica assume la forma canonica

$$(12) \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \lambda = 0 ;$$

dobbiamo infatti tenere presente che la rotazione non influisce sul termine noto.

Se invece la quadrica non ha centro di simmetria, la sua equazione si può ridurre alla forma canonica

$$(3) \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda Z = 0 ;$$

Con una diversa orientazione degli assi cartesiani possiamo anche scrivere

$$(*) \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Z^2 + \lambda Y = 0, \quad \text{o} \quad \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2 + \lambda X = 0 .$$

**Esercizio.** Studiare e ridurre a forma canonica la quadrica

$$(1) \quad 3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 2x - 14y + 2z - 9 = 0 .$$

Ricordiamo anzitutto che l'equazione di una quadrica con centro di simmetria si può ridurre alla forma canonica

$$(2) \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \lambda = 0 .$$

Calcoliamo il determinante  $A$  e il discriminante  $A_{44}$  della quadrica. Si ha:

$$(3) \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 1 & -9 \end{vmatrix} ,$$

$$(*) \quad A = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & -9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & -9 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -7 & 1 \end{vmatrix} ,$$

$$(*) \quad A = -1(0 - 7 - 2 - 0 - 1 + 18) - 2(-54 - 1 + 7 - 2 + 21 + 9) + \\ -7(6 + 0 - 7 + 2 + 0 - 1) ,$$

$$(*) \quad A = -1(+8) - 2(-57 + 37) - 7(\cancel{8} - 8) = -8 - 2(-20) = -8 + 40 ,$$

$$(4) \quad A = +32 > 0.$$

$$(5) \quad A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 2 - 0 - 12 - 0, \quad A_{44} = -8.$$

Poiché  $A_{44} \neq 0$ , la quadrica non è un paraboloid; e poiché  $A > 0$  si ha una quadrica non degenera a punti iperbolici e precisamente si ha un iperboloid ad una falda . Essendo  $A \neq 0$ , la quadrica è a centro .

Il centro della quadrica è dato dalla soluzione del seguente sistema:

$$(6) \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y + z - 1 = 0 \\ x + 0 + 2z - 7 = 0 \\ x + 2y + 0 + 1 = 0, \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x + 0 + 2z = 7 \\ x + 2y + 0 = -1, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y - 1 \\ 3(-2y - 1) + y + z = 1 \\ -2y - 1 + 2z = 7, \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} -5y + z = 4 \\ y - z = -4, \end{cases} \rightarrow \text{soluzione } x = -1, \quad y = 0, \quad z = 4.$$

Ne segue che il centro della quadrica è  $C(-1, 0, 4)$  .

Consideriamo ora una traslazione di assi che porti l'origine nel centro  $C$  della quadrica; le sue equazioni sono:

$$(7) \quad x = \xi - 1, \quad y = \eta, \quad z = \zeta + 4.$$

Sostituendo nella (1) si ha:

$$(8) \quad 3(\xi - 1)^2 + 2(\xi - 1)(\zeta + 4) + 4\eta(\zeta + 4) - 2(\xi - 1) + -14\eta + 2(\zeta + 4) - 9 = 0.$$

Sciogliendo le parentesi si ha:

$$(9) \quad 3\xi^2 + 2\xi\eta + 2\xi\zeta + 4\eta\zeta - 4 = 0.$$

Come si vede ,con una traslazione che ha l'origine nel centro della quadrica i termini di primo grado scompaiono e si ricava un'equazione del tipo

$$(10) \quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + D\xi\eta + E\xi\zeta + F\eta\zeta + K = 0 .$$

Come già sappiamo, se ora operiamo una rotazione degli assi di riferimento (ortogonali fra loro) che porti gli assi stessi a coincidere con gli assi di simmetria della quadrica (anche essi ortogonali fra loro), i coefficienti dei termini rettangolari  $XY, XZ, YZ$  si annullano e l'equazione della quadrica assume la forma canonica

$$(11) \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 - 4 = 0 .$$

I coefficienti  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  dell'equazione (11) sono gli autovalori della matrice

$$(12) \quad A_{44} = B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} ,$$

cioè sono le radici dell'equazione secolare

$$(13) \quad P(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Si ottiene  $\lambda^2(3-\lambda) + 2 + 2 + \lambda - 4(3-\lambda) + \lambda = 0$ ,

$$(*) \quad 3\lambda^2 - \lambda^3 + 4 + 2\lambda - 12 + 4\lambda = 0, \quad -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0,$$

$$\text{infine (14)} \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

La (15) ha le radici  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ .

Permutando in tutti i modi possibili questi 3 valori di  $\lambda$  otteniamo 6 equazioni che rappresentano la stessa quadrica, disposta in modo diverso rispetto al riferimento cartesiano  $OXYZ$ . Ne segue che l'equazione canonica della quadrica è indifferentemente una delle seguenti equazioni:

$$(16) \quad -2X^2 + Y^2 + 4Z^2 - 4 = 0, \quad -2X^2 + 4Y^2 + Z^2 - 4 = 0,$$

$$(16) \quad X^2 - 2Y^2 + 4Z^2 - 4 = 0, \quad X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 - 4 = 0,$$

$$(16) \quad 4X^2 - 2Y^2 + Z^2 - 4 = 0, \quad 4X^2 + Y^2 - 2Z^2 - 4 = 0.$$

## **n. 8 – Rotazione ortogonale per la riduzione a forma canonica di una quadrica a centro**

Riprendiamo l'iperboloide ad una falda di equazione

$$(1) \quad 3\xi^2 + 2\xi\eta + 2\xi\zeta + 4\eta\zeta - 4 = 0;$$

il suo discriminante è (2) 
$$A_{44} = B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} .$$

L'equazione secolare che con le sue radici permette di ridurre questa equazione a forma canonica è:

$$(3) \quad P(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Le radici  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 4$  della (3) forniscono i coefficienti che individuano l'equazione canonica della quadrica.

Vogliamo ora individuare la rotazione che conduce all'equazione canonica

$$(4) \quad -2X^2 + Y^2 + 4Z^2 - 4 = 0 .$$

Si tratta di individuare la matrice ortogonale che individua la rotazione che fa coincidere gli assi del riferimento con gli assi di simmetria della quadrica (1).

Consideriamo il sistema omogeneo che ha come matrice l'equazione secolare (3).

Questo sistema è:

$$(5) \quad \begin{cases} (3-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 = 0 . \end{cases}$$

Come abbiamo visto, le soluzioni di questo sistema, dette autovalori della matrice B, sono  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 4$ .

Per  $\lambda_1 = -2$  il sistema (5) diventa (autospatio di B relativo a  $\lambda_1$ ):

$$(*) \quad \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 . \end{cases}$$

il quale ammette le  $\infty^1$  soluzioni  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -t$ ,  $x_3 = t$ .

Quindi gli autovettori della matrice B associati all'autovalore  $\lambda_1 = -2$  sono dati dal

vettore colonna  $\begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{bmatrix}$ ; l'autovettore fondamentale è  $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Per  $\lambda_2 = 1$  (autospatio di  $B$  relativo a  $\lambda_2$ ) il sistema (5) diventa:

$$(*) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Esso ammette le  $\infty^1$  soluzioni  $x_1 = -t$ ,  $x_2 = t$ ,  $x_3 = t$ .

Quindi gli autovettori della matrice  $B$  associati all'autovalore  $\lambda_2 = 1$  sono dati dal

vettore colonna  $\begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}$  e l'autovettore fondamentale è  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Per  $\lambda_3 = 4$  (autospatio di  $B$  relativo a  $\lambda_3$ ) il sistema (5) diventa

$$(*) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Esso ammette le  $\infty^1$  soluzioni  $x_1 = 2t$ ,  $x_2 = t$ ,  $x_3 = t$ .

Quindi gli autovettori della matrice  $B$  associati all'autovalore  $\lambda_3 = 4$  sono dati dal

vettore colonna  $\begin{bmatrix} 2t \\ t \\ t \end{bmatrix}$  e l'autovettore fondamentale è  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Abbiamo così i 3 autovettori fondamentali :

$$(*) \quad \vec{u} = [0, -1, 1]^T, \quad \vec{v} = [-1, 1, 1]^T, \quad \vec{w} = [2, 1, 1]^T.$$

Questi tre vettori sono ortogonali a due a due; infatti si ha:

$$(*) \quad \begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0 - 1 + 1 = 0, \\ \vec{u} \times \vec{w} &= u_1 w_2 - u_2 w_1 = 0 - 1 + 1 = 0, \\ \vec{v} \times \vec{w} &= v_1 w_2 - v_2 w_1 = -2 + 1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Normalizziamo adesso i tre autovettori, cioè rendiamoli di modulo unitario. Si hanno i tre vettori ortonormali  $\vec{u}' = [0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T$ ,  $\vec{v}' = [-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]^T$ ,

$$(*) \quad \vec{w}' = [2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]^T.$$

La matrice cercata è quindi

$$(6) \quad P = \begin{vmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{vmatrix};$$

la rotazione ortogonale corrispondente è data dal sistema:

$$(7) \quad \begin{cases} \xi = & -Y/\sqrt{3} + 2Z/\sqrt{6} \\ \eta = -X/\sqrt{2} + Y/\sqrt{3} + Z/\sqrt{6} \\ \zeta = X/\sqrt{2} + Y/\sqrt{3} + Z/\sqrt{6} . \end{cases}$$

Sostituendo le equazioni (7) nell'equazione  $3\xi^2 + 2\xi\eta + 2\xi\zeta + 2\eta\zeta - 4 = 0$  si ottiene l'equazione della quadrica ridotta a forma canonica:

$$(8) \quad -2X^2 + Y^2 + 4Z^2 - 4 = 0 .$$

### n. 9 – Riduzione a forma canonica di una quadrica senza centro di simmetria

Ridurre a forma canonica la quadrica di equazione:

$$(1) \quad x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2x + 2y - 1 = 0 .$$

Calcoliamo il determinante  $A$  e il discriminante  $A_{44}$  della quadrica.

$$(2) \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(-1-1-1-1 \cancel{+1} \cancel{-1}) = +4$$

Poiché  $A \neq 0$ , si ha una quadrica non degenera.

$$(3) \quad A_{44} = B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{la matrice corrispondente ha due righe uguali}).$$

Poiché  $A_{44} = 0$ , e  $A > 0$ , si ha un paraboloido iperbolico, o parabolide a sella. La quadrica non ha centro, ma ha comunque un asse e due piani di simmetria .

Gli autovalori della matrice  $A_{44} = B$  sono i valori di  $\lambda$  che verificano il sistema

$$(4) \quad \begin{cases} x + y + 0 = \lambda x \\ x + y + 0 = \lambda y \\ 0 + 0 - z = -\lambda z, \end{cases}$$

cioè sono le radici dell'equazione secolare

$$(5) \quad P(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda) + (1+\lambda) = 0,$$

$$(*) \quad P(\lambda) = (1+\lambda)(-1-\lambda^2+2\lambda+1) = (1+\lambda) \cdot \lambda(2-\lambda) = 0.$$

Gli autovalori della matrice  $B$  sono quindi  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 0$ .

Cerchiamo gli autovettori linearmente indipendenti relativi a ciascun autovalore.

Per  $\lambda = -1$  il sistema (4) diventa:

$$(*) \quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ -z = -z. \end{cases}$$

Esso ammette le  $\infty^1$  soluzioni  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = t$ .

Quindi gli autovettori della matrice  $B$  associati all'autovalore  $\lambda = -1$  sono dati dal

vettore colonna  $U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$  e l'autovettore fondamentale è  $U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $|U_1| = 1$ .

$$\text{Per } \lambda = 2 \text{ il sistema (4) diventa (6): } \begin{cases} x + y + 0 = 2x \\ x + y + 0 = 2y \\ 0 + 0 - z = 2z. \end{cases}$$

Esso ammette le  $\infty^1$  soluzioni  $x = t$ ,  $y = t$ ,  $z = 0$ .

Quindi gli autovettori della matrice  $B$  associati all'autovalore  $\lambda = 2$  sono dati dal

vettore colonna  $U_2 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$  e l'autovettore fondamentale è  $U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $|U_2| = \sqrt{2}$ .

$$\text{Per } \lambda = 0 \text{ il sistema (4) diventa: } (*) \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Esso ammette le  $\infty^1$  soluzioni  $x = -t$ ,  $y = t$ ,  $z = 0$ .

Quindi gli autovettori della matrice  $B$  associati all'autovalore  $\lambda = 0$  sono dati dal

vettore colonna  $U_3 = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$  e l'autovettore fondamentale è  $U_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $|U_3| = \sqrt{2}$ .

La matrice ortonormale che definisce la rotazione degli della quadrica è quindi:

$$(7) \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e la trasformazione corrispondente è

$$(*) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \rightarrow (8) \quad \begin{cases} x = (\eta - \zeta)/\sqrt{2} \\ y = (\eta + \zeta)/\sqrt{2} \\ z = \zeta \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione  $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2x + 2y - 1 = 0$  della quadrica si ha:

$$(*) \quad \frac{(\eta - \zeta)^2}{2} + \frac{(\eta + \zeta)^2}{2} - \zeta^2 + (\eta^2 - \zeta^2) - \sqrt{2} \cdot (\eta - \zeta) + \sqrt{2} \cdot (\eta + \zeta) - 1 = 0.$$

Sviluppando i calcoli e fatte le dovute semplificazioni si ha:

$$(*) \quad -\xi^2 + 2\eta^2 + 2\sqrt{2} \cdot \zeta - 1 = 0.$$

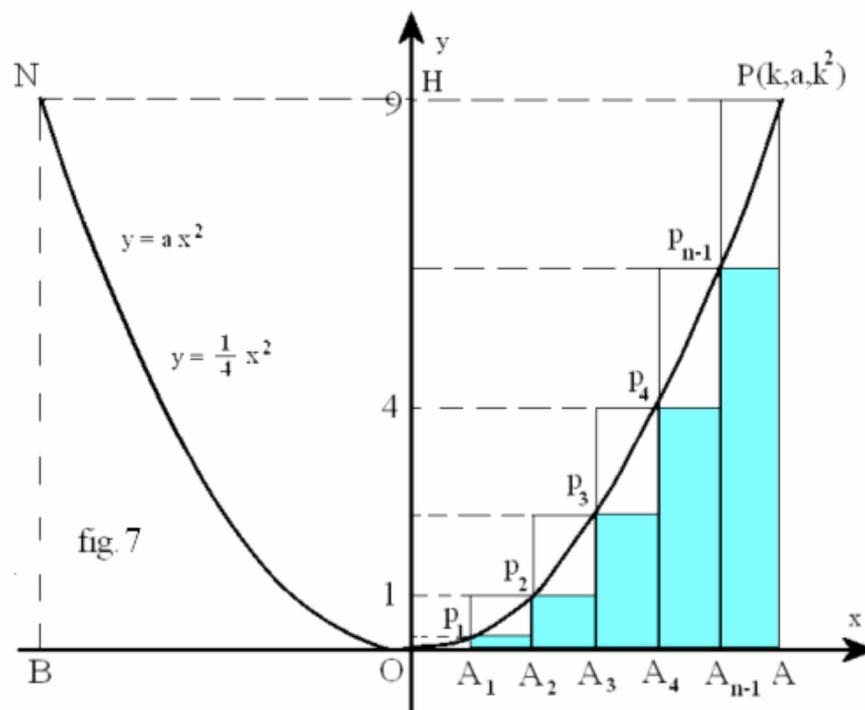
La forma canonica cercata è quindi:

$$(10) \quad -X^2 + 2Y^2 + 2\sqrt{2} \cdot \zeta - 1 = 0.$$

# INTRODUZIONE AL CALCOLO INFINITESIMALE

## n. 1 – Area di un segmento di parabola

Dato un riferimento cartesiano  $Oxy$ , consideriamo l'arco di parabola  $y = ax^2$  definito nell'intervallo  $[0, k]$  dell'asse  $x$ . Gli estremi dell'arco sono  $O(0, 0)$  e  $P(k, ak^2)$ , mentre il punto dell'asse  $x$  di ascissa  $k$  è  $A(k, 0)$ . Dividiamo il segmento  $\overline{OA} = k$  in  $n$  parti uguali per mezzo dei punti  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ . Per le loro ascisse si ha:  $A_1\left(\frac{k}{n}\right)$ ,  $A_2\left(2\frac{k}{n}\right), \dots, A_{n-1}\left((n-1)\frac{k}{n}\right)$ , mentre  $A\left(n\frac{k}{n}\right)$ . Se dai punti di divisione conduciamo le parallele all'asse  $y$ , intersechiamo la parabola nei punti:  $O(0, 0), P_1\left[\frac{k}{n}, a\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$ ,  $P_2\left[2\frac{k}{n}, a\left(2\frac{k}{n}\right)^2\right], \dots, P_{n-1}\left[(n-1)\frac{k}{n}, a(n-1)^2\left(\frac{k}{n}\right)^2\right], P\left[k, a\left(n\frac{k}{n}\right)^2\right]$ .



Se ora dai punti della parabola conduciamo le parallele all'asse  $y$ , otteniamo un plurirettangolo inscritto e uno circoscritto al triangolo mistilineo  $T(OAP)$ .

Se  $n = 5$ , per esempio, il plurirettangolo circoscritto è costituito da 6 strisce rettangolari, mentre il plurirettangolo inscritto è costituito da 5 strisce (fig. 7).

Indicando con  $S_n$  il plurirettangolo circoscritto al triangolo mistilineo  $T(OAP)$  e con  $I_n$  il plurirettangolo inscritto, si ha:

$$(1) \quad S_n = \frac{k}{n} \cdot \frac{ak^2}{n^2} + \frac{k}{n} \cdot \frac{ak^2}{n^2} 2^2 + \frac{k}{n} \cdot \frac{ak^2}{n^2} 3^2 + \dots + \frac{k}{n} \cdot \frac{ak^2}{n^2} (n-1)^2 + \frac{k}{n} \cdot \frac{ak^2}{n^2} n^2,$$

$$(*) \quad S_n = \frac{ak^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2],$$

$$(*) \quad S_n = \frac{ak^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{ak^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right),$$

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{ak^3}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right),$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3} ak^3.$$

Analogamente si ha:

$$(3) \quad I_n = \frac{k}{n} \cdot \frac{ak^2}{n^2} + \frac{k}{n} \cdot \frac{ak^2}{n^2} 2^2 + \frac{k}{n} \cdot \frac{ak^2}{n^2} 3^2 + \dots + \frac{k}{n} \cdot \frac{ak^2}{n^2} (n-1)^2,$$

$$(*) \quad I_n = \frac{ak^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2]$$

$$(*) \quad I_n = \frac{ak^3}{n^3} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} = \frac{ak^3}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right),$$

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{ak^3}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right),$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{3} ak^3.$$

Ma evidentemente l'area del triangolo mistilineo  $T_{OAP}$  è maggiore dell'area del plurirettangolo inscritto ed è minore dell'area del plurirettangolo circoscritto, cioè:

$$(5) \quad I_n < T_{OAP} < S_n.$$

Passando al limite, per il teorema del confronto si ha:

$$(6) \quad T_{OAP} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{3} ak^3.$$

Se ora aggiungiamo all'arco  $\widehat{OP}$  di parabola il suo simmetrico rispetto all'asse  $y$ , otteniamo un nuovo arco di curva sotteso da una corda  $NP$ . Esso determina un segmento di parabola, di vertice  $O$ , compreso in un rettangolo  $R$  di base  $BA$  e altezza  $AP$ . L'area del rettangolo è:

$$(*) \quad R_{ABNP} = \overline{BA} \cdot \overline{AP} = 2a \cdot ak^2, \quad \text{quindi}$$

$$(7) \quad R_{ABNP} = 2ak^3.$$

Se dalla (7) togliamo il doppio dell'area del triangolo mistilineo  $T(OAP)$  otteniamo l'area  $S$  del segmento di parabola. Si ha:

$$(8) \quad S(ONP) = 2ak^3 - \frac{2}{3}ak^3 = \frac{4}{3}ak^3.$$

Dalla (9) si ricava una notevole espressione per l'area del segmento di parabola. Infatti si ha:

$$(*) \quad S_{ONP} = \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot ka^2, \quad \text{ossia (9)} \quad S_{ONP} = \frac{2}{3} \overline{BA} \cdot \overline{AP}.$$

La (9) ci dice che: "L'area di un segmento di parabola è uguale ai  $2/3$  dell'area del rettangolo ad esso circoscritto".

Torniamo ai limiti dei due plurirettangoli  $S_n$  e  $I_n$ . Poiché essi hanno lo stesso valore  $\frac{1}{3}ak^3$ , noi diciamo, per il teorema del confronto, che esso rappresenta anche l'area del triangolo mistilineo  $T(OAP)$ . Ma un tale modo affrettato di procedere non soddisfaceva lo spirito critico greco. Infatti Archimede trovava la differenza delle aree  $S_n$  e  $I_n$  e notava che essa diminuiva al crescere di  $n$ . Infatti

$$(*) \quad S_n - I_n = \frac{ak^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2] - \frac{ak^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2],$$

$$(10) \quad S_n - I_n = \frac{ak^3}{n^3} \cdot n^2 = \frac{ak^3}{n}.$$

Qui Archimede non diceva, come noi diremmo oggi, che la differenza decresce al crescere di  $n$ . Egli diceva: “ Se vogliamo che questa differenza sia minore di 1, basterà determinare  $n$  in modo che sia

$$(*) \quad \frac{ak^3}{n} < 1, \quad \text{cioè } n > ak^3 \text{ “.}$$

Cosicché, se per esempio  $a = 1$  e  $k = 2$ , sarà  $ak^3 = 8$  e quindi basterà prendere  $n = 9$ , cioè dovremo dividere il segmento  $OA$  in 9 parti uguali.

Analogamente, se si vuole che la differenza sia minore di  $1/2$  basterà porre

$$(*) \quad \frac{ka^3}{n} < \frac{1}{2} \quad \text{e quindi prendere } n \geq 17 .$$

Archimede dava cioè il procedimento da seguire caso per caso perché la differenza delle aree  $S_n - I_n$  fosse minore di un'area piccola a piacere. Ma per gli antichi greci tutto questo non era ancora sufficiente ad affermare che l'area del triangolo mistilineo (OAP) fosse  $ak^3/3$ . Per essi, infatti, era ancora necessario far vedere che, detta  $A$

**l'area del triangolo mistilineo (OAP)**, non poteva essere né  $A > \frac{ka^3}{3}$ , né  $A < \frac{ka^3}{3}$ .

Supposto per esempio che sia  $A > \frac{ka^3}{3}$ , allora  $A - \frac{ka^3}{3} > 0$ . Per quanto detto in precedenza è allora possibile determinare un numero  $n$  per il quale si abbia

$$(11) \quad S_n - I_n < A - \frac{ka^3}{3} .$$

Da questa relazione si ricava la seguente

$$(12) \quad S_n - A < I_n - \frac{ka^3}{3} .$$

Ora  $S_n - A$  è positivo (essendo  $S_n$  un valore approssimato per eccesso di  $A$ ), mentre sappiamo che si ha:

$$(*) \quad I_n = \frac{ka^3}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right);$$

quindi  $I_n < \frac{ka^3}{3}$ , ossia (13)  $I_n - \frac{ka^3}{3} < 0$ .

La (13) afferma pertanto che un numero positivo è minore di un numero negativo; e questa conclusione è assurda.

Si è arrivati a questo assurdo per aver supposto che sia  $A > \frac{ka^3}{3}$ . Si arriva ad un

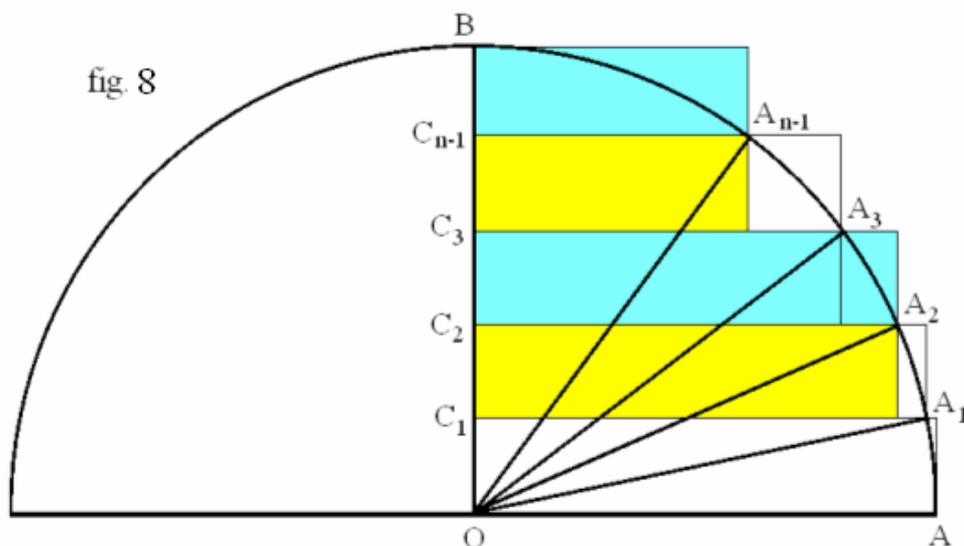
assurdo anche se supponiamo che sia  $A < \frac{ka^3}{3}$ . Archimede conclude quindi che l'area del triangolo mistilineo (OAP) è data dalla formula

$$(14) \quad T_{OAP} = \frac{ka^3}{3} .$$

La dimostrazione data si basa sul metodo di esaustione, ideato dal matematico greco Eudosso da Cnido (IV secolo a.C.) per rendere rigorosi i ragionamenti che implicavano l'infinito. Secondo questo metodo, per dimostrare che due quantità sono uguali basta dimostrare che la loro differenza non può essere né maggiore né minore di zero. Questo metodo verrà poi usato su larga scala da Archimede per giustificare in modo rigoroso il valore, che egli otteneva per altra via, di aree e volumi di figure geometriche.

## n. 2 – Volume di una semisfera

Sia  $\widehat{AB}$  un quarto di circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ . Dividiamo il raggio  $OB$  in  $n$  parti uguali mediante i punti  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}$  e dai punti di divisione conduciamo le parallele al raggio  $OA$  intersecando la circonferenza nei punti  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ . Da questi punti  $A_i$  conduciamo le parallele al raggio  $OB$ .



Otteniamo così due plurirettangoli disegnati come in figura 8: uno è inscritto nel quarto di cerchio, l'altro è circoscritto. Se facciamo ruotare questi due plurirettangoli attorno al

raggio  $OB$ , otteniamo un solido costituito da tanti cilindretti inscritti in una semisfera e un solido costituito da cilindretti circoscritti; i due solidi si dicono cilindroidi.

Siano rispettivamente  $V_1$  e  $V_2$  i volumi totali dei due solidi.

Il cilindroidi inscritto è costituito da  $n - 1$  cilindretti di raggi rispettivi  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}$ .

Il cilindroidi circoscritto è costituito da  $n$  cilindretti di raggi  $r, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ .

Poiché le altezze dei vari cilindretti sono tutte uguali ad  $r/n$ , si ha:

$$(1) \quad V_2 = \pi \cdot r^2 \frac{r}{n} + \pi \cdot r_1^2 \frac{r}{n} + \pi \cdot r_2^2 \frac{r}{n} + \dots + \pi \cdot r_{n-1}^2 \frac{r}{n},$$

$$(2) \quad V_2 = \frac{\pi \cdot r}{n} [r^2 + r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{n-1}^2].$$

Ora  $r^2 = \overline{OA}^2 = r^2$

$$r_1^2 = \overline{C_1A_1}^2 = \overline{OA_1}^2 - \overline{OC_1}^2 = r^2 - \left(\frac{r}{n}\right)^2,$$

$$(A) \quad r_2^2 = \overline{C_2A_2}^2 = \overline{OA_2}^2 - \overline{OC_2}^2 = r^2 - \left(2\frac{r}{n}\right)^2,$$

.....,

$$r_{n-1}^2 = \overline{C_{n-1}A_{n-1}}^2 = \overline{OA_{n-1}}^2 - \overline{OC_{n-1}}^2 = r^2 - \left[(n-1)\frac{r}{n}\right]^2.$$

Quindi:

$$r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_{n-1}^2 + r_{n-1}^2 = nr^2 - \left[ \frac{r^2}{n^2} + 2^2 \frac{r^2}{n^2} + 3^2 \frac{r^2}{n^2} + \dots + (n-1)^2 \frac{r^2}{n^2} \right],$$

$$(*) \quad r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_{n-1}^2 + r_{n-1}^2 = nr^2 - \frac{r^2}{n^2} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2],$$

$$(*) \quad r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_{n-1}^2 + r_{n-1}^2 = nr^2 - \frac{r^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

$$(*) \quad r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_{n-1}^2 + r_{n-1}^2 = nr^2 \left[ 1 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \right],$$

$$(3) \quad r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_{n-1}^2 + r_{n-1}^2 = nr^2 \left[ 1 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \right].$$

Tenendo conto della (3) la (2) diventa:

$$(4) \quad V_2 = \frac{\pi r}{n} \cdot nr^2 \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \left( 2 - \frac{1}{n} \right) \right].$$

Semplifichiamo per  $n$  e poi passiamo al limite per  $n \rightarrow \infty$ . Si ha

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_2 = \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3.$$

Facciamo vedere che risulta anche:

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_1 = \frac{2}{3} \pi r^3. \quad \text{infatti si ha:}$$

$$(7) \quad V_1 = \pi \cdot r_1^2 \frac{r}{n} + \pi \cdot r_2^2 \frac{r}{n} + \pi \cdot r_3^2 \frac{r}{n} + \dots + \pi \cdot r_{n-1}^2 \frac{r}{n},$$

$$(8) \quad V_1 = \frac{\pi \cdot r}{n} [r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_{n-1}^2].$$

Ora, dalla tabella (A) si ricava

$$(9) \quad \begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_{n-1}^2 &= (n-1)r^2 - \left[ \frac{r^2}{n^2} + 2^2 \frac{r^2}{n^2} + 3^2 \frac{r^2}{n^2} + \dots + (n-1)^2 \frac{r^2}{n^2} \right] = \\ &= (n-1)r^2 - \frac{r^2}{n^2} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] = (n-1)r^2 - \frac{r^2}{n^2} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}. \end{aligned}$$

Ne segue:

$$(*) \quad r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_{n-1}^2 = nr^2 \left[ \frac{n-1}{n} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \right], \quad \text{e quindi}$$

$$(10) \quad r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_{n-1}^2 = nr^2 \left[ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right].$$

Sostituendo la (10) nella (8) si ha:

$$(11) \quad V_1 = \frac{\pi \cdot r}{n} \cdot nr^2 \left[ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \right].$$

Semplifichiamo per  $n$  e poi passiamo al limite per  $n \rightarrow \infty$ . Si ha:

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_1 = \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \pi r^3.$$

Ma evidentemente il volume  $V_{\text{smf}}$  della semisfera è compreso tra i due cilindroidi  $V_1$  e  $V_2$ , cioè

$$(13) \quad V_1 < V_{\text{smf}} < V_2.$$

Passando al limite, per il teorema del confronto si ha:

$$(*) \quad V_{\text{smf}} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} V_2 = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3.$$

## ARGOMENTI DI STORIA DELLA MATEMATICA

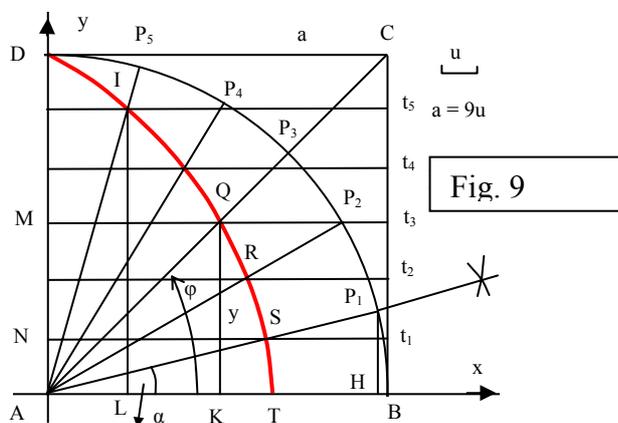
### n. 1 – La trisettrice di Ippia ( a cura di Nazario Magnarelli)

E' dato un quadrato ABCD, di lato  $\overline{AB} = a$ . Il vertice A coincide con l'origine di un riferimento cartesiano Axy e i vertici B e D cadono rispettivamente sugli assi x e y del riferimento.

Facciamo traslare in modo uniforme il segmento DC fino a farlo coincidere con il lato AB e nello stesso tempo facciamo ruotare di moto uniforme il lato AD sino a farlo coincidere con lo stesso lato AB. Trovare l'equazione del luogo geometrico  $\gamma$  dei punti di intersezione dei due segmenti durante il loro movimento. Esso è detto trisettrice di Ippia.

(L'enunciato del problema è tratto dal libro "Le curve celebri", di Luciano Cresci; pag. 9).

Indichiamo anzitutto la costruzione grafica del luogo geometrico ( Fig. 9).



A partire dal punto A dividiamo il lato AD del quadrato in sei parti uguali e dai punti di divisione conduciamo le parallele al lato AB; indicheremo queste parallele con le lettere  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$ . A partire dal punto B dividiamo poi l'angolo retto  $\widehat{BAD}$  in sei angoli uguali, di ampiezza  $\alpha = 15^\circ$  ciascuno, e siano  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  i punti di intersezione con l'arco  $\widehat{BD}$  di circonferenza. Preso l'angolo  $\widehat{BAP}_1 = 15^\circ$ , sia H la proiezione ortogonale del punto  $P_1$  sull'asse x.

Per la lunghezza del lato del quadrato, si prenda  $\overline{AB} = 9u$ . Il punto  $P_3$  è comune alla circonferenza e alla bisettrice del 1° quadrante; i punti  $P_2$  e  $P_4$  si trovano ricordando che  $\sin 30^\circ = 1/2$  e  $\cos 60^\circ = 1/2$ . Il punto  $P_1$  si trova dividendo l'arco  $\widehat{BP}_2$  in 2 parti uguali.

I punti  $S = AP_1 \cap t_1$ ,  $R = AP_2 \cap t_2$ ,  $Q = AP_3 \cap t_3$ , ecc. appartengono al luogo geometrico  $\gamma$ . In seguito ci farà comodo considerare  $Q(x,y)$  come un punto generico del luogo.

Eseguendo costruzioni analoghe, possiamo infittire i punti della curva  $\gamma$  a nostro piacere e quindi possiamo tracciare la nostra curva con l'accuratezza desiderata.

Consideriamo ora un generico punto Q della curva  $\gamma$ ; sia  $y$  l'ordinata del punto e K la sua proiezione ortogonale sull'asse x, quindi  $\overline{KQ} = y$ . Poniamo  $\widehat{KAQ} = \varphi$ . Consideriamo ora due triangoli aventi un vertice sulla curva  $\gamma$  ed il lato opposto sull'asse x, es. i triangoli KAQ ed LAI. Per come abbiamo costruito la curva, si vede che il rapporto fra i lati KQ ed LI è uguale a quello dei corrispondenti angoli opposti. In particolare, quando  $I \rightarrow D$  sussiste la proporzione:

$$y : a = \varphi : \pi/2, \quad \Rightarrow \quad (1) \quad \varphi = \frac{\pi y}{2a} \quad \text{e} \quad (2) \quad y = \frac{2 \cdot a \cdot \varphi}{\pi} .$$

Consideriamo ora il riferimento polare  $(\rho, \varphi)$  di polo A e asse polare coincidente con l'asse x. Per 1° teor. sui triangoli rettangoli, dal triangolo AKQ si ha:  $\overline{KQ} = \overline{AQ} \sin \varphi$ ,  $\Rightarrow$  (3)  $y = \rho \sin \varphi$ .

Per la (2) possiamo scrivere:

$$y = \rho \sin \varphi = \frac{2a\varphi}{\pi} \quad \Rightarrow \quad (4) \quad \rho(\varphi) = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi} .$$

La (4) ci dà l'equazione polare della trisettrice  $\gamma$ .

Vogliamo ora trovare le equazioni parametriche di  $\gamma$ .

Dal triangolo rettangolo KAQ si ha, per il 3° teor:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad \Rightarrow \quad (5) \quad x = \frac{y}{\operatorname{tg} \varphi} .$$

Se ricordiamo che per la (2) si ha  $y = 2a\varphi/\pi$ , sostituendo nella (5) si trova (6)  $x = 2a\varphi/\pi \operatorname{tg} \varphi$ .

Le equazioni parametriche della trisettrice sono pertanto:

$$(7) \quad x = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \quad \text{e} \quad y = \frac{2a}{\pi} \varphi .$$

Dalle equazioni parametriche (7) e dall'equazione polare (4) possiamo ricavare alcuni valori notevoli.

(8) Per  $\varphi = \pi/2$  si ha  $x = 0$  e  $y = \rho = a$ .

(9) Per  $\varphi = \pi/4$  si ha  $x = y = \frac{a}{2}$ ,  $\rho = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$ , da cui  $\rho = a\sqrt{2}/2$ .

(10) Per  $\varphi \rightarrow 0$ , dalla (4) si ha:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho(\varphi) = \frac{2a}{\pi} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\sin \varphi} = \frac{2a}{\pi} \approx 0,6366a.$$

Prendiamo  $a = 9u$ ; per l'ascissa del punto T, intersezione della curva  $\gamma$  con l'asse x, si ha allora:

$$x_T = 2a/\pi \approx 5,73u, \quad \text{quindi } \overline{AT} \approx 5,73u.$$

2ª parte

Costruita la curva  $\gamma$  con la necessaria accuratezza e detto Q un punto generico di essa, vogliamo vedere come si può dividere in tre parti uguali l'angolo  $\sphericalangle AQ = \varphi$ ; per fare questa operazione non è necessario conoscere l'equazione polare di  $\gamma$ .

A tale scopo, si conduca dal punto Q la parallela all'asse x e sia M il punto di intersezione con l'asse y; dividiamo il segmento AM in tre parti uguali e sia AN = AM/3. Dal punto N si conduca la parallela all'asse x e sia S il punto di intersezione con la curva  $\gamma$ . La costruzione geometrica della curva ci fa capire che si ha

$$\sphericalangle AS = \frac{1}{3} \sphericalangle AQ, \quad \text{ossia } \sphericalangle AS = \frac{1}{3} \varphi.$$

Rimane così giustificato il nome di trisettrice dato al luogo geometrico.

3ª parte: la quadratrice di Dinostrato.

La trisettrice di Ippia, come ha dimostrato Dinostrato (350 a.C. circa), si presta ad operare la rettificazione della circonferenza e la quadratura del cerchio; in tal caso essa è nota con il nome di quadratrice di Dinostrato. Teniamo sempre presente che la curva non è costruibile con la sola riga e compasso.

Per dimostrare questa proprietà, facciamo vedere che se indichiamo con  $\overline{BD}$  l'arco  $\overline{BD}$  rettificato e con  $\ell$  la sua misura, sussiste la proporzione

(11)  $\overline{BD} : AB = AB : AT.$

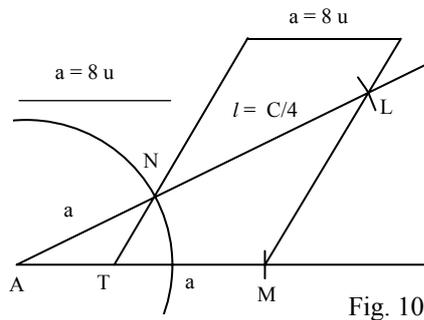
Infatti, passando alle misure si ha:

(12)  $\ell : a = a : \frac{2a}{\pi}, \quad \ell = \frac{1}{2} a\pi, \quad \text{cioè } \ell = \frac{1}{4} 2\pi a.$

Quindi la proporzione (11) è esatta perché essa ci fa ritrovare esattamente la lunghezza di 1/4 di circonferenza, ossia  $\ell = C/4$ .

La costruzione grafica del segmento di lunghezza  $\ell$  si ottiene applicando il teorema di Talete. Infatti, scriviamo la (12) nella forma  $\frac{2a}{\pi} : a = a : \ell$ .

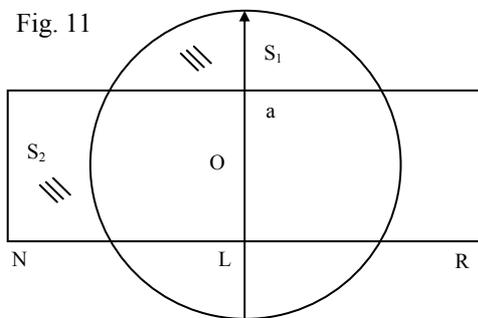
Per eseguire una buona costruzione geometrica del fascio di rette parallele, prendiamo  $a = 8u$ , anziché  $a = 9u$ ; quindi  $2a/\pi \approx 5u$ . Si ha la fig. 10 seguente:



il segmento  $NL$  della figura è il segmento che rettifica  $1/4$  di circonferenza di raggio  $a = 8u$ . Con ciò abbiamo completato il problema della rettificazione della circonferenza.

Per quanto riguarda la quadratura del cerchio, ricordiamo che l'area di un cerchio è equivalente a quella di un rettangolo avente per altezza il raggio e come base un segmento  $NR$  pari a mezza circonferenza rettificata. Si ottiene subito la costruzione che risolve il quesito (fig. 11).

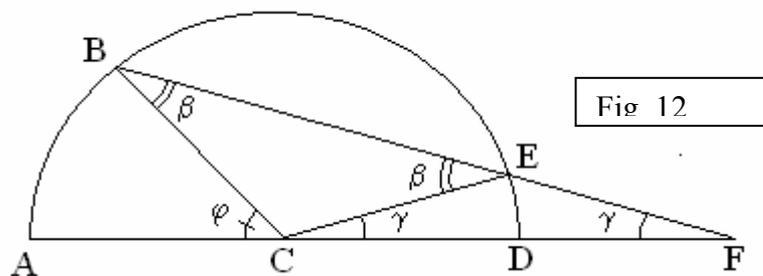
La figura ci dice che le superfici segnate  $S_1$  ed  $S_2$  sono equivalenti



Rimane da trasformare il rettangolo nel quadrato equivalente; la costruzione geometrica corrispondente si ottiene applicando il 1° o il 2° teor. di Euclide.

## n. 2 – Trisezione di un angolo: altra dimostrazione.

Consideriamo una semicirconferenza di centro  $C$  e di diametro  $AD$  (fig. 12). Preso un punto  $B$  su di essa, consideriamo l'angolo  $\widehat{ACB} = \varphi$  e supponiamo, per semplicità, che esso sia un angolo acuto.



Vogliamo indicare una costruzione geometrica che ci permette di dividere l'angolo  $\varphi$  in tre parti uguali. Vedremo che anche questa costruzione non può essere eseguita con la sola riga e compasso, ma solo per tentativi.

Conduciamo dal punto B una retta; sia E il punto di intersezione con la semicirconferenza ed F il punto di intersezione con il prolungamento del diametro AD. Scegliamo l'inclinazione della retta in modo che il segmento EF sia uguale al raggio della semicirconferenza, quindi

$$EF = CE = \text{raggio} .$$

Consideriamo il triangolo (CEF); poiché esso è isoscele sulla base CF possiamo scrivere l'eguaglianza

$$\widehat{DFE} = \widehat{DCE} = \gamma .$$

Inoltre, per il teorema dell'angolo esterno, l'angolo  $\widehat{CEB}$  è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti; quindi si ha

$$\widehat{CEB} = \widehat{ECD} + \widehat{DFE} ,$$

e per la (1) possiamo scrivere

$$\widehat{CEB} = 2 \cdot \widehat{DFE} .$$

Consideriamo ora il triangolo (CBF); per il teorema dell'angolo esterno si ha

$$\widehat{ACB} = \widehat{CBE} + \widehat{DFE} .$$

Ma il triangolo (CBE) è isoscele sulla base BE, avendo due lati uguali come raggi della semicirconferenza; possiamo quindi scrivere

$$\widehat{CBE} = \widehat{CEB} .$$

In tal modo la (4) diventa

$$\widehat{ACB} = \widehat{CEB} + \widehat{DFE} .$$

Ricordando l'espressione di  $\widehat{CBE}$  data dalla (3), la (5) diventa

$$\widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{DFE} + \widehat{DFE} ,$$

da cui

$$\widehat{ACB} = 3 \cdot \widehat{DFE} ,$$

o anche

$$\widehat{ACB} = 3 \cdot \widehat{DCE} .$$

Più semplicemente possiamo scrivere

$$\varphi = 3 \cdot \gamma, \quad \text{da cui} \quad \gamma = \frac{1}{3} \varphi .$$

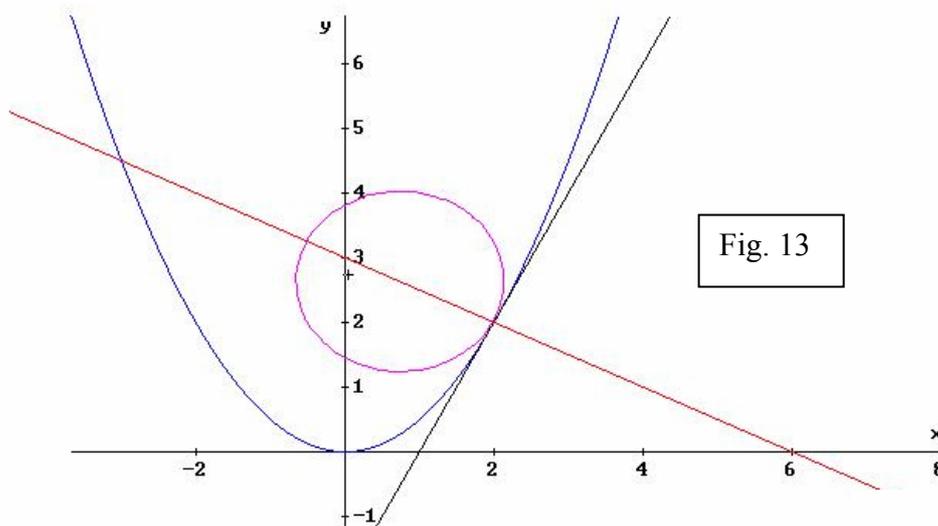
Se a partire dal punto A riportiamo tre volte l'arco  $\widehat{DE}$  sulla semicirconferenza, possiamo dividere l'arco  $\widehat{AB}$  in tre parti uguali.

c.v.d.

### n. 3 –Centro di curvatura ed evolvente di una curva

Voglio indicare un procedimento molto semplice che ci permette di trovare le coordinate del centro del cerchio di curvatura di una curva e quindi l'equazione cartesiana dell'evolvente della curva stessa. Ricordo ancora lo sgomento che mi procurò la questione nei primi mesi del mio corso di laurea. Il procedimento che illustrerò riesce molte volte vantaggioso. Diamo un esempio.

In un riferimento cartesiano  $Oxy$  è data la parabola di equazione  $y = \frac{1}{2}x^2$ . Trovare le coordinate del centro del cerchio di curvatura relativo al generico punto  $P(t; t^2/2)$ , cioè le coordinate del centro del cerchio osculatore della curva in tale punto (fig. 13).



Consideriamo due punti infinitamente vicini della parabola: siano essi

$$P(t; \frac{1}{2}t^2) \quad \text{e} \quad Q[t + \Delta t; \frac{1}{2}(t + \Delta t)^2] .$$

La derivata della funzione  $y(x) = \frac{x^2}{2}$  in un generico punto è  $y'(x) = x$ ; ne segue che le tangenti alla parabola nei punti P e Q hanno rispettivamente i coefficienti angolari  $m_P = t$  ed  $m_Q = t + \Delta t$ .

Le normali alla parabola nei punti stessi hanno i coefficienti angolari

$$m'_P = -\frac{1}{t} \quad , \quad m'_Q = -\frac{1}{t + \Delta t} \quad .$$

Scriviamo le equazioni delle due normali e mettiamole a sistema

$$(1) \quad \begin{cases} y - \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{t}(x - t - \Delta t) \\ y - \frac{1}{2}(t + \Delta t)^2 = -\frac{1}{t + \Delta t}(x - t - \Delta t) \end{cases} .$$

Troviamo le coordinate del punto di intersezione di queste due rette; passando poi al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  si ottengono le coordinate del centro del cerchio di curvatura nel punto P, cioè del cerchio osculatore in tale punto.

Dalla (1)<sub>2</sub> si ha

$$y - \frac{1}{2}[t^2 + (\Delta t)^2 + 2t \cdot \Delta t] = -\frac{x - t - \Delta t}{t + \Delta t} .$$

Poiché  $(\Delta t)^2$  è trascurabile, essendo esso un infinitesimo del secondo ordine, il sistema diventa:

$$(2) \quad \begin{cases} y = -\frac{x}{t} + \frac{1}{2}t^2 + 1 \\ y = -\frac{x - t - \Delta t}{t + \Delta t} + \frac{t^2}{2} + t \cdot \Delta t \end{cases} .$$

Eguagliando membro a membro si ha:

$$-\frac{x}{t} + \frac{t^2}{2} + 1 = -\frac{x - t - \Delta t}{t + \Delta t} + \frac{t^2}{2} + 1 ;$$

da cui  $-x(t + \Delta t) + t(t + \Delta t) = -t(x - t - \Delta t) + t^2 \Delta t \cdot (t + \Delta t) ,$

cioè  $-\cancel{xt} - x \cdot \Delta t + \cancel{t^2} + \cancel{t \cdot \Delta t} = -\cancel{xt} + \cancel{t^2} + \cancel{t \cdot \Delta t} + t^3 \cdot \Delta t + t^2 \cdot (\Delta t)^2 .$

Semplificando e trascurando il termine  $t^2 \cdot (\Delta t)^2$ , che è un infinitesimo del secondo ordine, si ha

$$-x \cdot \Delta t = t^3 \cdot \Delta t \quad , \quad \text{da cui} \quad (3) \quad x = -t^3 .$$

Sostituendo la (3) nella (2)<sub>1</sub> possiamo trovare l'ordinata del centro del cerchio osculatore nel punto P:

$$y = t^2 + \frac{1}{2}t^2 + 1, \quad \text{da cui} \quad (4) \quad y = \frac{3}{2}t^2 + 1.$$

Riassumendo, il centro di curvatura ha le coordinate

$$(5) \quad x = -t^3, \quad y = \frac{3}{2}t^2 + 1.$$

Al variare del parametro  $t$ , il punto, come è noto, descrive l'evolvente della parabola. Le equazioni (5), pertanto, sono le equazioni parametriche dell'evolvente. L'equazione cartesiana dell'evolvente si ottiene ricavando il parametro  $t$  dalla seconda equazione del sistema (5) e sostituendo nella prima.

## LE SUPERFICI COME LUOGHI GEOMETRICI

**n. 1 – PROBLEMA 1 E** (testo di G. Vaccaro; Le superfici, pag. 100)

Dato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico  $Oxyz$ , si considerino il fascio  $F_1$  dei piani perpendicolari all'asse  $x$  ed il fascio  $F_2$  delle sfere passanti per l'origine ed aventi il centro sull'asse  $z$ .

I) Scrivere l'equazione della proiettività tra  $F_1$  ed  $F_2$  nella quale al piano  $x = 1$  corrisponda la sfera con centro nel punto  $(0,0,1)$ , al piano  $x = 2$  corrisponda la sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$  e al piano improprio corrisponda il cono isotropo con vertice nell'origine.

II) Sia  $\pi$  un piano di  $F_1$ ,  $\Sigma$  la sfera corrispondente in  $F_2$  e  $\gamma$  la circonferenza intersezione di  $\pi$  con  $\Sigma$ . Scrivere l'equazione della superficie  $S$  descritta da  $\gamma$  al variare di  $\pi$  nel fascio  $F_1$ .

III) Dimostrare che la sezione di  $S$  con un piano passante per l'asse  $y$  si spezza nell'asse  $y$  e in una ellisse.

IV) Determinare i punti doppi della superficie.

### Soluzione

I) Il fascio  $F_1$  di piani ha l'equazione (1)  $x = k$ ;

il fascio  $F_2$  di sfere passanti per l'origine ed aventi il centro nel punto  $C(0,0,h)$  ha l'equazione (2)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2hz = 0$ .

- 1) Il piano  $x = 1$  e la sfera corrispondente  $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$  corrispondono ai valori  $k = 1$  e  $h = 1$ .
- 2) Il piano  $x = 2$  e la sfera corrispondente  $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$  corrispondono ai valori  $k = 2$  e  $h = 1/2$ .
- 3) Al piano improprio  $x_4 = 0$  corrisponde la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ .

Poiché il piano improprio fa parte del fascio di piani  $x_1 = kx_4$ , possiamo dire che esso corrisponde al valore  $k = \infty$ , mentre il cono detto corrisponde al valore  $h = 0$ .

Ne segue che l'equazione della proiettività tra i due fasci è data dall'eguaglianza di birapporti

$$(3) \quad (1, 2, \infty, k) = (1, 1/2, 0, h).$$

Ricordando che il valore di un birapporto non cambia scambiando di posto due elementi qualsiasi tra di loro, e simultaneamente gli altri due, possiamo scrivere:

$$(4) \quad (2, 1, k, \infty) = (1, 1/2, 0, h), \quad \text{da cui} \quad (2, 1, k) = (1, 1/2, 0, h), \quad \text{ossia}$$

$$(*) \quad (2,1,k) = \frac{(1,1/2,0)}{(1,1/2,h)} .$$

Sviluppando i calcoli si ha:

$$(*) \quad \frac{k-2}{k-1} = \frac{0-1}{0-\frac{1}{2}} \cdot \frac{h-1}{h-\frac{1}{2}}, \quad \rightarrow \quad \frac{k-2}{k-1} = 2 \cdot \frac{h-1}{1} \cdot \frac{2}{2h-1},$$

$$\text{da cui (5)} \quad \frac{k-2}{k-1} = 4 \cdot \frac{h-1}{2h-1} .$$

Liberando dai denominatori si ha:

$$(*) \quad (k-2)(2h-1) = 4 \cdot (h-1)(k-1),$$

$$(*) \quad 2kh - k - 4h + 2 = 4kh - 4h - 4k + 4,$$

$$(*) \quad 2kh - 3k + 2 = 0, \quad \text{e quindi}$$

$$(5) \quad h = \frac{3k-2}{2k} .$$

Sostituendo la (5) nella (2), possiamo dire che gli elementi corrispondenti del fascio di piani e del fascio di sfere hanno le equazioni

$$(6) \quad F_1 : x = k, \quad F_2 : x^2 + y^2 + z^2 - \frac{z(3k-2)}{k} = 0 .$$

II ) Consideriamo ora la circonferenza  $\gamma$  secondo cui un piano interseca la sfera corrispondente. Essa è data dal sistema:

$$(7) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \frac{z(3k-2)}{k} \\ x = k . \end{cases}$$

Eliminando  $k$  fra le due equazioni del sistema si ha:

$$(8) \quad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{z(3x-2)}{x} = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(9) \quad x^3 + y^2x + z^2x - 3xz + 2z = 0 .$$

La (9) è l'equazione della superficie  $S$  descritta dalla circonferenza (7) al variare di  $\pi$  nel fascio di piani  $F_\lambda$ . Evidentemente, non si tratta di una superficie rigata; essa è una superficie  $F^3$  del 3° ordine che ha nell'origine un punto semplice con piano tangente di equazione  $z = 0$  (piano  $xy$ ).

III) L'intersezione di  $F^3$  con un qualsiasi piano è una  $C^3$ . In particolare, l'intersezione con un generico piano passante per l'asse  $y$  è data dal sistema:

$$(10) \quad \begin{cases} x^3 + y^2x + z^2x - 3xz + 2z = 0 \\ z = \lambda x \end{cases}$$

Eliminando  $z$  si ha una equazione di 3° grado che rappresenta la proiezione della  $C^3$  sul piano  $z = \lambda x$ :

$$(11) \quad x^3 + y^2x + \lambda^2x^3 - 3\lambda x^2 + 2\lambda x = 0; \quad \text{ne segue}$$

$$(*) \quad x \cdot (x^2 + y^2 + \lambda^2x^2 - 3\lambda x + 2\lambda) = 0.$$

Si ottiene la soluzione:

$$(12) \quad \begin{aligned} x = 0, \quad z = 0 & \quad (\text{asse } y) \\ (1 + \lambda^2)x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2\lambda = 0 & \quad \text{con } \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Si ricava che la cubica si spezza nell'asse  $y$  e in una ellisse.

IV) Troviamo i punti doppi della superficie e a tale scopo scriviamo la sua equazione in coordinate omogenee:

$$(13) \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 - 3x_1x_3x_4 + 2x_3x_4^2 = 0.$$

Consideriamo le derivate parziali prime del polinomio  $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Si ha

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_3x_4, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= 2x_1x_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= 2x_1x_3 - 3x_1x_4 + 2x_4^2, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} &= -3x_1x_3 + 4x_3x_4. \end{aligned}$$

Consideriamo ora il sistema costituito dall'equazione della superficie e dalle derivate prime del polinomio  $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$  eguagliate a zero. Si ha:

$$(A) \quad \begin{cases} (15) & x_1^3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 - 3x_1x_3x_4 + 2x_3x_4^2 = 0 \\ (16) & 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_3x_4 = 0, \quad (17) \quad x_1x_2 = 0 \\ (18) & 2x_1x_3 - 3x_1x_4 + 2x_4^2 = 0, \quad (19) \quad x_3(-3x_1 + 4x_4) = 0. \end{cases}$$

Dalle (17), (18) si ricava  $x_1 = 0$ ,  $x_4 = 0$ . Sostituendo nella (16) si ha:

$$(20) \quad x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Dalla (20), posto  $x_2 = 1$ , si ricava  $x_3 = \pm i$ .

Si conclude che i punti doppi della superficie non rigata  $F^3$  sono due punti impropri che coincidono con i punti ciclici dello spazio:  $(0, 1, +i, 0)$  e  $(0, 1, -1, 0)$ . Si verifica facilmente che essi soddisfano anche l'equazione della superficie trovata.

## n. 2 – Conoide di Plücker (G. Vaccaro; Le superfici, pag. 106)

Trovare l'equazione della superficie rigata le cui generatrici si appoggiano ortogonalmente all'asse  $z$  e incontrano l'ellisse definita dalle equazioni

$$(1) \quad x = z, \quad x^2 + y^2 - 2ry = 0.$$

### Soluzione

La retta generica appoggiata all'asse  $z$  e perpendicolare ad esso ha l'equazione

$$(2) \quad z = h, \quad y = mx.$$

Il punto di intersezione con il piano dell'ellisse è dato dal sistema

$$(3) \quad \begin{cases} z = h, & y = mx \\ x = z. \end{cases}$$

Si ottiene il punto  $P(h, mh, h)$ . La retta considerata è una generatrice della rigata se e solo se il punto  $P$  soddisfa la rimanente equazione dell'ellisse, cioè se sussiste la relazione

$$(4) \quad h^2 + m^2h^2 - 2rmh = 0.$$

Per  $h \neq 0$  si ha  $h \cdot (1 + m^2) = 2r \cdot m$ .

Per una generatrice della rigata valgono quindi le relazioni:

$$(5) \quad y = mx, \quad z = h, \quad h(1 + m^2) = 2rm.$$

Da esse si ricava  $h = z$ ,  $m = y/x$ , e sostituendo nella (5<sub>3</sub>) si ottiene

$$(*) \quad z \left( 1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = 2r \frac{y}{x}, \quad \text{da cui}$$

$$(6) \quad z(x^2 + y^2) = 2ryx.$$

Si ha una superficie algebrica del 3° ordine, detta conoide di Plücker. Poiché la superficie  $F^3$  è rigata, essa possiede una retta doppia che troveremo. Il cono delle tangenti principali nell'origine  $O$  ha l'equazione  $xy = 0$  e quindi è spezzato in due piani distinti; ne segue che l'origine è un punto doppio biplanare.

Intersechiamo la superficie con un piano generico passante per l'asse  $z$

$$(7) \quad \begin{cases} z(x^2 + y^2) = 2ryx \\ y = \lambda x, \end{cases}$$

e facciamo vedere che questo asse è una retta doppia della superficie. Infatti, sostituendo si ha la cubica:

$$(*) \quad z(x^2 + \lambda^2 x^2) = 2r\lambda x^2, \quad \text{da cui}$$

$$(9) \quad x^2(\lambda^2 z + z - 2r\lambda) = 0.$$

Effettivamente, la cubica di intersezione si spezza nell'asse  $z$  ( $x = 0, y = 0$ ) contato due volte e in un'altra retta di equazioni

$$(10) \quad \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \frac{2r\lambda}{\lambda^2 + 1}. \end{cases}$$

Poiché l'asse  $z$  è una retta doppia e le generatrici si appoggiano ortogonalmente all'asse, da ogni suo punto escono due generatrici che potremo ottenere intersecando la rigata con il piano  $z = h$ , quindi:

$$(11) \quad \begin{cases} z(x^2 + y^2) = 2r \cdot xy \\ z = h. \end{cases}$$

Si ottiene

$$(*) \quad hy^2 - 2rxy + hx^2 = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(*) \quad h \left( \frac{y}{x} \right)^2 - 2r \frac{y}{x} + h = 0.$$

Risolvendo si ha 
$$\frac{y}{x} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - h^2}}{h} .$$

Le generatrici passanti per un punto  $P(0,0,h)$  dell'asse  $z$  hanno quindi le equazioni:

$$(12) \quad \begin{cases} z = h \\ y = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - h^2}}{h} x . \end{cases}$$

Esse sono reali e distinte se  $|h| < r$ , reali e coincidenti per  $|h| = r$ , complesse coniugate per  $|h| > r$ .

### n. 3 – Esempio di superficie rigata (G. Vaccaro; Le superfici, pg. 107)

Trovare l'equazione della superficie rigata luogo delle rette appoggiate ortogonalmente all'asse  $z$  e tangenti alla sfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ .

#### Soluzione

La generica retta appoggiata all'asse  $z$  e perpendicolare ad esso ha l'equazione

$$(1) \quad z = h, \quad y = mx .$$

I punti di intersezione con la sfera sono dati dal sistema

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \\ z = h, \quad y = mx . \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione

$$(3) \quad x^2 + m^2 x^2 + h^2 - 2x = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(3') \quad (1 + m^2)x^2 - 2x + h^2 = 0 .$$

La retta è tangente alla sfera se e solo se il discriminante  $\Delta$  dell'equazione è nullo, ossia se

$$(4) \quad 1 - h^2(1 + m^2) = 0 .$$

Eliminiamo i parametri  $h$  ed  $m$  fra le tre equazioni del sistema

$$(5) \quad \begin{cases} h = z, & m = y/x \\ h^2(1+m^2) - 1 = 0 . \end{cases}$$

Sostituendo si ha:

$$(*) \quad z^2 \left( 1 + \frac{y^2}{x^2} \right) - 1 = 0 , \quad \text{e quindi}$$

$$(6) \quad F^4 \equiv z^2(x^2 + y^2) - x^2 = 0 .$$

Si ottiene una superficie rigata del 4° ordine, che ha nell'origine un punto doppio uniplanare di equazione  $x^2 = 0$  (quindi il cono delle tangenti principali nell'origine si riduce a due piani coincidenti).

Intersechiamo la superficie  $F^4$  con un piano  $y = \lambda x$  passante per l'asse  $z$ . Sostituendo nella (6) si ha :

$$(*) \quad z^2(x^2 + \lambda^2 x^2) - x^2 = 0 , \quad \text{da cui}$$

$$(7) \quad x^2 [(\lambda^2 + 1)z^2 - 1] = 0 .$$

Si ottiene la soluzione doppia  $x = 0, y = 0$ ; ne segue che l'asse  $z$  è una retta doppia della superficie.

Troviamo ora la  $C^4$  che si ottiene intersecando la rigata  $F^4$  con un generico piano perpendicolare all'asse  $z$ . Passando a coordinate omogenee si ha il sistema:

$$(8) \quad \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2)x_3^2 = x_1^2 x_4^2 \\ x_3 = kx_4 . \end{cases}$$

Si ottiene

$$(9) \quad (x_1^2 + x_2^2)k^2 x_4^2 = x_1^2 x_4^2 .$$

La  $C^4$  si spezza nella retta doppia  $x_3 = 0, x_4 = 0$  (retta impropria del piano  $xy$ ), e nella conica

$$(10) \quad x_1^2 = k^2(x_1^2 + x_2^2), \quad \rightarrow \quad x_1^2(1 - k^2) = k^2 x_2^2 , \quad \text{ossia}$$

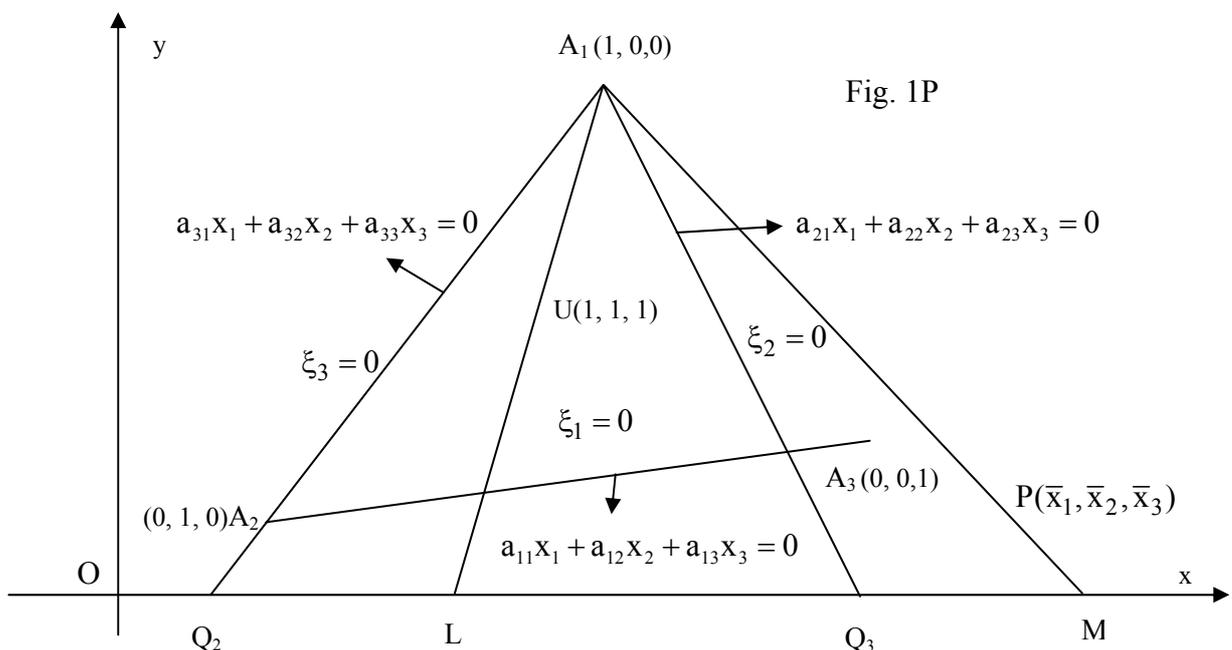
$$(11) \quad x_2 = \pm x_1 \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k} .$$

La (10), pertanto, è una conica degenera che ci dà le due generatrici della  $F^4$  che escono dal punto  $P(0,0,k)$ . Esse risultano reali e distinte, reali e coincidenti o immaginarie coniugate a seconda che sia  $|k| < 1$ ,  $|k| = 1$  o  $|k| > 1$ .

## ELEMENTI DI GEOMETRIA PROIETTIVA

### n. 1 – Coordinate proiettive omogenee in un piano

Si dice riferimento proiettivo su un piano  $\alpha$  un sistema costituito da tre punti non allineati  $A_1, A_2, A_3$ , vertici di un triangolo fondamentale, e da un quarto punto  $U$ , detto punto unità, che non cada su alcuna delle rette che congiungono due a due i vertici del triangolo (fig. 1P).



Fissato un riferimento cartesiano  $Oxy$  sul piano  $\alpha$ , consideriamo le equazioni cartesiane omogenee delle tre rette

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & A_2A_3 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\
 & A_3A_1 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\
 & A_1A_2 : a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 ;
 \end{aligned}$$

poiché le rette non passano per uno stesso punto, si avrà  $\det|a_{ik}| \neq 0$ .

Consideriamo ora la trasformazione lineare non degenera

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_1 = \rho(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ \xi_2 = \rho(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ \xi_3 = \rho(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \end{cases} \quad \text{con } \det|a_{ik}| \neq 0 ;$$

brevemente (2')  $\xi_i = \rho \sum_{k=1}^3 a_{ik}x_k \quad \text{con } i=1,2,3$ .

Come sappiamo, ad ogni terna non tutta nulla  $(x_1, x_2, x_3)$  corrisponde un punto  $P$  del piano  $\alpha$ , mentre ad ogni punto  $P(x,y)$  del piano corrisponde una terna  $(x_1, x_2, x_3)$  determinata a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo:

$$(3) \quad x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Dalle equazioni (2) si ha una conseguenza: terne  $(x_1, x_2, x_3)$ , che differiscono per un coefficiente di proporzionalità non nullo, hanno come corrispondenti terne  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , definite anche esse a meno di un coefficiente di proporzionalità.

Facciamo ora corrispondere ad ogni punto  $P$  del piano  $\alpha$  non più la terna  $(x_1, x_2, x_3)$ , ma la terna  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , anche essa definita a meno di un coefficiente di proporzionalità, tratta dalle (2). Viceversa, ad ogni terna  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  possiamo far corrispondere la terna non tutta nulla  $(x_1, x_2, x_3)$ , che si ottiene risolvendo il sistema (2), e quindi un punto  $P$  del piano  $\alpha$ . Ne segue che le variabili  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  hanno le stesse proprietà delle coordinate cartesiane omogenee del punto  $P$ . Per questo motivo esse si dicono coordinate proiettive omogenee del punto considerato e si scrive  $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Tenendo presente le (2), le rette (1) appaiono come il luogo dei punti del piano  $\alpha$  che in coordinate proiettive omogenee hanno le equazioni

$$(4) \quad A_2A_3: \xi_1 = 0, \quad A_3A_1: \xi_2 = 0, \quad A_1A_2: \xi_3 = 0.$$

Il punto  $A_1$  è comune alle rette  $\xi_2 = 0, \xi_3 = 0$  e quindi ha le coordinate  $A_1(1, 0, 0)$ . Si trova così che i tre vertici del triangolo fondamentale hanno le coordinate (fig. 1):

$$(5) \quad A_1(1, 0, 0), \quad A_2(0, 1, 0), \quad A_3(0, 0, 1).$$

Il punto  $U$  di coordinate proiettive omogenee  $(1, 1, 1)$  non appartiene ad alcuna delle rette  $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0$  e viene detto punto unitario.

Ovviamente, affinché il punto  $U$ , di coordinate cartesiane omogenee  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , abbia le coordinate proiettive  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1$  è necessario che si abbia

$$(*) \quad 1 = \rho(a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + a_{i3}x'_3), \quad \text{con } i=1,2,3 .$$

Consideriamo ora il fascio di rette di centro  $A_1$ , che in coordinate cartesiane omogenee ha l'equazione

$$(6) \quad \lambda(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \mu(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0 .$$

Affinché tale retta passi per il generico punto di coordinate cartesiane omogenee  $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  dovrà essere

$$(*) \quad \lambda(a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3) + \mu(a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3) = 0 .$$

Si ricava la soluzione

$$(7) \quad \lambda = a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3, \quad \mu = -(a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3) .$$

Ma dalle equazioni (2) della trasformazione lineare si ricava

$$(8) \quad \rho(a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3) = \bar{\xi}_3 \quad \text{e} \quad \rho(a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3) = \bar{\xi}_2 .$$

Confrontando le relazioni (7), (8) si ha

$$(9) \quad \rho\lambda = \bar{\xi}_3, \quad -\rho\mu = \bar{\xi}_2 .$$

Poiché possiamo porre  $\rho = 1$ , si ottiene (9')  $\lambda = \bar{\xi}_3, \quad \mu = -\bar{\xi}_2$ .

Con questi valori, l'equazione (6) della retta  $A_1P$  diventa:

$$(10) \quad A_1P: \quad \bar{\xi}_3(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) - \bar{\xi}_2(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0 .$$

Per avere l'equazione cartesiana della retta  $A_1U$  basterà porre nella (10)  $\bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_2 = 1$  e così si ricava

$$(11) \quad A_1U: \quad (a_{21} - a_{31})x_1 + (a_{22} - a_{32})x_2 + (a_{23} - a_{33})x_3 = 0 .$$

Consideriamo ora le rette

$$\begin{aligned}
 (*) \quad A_1A_2 : & \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \\
 A_1A_3 : & \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 ,
 \end{aligned}$$

e le rette  $A_1U$  e  $A_1P$ , e siano rispettivamente  $Q_2, Q_3, M$  ed  $L$  i loro punti di intersezione con l'asse  $x$  ( $x_2 = 0$ ) del riferimento  $Oxy$ .

Vogliamo trovare le coordinate cartesiane omogenee del punto  $M$ . Si ha:

$$(*) \quad \bar{\xi}_3(a_{21}x_1 + a_{23}x_3) - \bar{\xi}_2(a_{31}x_1 + a_{33}x_3) = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(*) \quad x_1(a_{21}\bar{\xi}_3 - a_{31}\bar{\xi}_2) - x_3(a_{33}\bar{\xi}_2 - a_{23}\bar{\xi}_3) = 0, \quad \text{e quindi}$$

$$(12) \quad M \rightarrow \frac{x_1}{x_3} = \frac{a_{33}\bar{\xi}_2 - a_{23}\bar{\xi}_3}{a_{21}\bar{\xi}_3 - a_{31}\bar{\xi}_2}.$$

Per le coordinate cartesiane non omogenee dei punti  $Q_2, Q_3, L$  si ha:

$$(13) \quad Q_2 : \frac{x_1}{x_3} = -\frac{a_{33}}{a_{31}}, \quad Q_3 : \frac{x_1}{x_3} = -\frac{a_{23}}{a_{21}}, \quad L : \frac{x_1}{x_3} = \frac{a_{33} - a_{23}}{a_{21} - a_{31}}.$$

Ricordando che il birapporto di quattro semirette condotte da uno stesso punto rimane invariato per operazioni di proiezione e sezione, si ha:

$$(14) \quad A_1(A_2A_3UP) = (Q_2Q_3LM).$$

Esprimendo il secondo birapporto per mezzo di due rapporti semplici si ha:

$$(15) \quad A_1(A_2A_3UP) = (Q_2Q_3LM) = \frac{(Q_2Q_3L)}{(Q_2Q_3M)} = \frac{Q_2L}{Q_3L} \cdot \frac{Q_3M}{Q_2M}.$$

Passiamo alle ascisse dei punti  $Q_2, Q_3, L, M$  e sviluppiamo separatamente i due birapporti. Si ha:

$$(*) \quad \frac{Q_2L}{Q_3L} = \frac{\frac{a_{33} - a_{23}}{a_{21} - a_{31}} + \frac{a_{33}}{a_{31}}}{\frac{a_{33} - a_{23}}{a_{21} - a_{31}} + \frac{a_{23}}{a_{21}}} = \frac{\cancel{a_{31}a_{33}} - a_{31}a_{23} + a_{33}a_{21} - \cancel{a_{33}a_{31}}}{a_{31}(a_{21} - \cancel{a_{31}})},$$

$$(16) \quad \frac{Q_2L}{Q_3L} = \frac{a_{21}(\cancel{a_{21}a_{33}} - a_{23}a_{31})}{a_{31}(\cancel{a_{21}a_{33}} - a_{23}a_{31})} = \frac{a_{21}}{a_{31}}.$$

$$(*) \quad \frac{Q_3 M}{Q_2 M} = \frac{\frac{a_{33}\bar{\xi}_2 - a_{23}\bar{\xi}_3}{a_{21}\bar{\xi}_3 - a_{31}\bar{\xi}_2} + \frac{a_{23}}{a_{21}}}{\frac{a_{33}\bar{\xi}_2 - a_{23}\bar{\xi}_3}{a_{21}\bar{\xi}_3 - a_{31}\bar{\xi}_2} + \frac{a_{33}}{a_{31}}},$$

$$(*) \quad \frac{Q_3 M}{Q_2 M} = \frac{\frac{a_{21}a_{33}\bar{\xi}_2 - a_{21}a_{23}\bar{\xi}_3 + a_{21}a_{23}\bar{\xi}_3 - a_{23}a_{31}\bar{\xi}_2}{a_{21}(a_{21}\bar{\xi}_3 - a_{31}\bar{\xi}_2)}}{\frac{a_{31}a_{33}\bar{\xi}_2 - a_{31}a_{23}\bar{\xi}_3 + a_{33}a_{21}\bar{\xi}_3 - a_{33}a_{31}\bar{\xi}_2}{a_{31}(a_{21}\bar{\xi}_3 - a_{31}\bar{\xi}_2)}},$$

$$(17) \quad \frac{Q_3 M}{Q_2 M} = \frac{a_{31}\bar{\xi}_2 (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})}{a_{21}\bar{\xi}_3 (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})} = \frac{a_{31}\bar{\xi}_2}{a_{21}\bar{\xi}_3}.$$

Sostituendo i valori (16), (17) nel birapporto (15) si ha

$$(*) \quad A_1(A_2 A_3 UP) = \frac{a_{21}}{a_{31}} \cdot \frac{a_{31}\bar{\xi}_2}{a_{21}\bar{\xi}_3}, \quad \text{quindi}$$

$$(18) \quad A_1(A_2 A_3 UP) = \frac{\bar{\xi}_2}{\bar{\xi}_3}.$$

Con procedimenti di calcolo analoghi, si ricava:

$$(19) \quad A_2(A_3 A_1 UP) = \frac{\bar{\xi}_3}{\bar{\xi}_1}, \quad \text{da cui} \quad A_2(A_1 A_3 UP) = \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\xi}_3},$$

$$(20) \quad A_3(A_1 A_2 UP) = \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\xi}_2}.$$

Abbiamo così trovato un significato geometrico per il rapporto di due qualsiasi coordinate proiettive omogenee del punto  $P(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ : questo significato è legato ai punti del riferimento proiettivo  $RP(A_1 A_2 A_3 U)$  per mezzo dei birapporti (18), (19), (20).

Le quantità  $\bar{\xi}_1/\bar{\xi}_2$ ,  $\bar{\xi}_2/\bar{\xi}_3$  si dicono coordinate proiettive non omogenee del punto  $P$ .

### RIASSUNTO

Se in un piano  $\alpha$  introduciamo un sistema di coordinate cartesiane omogenee  $(x_1, x_2, x_3)$ , quattro punti arbitrari  $A_1, A_2, A_3, U$ , tre a tre non allineati, individuano le rette di equazioni

$$(21) \quad \begin{aligned} A_2 A_3 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ A_3 A_1 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \quad \text{con } \det|a_{ik}| \neq 0 . \\ A_1 A_2 : a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 , \end{aligned}$$

Possiamo allora definire per i punti del piano un sistema di coordinate proiettive omogenee  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , legate alle precedenti mediante le relazioni

$$(22) \quad \begin{cases} \xi_1 = \rho(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ \xi_2 = \rho(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ \xi_3 = \rho(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \end{cases} \quad \text{con } \det|a_{ik}| \neq 0 ,$$

Poiché i coefficienti  $a_{ik}$  di ciascuna retta sono determinati a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo, le equazioni della trasformazione di coordinate si scrivono più in generale nella forma

$$(22) \quad \begin{cases} \xi_1 = \lambda_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ \xi_2 = \lambda_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ \xi_3 = \lambda_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \end{cases} \quad \text{con } \det|a_{ik}| \neq 0 ,$$

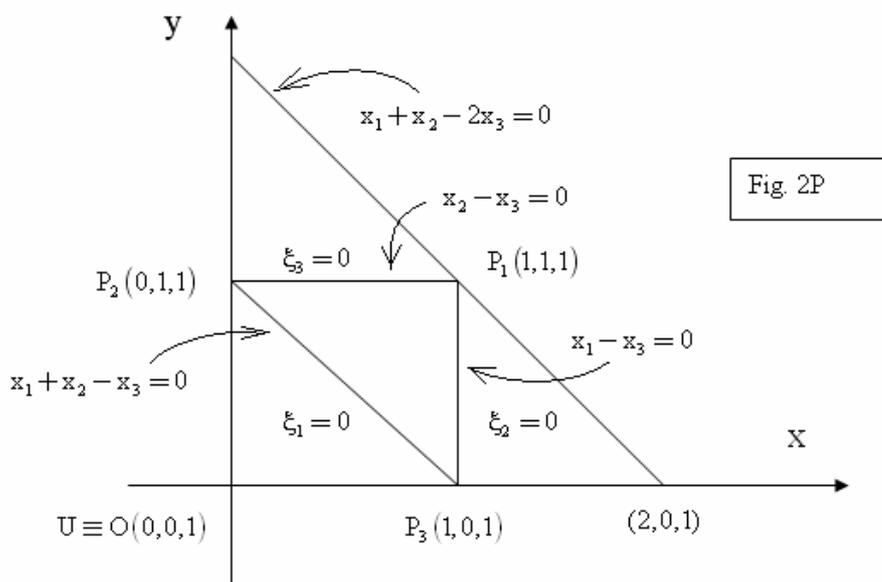
ove  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sono coefficienti di proporzionalità non nulli.

## n. 2 – Esercizio 1 (D. Ghinelli; Esercizi di Geometria, pag. 104)

Dato un riferimento cartesiano Oxy, verificare che i punti  $P_1(1,1)$ ,  $P_2(0,1)$ ,  $P_3(1,0)$ ,  $U(0,0)$  costituiscono un riferimento proiettivo. Scrivere l'equazione rispetto al riferimento proiettivo  $RP(P_1P_2P_3U)$  della retta che nel riferimento cartesiano ha l'equazione (1):  $x + y - 2 = 0$ .

Dal grafico si vede che i quattro punti sono tre a tre non allineati e quindi essi possono essere assunti come vertici e punto unità di un riferimento proiettivo (fig. 2P). In figura sono indicati in coordinate proiettive i vertici e le rette sulle quali giacciono i lati del triangolo. In particolare si ha:

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{retta } P_2P_3 : x_1 + x_2 - x_3 &= 0 & \xi_1 &= 0 \\ \text{retta } P_3P_1 : x_1 - x_3 &= 0 & \xi_2 &= 0 \\ \text{retta } P_1P_2 : x_2 - x_3 &= 0 & \xi_3 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow$$



- (3)  $U(0,0,1)$ , in coordinate  $x_1, x_2, x_3$   
 $U(1,1,1)$  in coordinate  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  .

Le formule di trasformazione dalle coordinate cartesiane alle coordinate proiettive sono date dal sistema:

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_1 = \rho_1(x_1 + x_2 - x_3) \\ \xi_2 = \rho_2(x_1 - x_3) \\ \xi_3 = \rho_3(x_2 - x_3) \end{cases} .$$

Imponendo che al punto  $U_\xi(1,1,1)$  corrisponda il punto  $U_x(0,0,1)$  si ricavano i valori:

$$(5) \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -1 .$$

Con questi valori, le formule di trasformazione (4) diventano

$$(6) \quad \begin{cases} \xi_1 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ \xi_2 = -x_1 + x_3 \\ \xi_3 = -x_2 + x_3 \end{cases} , \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -\xi_1 \\ x_1 + 0 - x_3 = -\xi_2 \\ 0 + x_2 - x_3 = -\xi_3 \end{cases} .$$

Ricavando  $x_3$  dalla terza equazione e sostituendo nelle prime due si ha:

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 + \cancel{x_2} - \cancel{x_2} - \xi_3 = -\xi_1 \\ x_1 - x_2 - \xi_3 = -\xi_2 \\ x_3 = x_2 + \xi_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\xi_1 + \xi_3 \\ -\xi_1 + \cancel{\xi_3} - x_2 - \cancel{\xi_3} = -\xi_2 \\ x_3 = x_2 + \xi_3 \end{cases}$$

e quindi (8) 
$$\begin{cases} x_1 = -\xi_1 + \xi_3 \\ x_2 = -\xi_1 + \xi_3 \\ x_3 = -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \end{cases} .$$

Ma ora, passando a coordinate omogenee, la retta  $x + y - 2 = 0$  diventa:

(9) 
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 .$$

Sfruttando le sostituzioni (8) l'equazione della retta diventa

(\*) 
$$\cancel{-\xi_1} + \xi_3 - \cancel{\xi_1} + \xi_2 + \cancel{2\xi_1} - 2\xi_2 - 2\xi_3 = 0 , \text{ da cui}$$

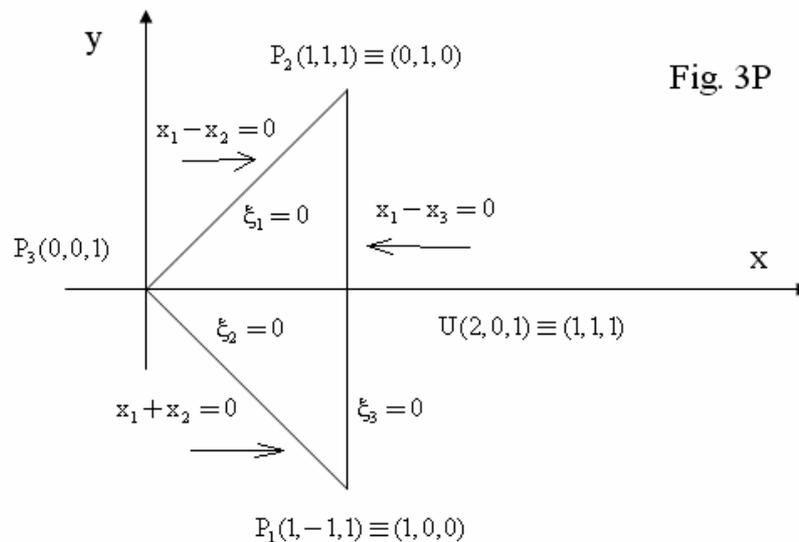
(\*) 
$$-\xi_2 - \xi_3 = 0 , \text{ ossia (10): } \xi_2 + \xi_3 = 0 .$$

**n. 3 – Esercizio 2** (D. Ghinelli; Esercizi di Geometria, pag. 105)

In un piano affine ampliato è dato un sistema di coordinate affini omogenee  $(x_1, x_2, x_3)$ . Determinare le formule di trasformazione tra queste coordinate e le coordinate proiettive omogenee  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  relative al riferimento che ha come punti fondamentali i punti

(1) 
$$P_1(1, -1, 1), \quad P_2(1, 1, 1), \quad P_3(0, 0, 1)$$

e come punto unità il punto  $U(2, 0, 1)$ . Scrivere l'equazione della retta impropria in coordinate proiettive  $\xi$ .



Dalla figura 3P si vede che i quattro punti sono tre a tre non allineati e quindi essi possono essere assunti come vertici e punto unità di un riferimento proiettivo. In figura

sono indicati in coordinate proiettive i vertici e le rette sulle quali giacciono i lati del triangolo. In particolare si ha:

$$\begin{aligned}
 & \text{retta } P_2P_3 : x_1 - x_2 = 0 \quad \xi_1 = 0 \quad P_3(0,0,1) \\
 (2) \quad & \text{retta } P_3P_1 : x_1 + x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \xi_2 = 0 ; \quad P_1(1,0,0) \\
 & \text{retta } P_1P_2 : x_1 - x_3 = 0 \quad \xi_3 = 0 \quad P_2(0,1,0) \\
 \\
 (3) \quad & U(2,0,1), \quad \text{in coordinate } x_1, x_2, x_3 \\
 & U(1,1,1) \quad \text{in coordinate } \xi_1, \xi_2, \xi_3 .
 \end{aligned}$$

Le formule di trasformazione dalle coordinate cartesiane alle coordinate proiettive sono date dal sistema:

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_1 = \rho_1(x_1 - x_2 + 0) \\ \xi_2 = \rho_2(x_1 + x_2 + 0) \\ \xi_3 = \rho_3(x_1 + 0 - x_3) . \end{cases}$$

Imponendo che al punto  $U_\xi(1,1,1)$  corrisponda il punto  $U_x(2,0,1)$  si ha:

$$(5) \quad \begin{cases} 1 = \rho_1(2 - 0 - 0) \\ 1 = \rho_2(2 + 0 + 0) \\ 1 = \rho_3(2 + 0 - 1) . \end{cases}$$

Si ricavano i valori

$$(6) \quad \rho_1 = 1/2 , \quad \rho_2 = 1/2 , \quad \rho_3 = +1 .$$

Con questi valori, le formule di trasformazione (4) diventano

$$(7) \quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ \xi_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \xi_3 = x_1 - x_3 , \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 2\xi_1 \\ x_1 + x_2 = 2\xi_2 \\ x_1 - x_3 = \xi_3 . \end{cases}$$

$$\text{Si ricava} \quad (*) \quad \begin{cases} 2x_1 = 2\xi_1 + 2\xi_2 \\ 2x_2 = -2\xi_1 + 2\xi_2 \\ x_3 = x_1 - \xi_3 , \end{cases} \quad \text{e infine} \quad \begin{cases} x_1 = \xi_1 + \xi_2 \\ x_2 = -\xi_1 + \xi_2 \\ x_3 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 . \end{cases}$$

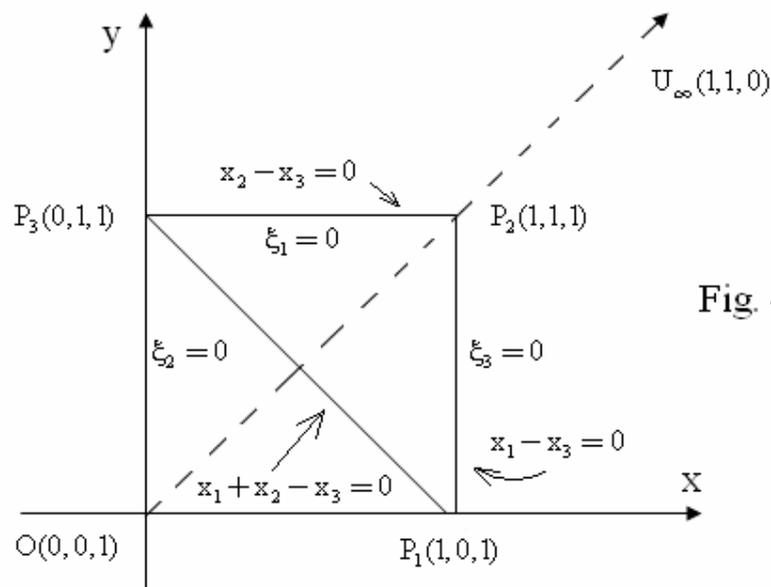
Alla retta impropria  $x_3 = 0$  del piano  $xy$  corrisponde, nel riferimento proiettivo, la retta di equazione

$$(8) \quad \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0 .$$

**n. 4 – Esercizio 3** (D. Ghinelli; Esercizi di Geometria, pag. 105)

In un sistema di coordinate affini omogenee  $(x_1, x_2, x_3)$  sono dati i punti  $P_1(1,0,1)$ ,  $P_2(1,1,1)$ ,  $P_3(0,1,1)$  e  $U_\infty(1,1,0)$  (punto improprio della retta  $y = x$ ). Verificare che essi si possono assumere rispettivamente come vertici e punto unità di un riferimento proiettivo  $RP(P_1P_2P_3U)$ .

Scrivere le equazioni dell'asse  $x$ , dell'asse  $y$  e della retta impropria  $x_3 = 0$  del piano  $xy$  nelle coordinate proiettive omogenee  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .



Dalla figura 4P si vede che i quattro punti sono tre a tre non allineati e quindi essi possono essere assunti come vertici e punto unità di un riferimento proiettivo. In figura sono indicati in coordinate proiettive i vertici e le rette sulle quali giacciono i lati del triangolo. In particolare si ha:

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{retta } P_2P_3 : x_2 - x_3 = 0 & \xi_1 = 0 \\ \text{retta } P_3P_1 : x_1 + x_2 - x_3 = 0 & \xi_2 = 0 \\ \text{retta } P_1P_2 : x_1 - x_3 = 0 & \xi_3 = 0 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{ll} U(1,1,0), & \text{in coordinate } x_1, x_2, x_3, \\ U(1,1,1) & \text{in coordinate } \xi_1, \xi_2, \xi_3. \end{array}$$

Le formule di trasformazione dalle coordinate cartesiane alle coordinate proiettive sono date dal sistema:

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_1 = \rho_1(x_2 - x_3) \\ \xi_2 = \rho_2(x_1 + x_2 - x_3) \\ \xi_3 = \rho_3(x_1 - x_3) \end{cases} .$$

Imponendo che al punto  $U_\xi(1,1,1)$  corrisponda il punto  $U_x(1,1,0)$  si ottiene:

$$(5) \quad 1 = \rho_1, \quad 1 = 2\rho_2, \quad 1 = \rho_3.$$

Si ricavano così i valori

$$(6) \quad \rho_1 = 1, \quad \rho_2 = 1/2, \quad \rho_3 = 1 .$$

Con questi valori, le formule di trasformazione (4) diventano:

$$(7) \quad \begin{cases} \xi_1 = x_2 - x_3 \\ \xi_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \\ \xi_3 = x_1 - x_3 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x_2 - x_3 = \xi_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2\xi_2 \\ x_1 - x_3 = \xi_3 \end{cases} .$$

Dalla prima e dalla seconda equazione si ricava:

$$(8) \quad \begin{cases} x_2 = x_3 + \xi_1 \\ x_1 + \xi_1 = 2\xi_2 \\ x_3 = x_1 - \xi_3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_2 = x_3 + \xi_1 \\ x_1 = -\xi_1 + 2\xi_2 \\ x_3 = -\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 \end{cases} \rightarrow$$

$$(*) \quad \begin{cases} x_2 = -\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + \xi_1 \\ x_1 = -\xi_1 + 2\xi_2 \\ x_3 = -\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 \end{cases}$$

e quindi (9) 
$$\begin{cases} x_1 = -\xi_1 + 2\xi_2 \\ x_2 = 2\xi_2 - \xi_3 \\ x_3 = -\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 \end{cases} .$$

Dalle (9) si ricava che, in coordinate proiettive,

- 1) l'asse  $x$ ,  $x_2 = 0$ , ha l'equazione  $2\xi_2 - \xi_3 = 0$ ,
- 2) l'asse  $y$ ,  $x_1 = 0$ , ha l'equazione  $-\xi_1 + 2\xi_2 = 0$ ,
- 3) la retta impropria del piano  $xy$ ,  $x_3 = 0$ , ha l'equazione  $\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 = 0$ .

**n. 5 – Esercizio 4** (D. Ghinelli; Esercizi di Geometria, pag. 106)

Dato nel piano un sistema di coordinate cartesiane omogenee  $x_1, x_2, x_3$ , determinare le formule di trasformazione da queste coordinate alle coordinate proiettive omogenee  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , sapendo che le rette  $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0$  hanno rispettivamente le equazioni omogenee

$$(1) \quad x_2 - 2x_3 = 0, \quad 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \quad 2x_1 - x_2 - x_3 = 0,$$

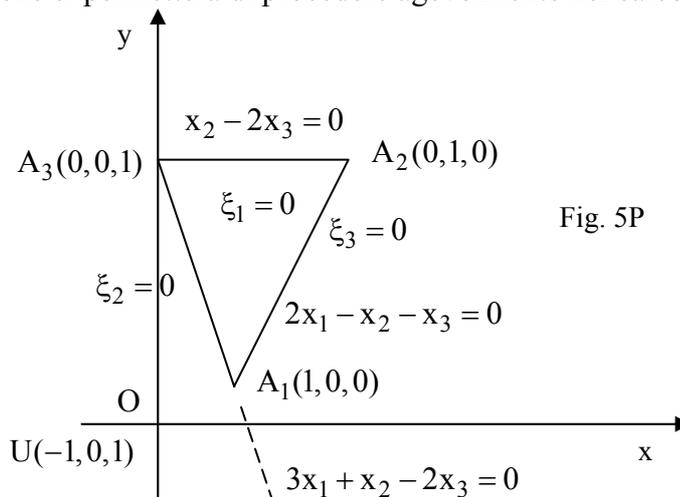
e che il punto unità  $U$  delle coordinate proiettive ha le coordinate cartesiane omogenee  $(-1, 0, 1)$ . Determinare inoltre l'equazione, in coordinate proiettive, della retta impropria  $x_3 = 0$  del riferimento cartesiano.

Soluzione

Le tre rette hanno le equazioni cartesiane non omogenee

$$(1') \quad y = 2, \quad y = -3x + 2, \quad y = 2x - 1.$$

Esse ci permettono di tracciare correttamente il triangolo proiettivo fondamentale, ma questo sarebbe poco maneggevole. Per questo motivo faremo un disegno un po' arbitrario, ma che ci permetterà di procedere agevolmente nei calcoli (fig. 5P).



Indichiamo con  $A_1(1, 0, 0)$ ,  $A_2(0, 1, 0)$ ,  $A_3(0, 0, 1)$  i vertici del triangolo proiettivo e con  $U(-1, 0, 1)$  il punto unità.

Le rette su cui giacciono i lati del triangolo hanno le equazioni cartesiane omogenee e proiettive seguenti:

$$(2) \quad \begin{array}{lll} \text{retta } A_2A_3 & x_1 - 2x_3 = 0 & \xi_1 = 0 \\ \text{retta } A_3A_1 & \rightarrow 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 & \rightarrow \xi_2 = 0 \\ \text{retta } A_1A_2 & 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 & \xi_3 = 0. \end{array}$$

Poiché le coordinate proiettive e le coordinate cartesiane omogenee sono determinate a meno di un comune coefficiente di proporzionalità, le formule di trasformazione da un sistema di coordinate all'altro sono date dalle sostituzioni lineari

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_1 = \rho_1(x_2 - 2x_3) \\ \xi_2 = \rho_2(3x_1 + x_2 - 2x_3) \\ \xi_3 = \rho_3(2x_1 - x_2 - x_3) \end{cases} .$$

Imponendo che al punto  $U_\xi(1,1,1)$  corrisponda il punto  $U_x(-1,0,1)$  si ricavano i valori

$$(5) \quad \begin{cases} 1 = \rho_1(0 - 2) \\ 1 = \rho_2(-3 + 0 - 2) \\ 1 = \rho_3(-2 + 0 - 1) \end{cases} .$$

Si ricavano i valori

$$(6) \quad \rho_1 = -1/2, \quad \rho_2 = -1/5, \quad \rho_3 = -1/3 .$$

Con questi valori, le formule di trasformazione (4) diventano:

$$(7) \quad \begin{cases} \xi_1 = -\frac{1}{2}(x_2 - 2x_3) \\ \xi_2 = -\frac{1}{5}(3x_1 + x_2 - 2x_3) \\ \xi_3 = -\frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - x_3) \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$$(*) \quad \begin{cases} 15x_2 - 30x_3 = -30\xi_1 \\ 18x_1 + 6x_2 - 12x_3 = -30\xi_2 \\ 20x_1 - 10x_2 - 10x_3 = -30\xi_3 \end{cases} .$$

Poiché  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  sono determinati a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo, possiamo scrivere

$$(8) \quad \begin{cases} 15x_2 - 30x_3 = \xi_1 \\ 18x_1 + 6x_2 - 12x_3 = \xi_2 \\ 20x_1 - 10x_2 - 10x_3 = \xi_3 \end{cases} .$$

Nel riferimento  $(x_1x_2x_3)$  i punti  $X_\infty$  e  $Y_\infty$  hanno le coordinate

$$(9) \quad X_\infty(1,0,0), \quad Y_\infty(0,1,0) .$$

Nel riferimento proiettivo  $(\xi_1\xi_2\xi_3)$  a questi punti corrispondono due punti  $\bar{X}_\infty, \bar{Y}_\infty$ .

Per le coordinate  $\bar{X}_\infty$  si ha

$$(10) \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 18, \quad \xi_3 = 20,$$

quindi  $\bar{X}_\infty(0,18,20)$ , ossia  $\bar{X}_\infty(0,9,10)$ .

Per le coordinate di  $\bar{Y}_\infty$  si ha

$$(11) \quad \xi_1 = 15, \quad \xi_2 = 6, \quad \xi_3 = -10,$$

quindi  $\bar{Y}_\infty(15,6,-10)$ .

Nel riferimento proiettivo  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  la retta impropria è quella che passa per i punti  $\bar{X}_\infty, \bar{Y}_\infty$ . La sua equazione è:

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 15 & 6 & -10 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Sviluppando si ha}$$

$$(13) \quad \xi_1(-90-60) + \xi_2(150-0) + \xi_3(0-135) = 0,$$

$$-150\xi_1 + 150\xi_2 - 135\xi_3 = 0, \quad \text{e quindi}$$

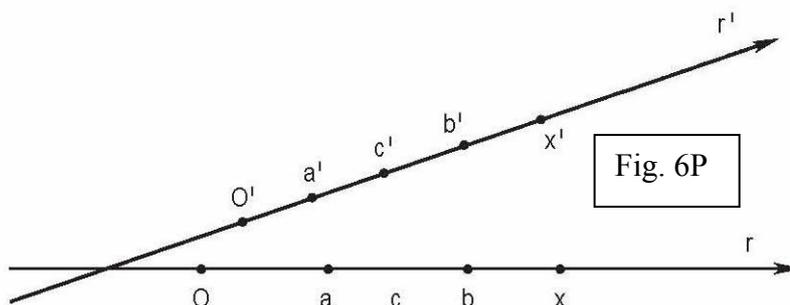
$$(14) \quad 10\xi_1 - 10\xi_2 + 9\xi_3 = 0.$$

## n . 6 – Definizione di proiettività fra due punteggiate

Due forme di prima specie, es. due punteggiate, si dicono proiettive quando esiste fra di esse una corrispondenza biunivoca tale che il birapporto di quattro punti qualsiasi della prima retta sia uguale al birapporto dei quattro elementi corrispondenti della seconda retta.

Vogliamo ora trovare l'equazione di una proiettività tra due punteggiate distinte  $r$  ed  $r'$ . Fissiamo sulla retta  $r$  un riferimento cartesiano  $Ox$  e sulla retta  $r'$  un riferimento  $O'x'$ .

Siano  $a, b, c$  le ascisse di tre punti distinti della retta  $r$  e  $a', b', c'$  le ascisse dei punti corrispondenti della retta  $r'$  (fig. 6P).



Siano poi  $x$  e  $x'$  le ascisse di due punti corrispondenti delle due punteggiate. L'equazione della proiettività  $\pi$  è data dall'eguaglianza di due birapporti:

$$(1) \quad (abcx) = (a'b'c'x').$$

Sviluppando si ricava

$$(2) \quad \alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0, \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Dalla (2) si ricavano le trasformazioni lineari non degeneri

$$(3) \quad x' = -\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma}, \quad \text{e} \quad (4) \quad x = -\frac{\gamma x' + \delta}{\alpha x' + \beta}.$$

## n. 7 – Punti uniti di una proiettività fra due punteggiate sovrapposte

Consideriamo una proiettività  $\pi$  fra due punteggiate sovrapposte  $r$  ed  $r'$ .

Per trovare la sua equazione dobbiamo anzitutto fissare su di esse lo stesso riferimento cartesiano. Siano ora  $a, b, c$  le ascisse di tre punti della retta  $r$  e  $a', b', c'$  le ascisse dei punti corrispondenti della retta  $r'$  (fig. 7P).

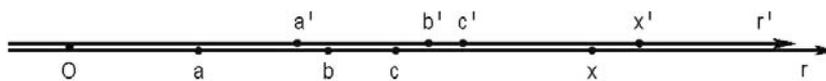


Fig. 7P

Consideriamo poi due punti corrispondenti qualsiasi  $X \in r$  ed  $X' \in r'$  e siano  $x, x'$  le loro ascisse.

L'equazione della proiettività  $\pi$  è data dall'eguaglianza di birapporti

$$(1) \quad (abcx) = (a'b'c'x').$$

Sviluppando la (1) si ha

$$(2) \quad \alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0, \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Quando  $x = x'$  i due punti  $X, X'$  coincidono ed essi si dicono punti uniti nella proiettività  $\pi$ . In tal modo dalla (2) si ha

$$(3) \quad \alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + \delta = 0.$$

L'equazione (3) ha due radici, quindi la proiettività tra due punteggiate sovrapposte ha due punti uniti. Essi sono reali e distinti, reali coincidenti o immaginari a seconda che sia

$$(4) \quad \Delta = (\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta > 0, = 0, < 0.$$

In corrispondenza la proiettività si dice iperbolica, parabolica o ellittica.

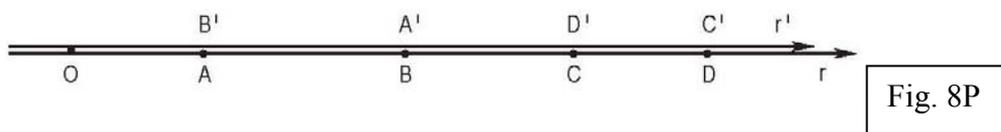
Se in una proiettività tra due forme sovrapposte esistono più di due elementi uniti, la (3) ha un numero di radici maggiore di due e quindi essa è identicamente soddisfatta, cosicché risulta  $\alpha = 0, \delta = 0, \beta + \gamma = 0$ , cioè  $\gamma = -\beta$ . Ma allora la (2) si scrive:

$$(5) \quad \beta x - \beta x' = 0, \quad \text{cioè} \quad x = x',$$

e quindi ciascun elemento coincide con il suo corrispondente, cioè: “ Se in una proiettività fra due punteggiate (o forme di prima specie) sovrapposte esistono più di due punti uniti, allora ogni altro punto (o elemento) è unito e la proiettività si riduce all'identità “.

## n. 8 – Involuzione tra due forme di prima specie sovrapposte

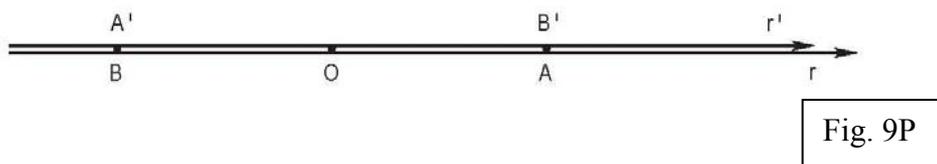
Consideriamo ancora una proiettività  $\pi$  fra due punteggiate sovrapposte  $r$  ed  $r'$ . Naturalmente dobbiamo fissare su di esse uno stesso riferimento cartesiano. Sia  $A$  un punto della retta  $r$  e  $B'$  il punto della retta  $r'$  sovrapposto ad  $A$  (fig. 8P).



La proiettività  $\pi$  fa corrispondere al punto  $A$  della punteggiata  $r$  un punto  $A'$  della punteggiata  $r'$ .

Ma al punto  $A'$  pensato appartenente alla retta  $r$  (lo chiameremo  $B$ ) la proiettività, in generale, non fa corrispondere il punto  $B'$  sovrapposto ad  $A$ . Qualora ciò si verifichi si dice che i punti  $A$  e  $A'$  si corrispondono in doppio modo o involutoriamente e si dice anche che la coppia  $(A, A')$  è involutoria o che ha carattere involutorio.

Per esempio, nel sostegno comune alle rette  $r$  ed  $r'$  fissiamo un punto  $O$  e ad ogni punto  $A$  della retta  $r$  facciamo corrispondere il punto  $A'$  di  $r'$  simmetrico di  $A$  rispetto al punto  $O$  (fig. 9P).



Ovviamente, al punto  $B$  di  $r$ , coincidente con  $A'$ , corrisponderà il punto  $B'$  di  $r'$  sovrapposto ad  $A$ .

La corrispondenza che così nasce fra  $r$  ed  $r'$  è una proiettività nella quale ogni coppia di punti corrispondenti  $(A, A')$  è involutoria. **Una proiettività in cui tutte le coppie di punti omologhi si corrispondono in doppio modo si dice involuzione e due elementi corrispondenti in una involuzione si dicono anche coniugati.**

Evidentemente, una proiettività involutoria  $\pi$  coincide con la sua inversa  $\pi^{-1}$ .

Teorema. “ Se in una proiettività fra due punteggiate sovrapposte  $r$  ed  $r'$  due punti distinti  $A$  e  $A'$  si corrispondono in doppio modo, anche tutte le altre coppie di punti omologhi si corrispondono in doppio modo (fig. 8P), cioè la proiettività è una involuzione. In altre parole, una proiettività involutoria  $\pi$  coincide con la sua inversa  $\pi^{-1}$  ”.

## n. 9 – Equazione di una involuzione

Consideriamo una proiettività  $\pi$  fra due punteggiate sovrapposte  $r$  ed  $r'$ , fissando su di esse uno stesso riferimento cartesiano. L'equazione che lega le ascisse  $x, x'$  di una coppia di punti corrispondenti è:

$$(1) \quad \alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0, \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Supponiamo che esista una coppia di punti involutoria e siano  $\bar{x}, \bar{x}'$  le ascisse dei punti. Sostituendo queste ascisse nella (1) si ha:

$$(2) \quad \begin{aligned} \alpha \bar{x} \cdot \bar{x}' + \beta \bar{x} + \gamma \bar{x}' + \delta &= 0, \\ \alpha \bar{x}' \cdot \bar{x} + \beta \bar{x}' + \gamma \bar{x} + \delta &= 0. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$(*) \quad \beta(\bar{x} - \bar{x}') + \gamma(\bar{x}' - \bar{x}) = 0, \quad \rightarrow \quad \beta(\bar{x} - \bar{x}') - \gamma(\bar{x} - \bar{x}') = 0,$$

$$\text{e quindi} \quad (\beta - \gamma)(\bar{x} - \bar{x}') = 0.$$

$$\text{Poiché} \quad \bar{x} \neq \bar{x}' \quad \text{si ha} \quad (3) \quad \beta = \gamma.$$

Ne segue che l'equazione della proiettività diventa

$$(4) \quad \alpha x x' + \beta(x + x') + \delta = 0, \quad \text{con} \quad \alpha\delta - \beta^2 \neq 0.$$

La (4) è un'equazione simmetrica in  $x, x'$ . Quindi ogni coppia di valori  $x, x'$  che la soddisfa dà luogo ad una nuova coppia di valori che soddisfa la (2) se si scambia la  $x$  con la  $x'$  e la  $x'$  con la  $x$ .

La (4), quindi, ci permette di dire che **se in una proiettività una coppia di punti è involutoria, tutte le coppie di punti omologhi sono involutorie, cioè la proiettività è una involuzione e la (4) è la sua equazione.**

Questo fatto è la traduzione analitica di una proprietà che si può dimostrare anche con considerazioni di carattere proiettivo.

Vogliamo ora trovare gli elementi uniti di una involuzione; essi sono detti elementi doppi (E. Martinelli, Geometria, pg. 103).

Nel caso di una involuzione fra due punteggiate sovrapposte parleremo più esattamente di punti doppi. Per trovare questi punti doppi basta porre  $x = x'$  nell'equazione dell'involuzione. Si ottiene così un'equazione di 2° grado

$$(5) \quad \alpha x^2 + 2\beta x + \delta = 0,$$

che ha due radici.

Il discriminante di questa equazione,  $\Delta = \alpha\delta - \beta^2$ , è  $\neq 0$  e può essere positivo o negativo, ma mai nullo.

Nel primo caso si hanno due punti uniti reali e distinti e l'involuzione si dice iperbolica. Nel secondo caso si hanno due punti immaginari coniugati e l'involuzione si dice ellittica.

Poiché  $\Delta = \alpha\delta - \beta^2 \neq 0$  l'involuzione non può avere mai due punti uniti coincidenti, cioè non esistono involuzioni paraboliche.

Diciamo inoltre: se due forme  $u$  e  $u'$  sono involutorie, data la simmetria del loro comportamento, non è necessario distinguere la  $u$  dalla  $u'$  e si parla quindi di involuzione sopra una retta o in un fascio di rette o di piani.

### n. 10 – Il centro e la potenza dell'involuzione sopra una punteggiata

Sopra una punteggiata  $r$  si abbia una involuzione  $\omega_0$ , i cui punti doppi  $U$  e  $V$  siano a distanza finita (fig. 10P).



Fig. 10P

Allora il punto improprio  $O'_\infty$  della  $r'$  sovrapposta ad  $r$  corrisponde un punto  $O$ , detto centro dell'involuzione e che è l'unico punto limite della  $\omega_0$ . Ovviamente per esso si ha:

$$(*) \quad (UVOO'_\infty) = -1, \text{ quindi } (UVO) = -1, \rightarrow \frac{UO}{VO} = -1,$$

$$\text{ossia } (1) \quad UO = OV;$$

la (1) ci dice che “ il centro dell'involuzione è il punto medio del segmento finito  $UV$ , che ha per estremi i due punti doppi dell'involuzione”.

Ora, se  $(A, A')$  e  $(B, B')$  sono due coppie di elementi coniugati si ha:

$$(2) \quad (ABOO'_\infty) = (A'B'O'_\infty O);$$

ma il valore di un birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due; possiamo quindi scrivere

$$(3) \quad (ABOO'_\infty) = (B'A'OO'_\infty).$$

Ne segue  $(ABO) = (A'B'O)$ , da cui  $\frac{AO}{BO} = \frac{B'O}{A'O}$ , e quindi

$$(4) \quad AO \cdot A'O = BO \cdot B'O = k,$$

cioè: “ il prodotto delle distanze orientate di due punti coniugati dal centro dell’ involuzione è una costante  $k$ . Questo valore prende il nome di potenza della involuzione”.

In particolare, se i punti coniugati  $A, A'$  coincidono con il punto doppio  $U$  e i punti  $B, B'$  con il punto doppio  $V$ , si ha:

$$(5) \quad \overline{OU}^2 = \overline{OV}^2 = k,$$

ed è  $k > 0$  o  $k < 0$  a seconda che l’ involuzione  $\omega_0$  sia iperbolica o ellittica (L. Campedelli, Esercizi di Geometria, pg. 199).

Viceversa, le coppie dei punti per i quali ha luogo la (4) appartengono ad una stessa involuzione di centro  $O$  e di potenza  $k$ .

Infine, se quattro punti  $U, V, A$  e  $A'$  formano un gruppo armonico, due di essi,  $U$  e  $V$ , possono sempre riguardarsi come punti doppi di una involuzione individuata in modo unico e in cui i punti  $A$  e  $A'$  si corrispondono in doppio modo. Il centro  $O$  dell’ involuzione corrisponde con il punto medio del segmento  $UV$  e per le (4), (5) si ha:

$$(6) \quad \overline{UO}^2 = \overline{VO}^2 = AO \cdot A'O = -1.$$

La (6) esprime una proprietà caratteristica del gruppo armonico.

## n. 11 – Problemi di applicazione su proiettività e involuzioni

Consideriamo due punteggiate sovrapposte  $r$  ed  $r'$ , fissiamo su di esse uno stesso riferimento cartesiano e consideriamo due punti  $U$  e  $V$  di ascisse rispettive  $2$  e  $1$ .

- Trovare l’ equazione dell’ involuzione che ha  $U$  e  $V$  come punti doppi.
- Trovare l’ equazione della proiettività che ha  $U$  e  $V$  come punti uniti e nella quale si corrispondano i punti  $A(-1)$  e  $A'(3)$  (L. Campedelli; Esercizi, pag. 212).

Problema a)

L’ equazione di una involuzione su una punteggiata è

$$(7) \quad \alpha x x' + \beta(x + x') + \delta = 0, \quad \text{con} \quad \alpha\delta - \beta^2 \neq 0.$$

Poiché  $\alpha, \beta, \delta$  sono determinati a meno di un comune coefficiente di proporzionalità, possiamo porre  $\alpha = 1$  e scrivere:

$$(8) \quad xx' + \beta(x + x') + \delta = 0.$$

Ponendo prima  $x = x' = 2$  e poi  $x = x' = 1$  la (8) fornisce il sistema:

$$(9) \quad \begin{cases} 4 + 4\beta + \delta = 0 \\ 1 + 2\beta + \delta = 0 \end{cases}, \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 4\beta + \delta = -4 \\ 2\beta + \delta = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4\beta + \delta = -4 \\ -2\beta - \delta = +1 \end{cases}.$$

Si trova subito la soluzione  $\beta = -\frac{3}{2}$ ,  $\delta = 2$ ;  
quindi l'equazione dell'involuzione è

$$(10) \quad 2xx' - 3(x + x') + 4 = 0.$$

Problema b).

L'equazione generale di una proiettività è:

$$(*) \quad \alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0, \quad \text{ossia, assumendo } \alpha = 1,$$

$$(11) \quad xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0.$$

Ponendo prima  $x = x' = 2$ , poi  $x = x' = 1$  e infine  $x = -1, x' = 3$  si ha il sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$(12) \quad \begin{cases} 4 + 2\beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ 1 + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -3 - \beta + 3\gamma + \delta = 0 \end{cases}, \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2\beta + 2\gamma + \delta = -4 \\ \beta + \gamma + \delta = -1 \\ -\beta + 3\gamma + \delta = 3 \end{cases}.$$

Risolvendo con un qualsiasi metodo si trova che il sistema ha la soluzione:

$$(*) \quad \beta = -5/2, \quad \gamma = -1/2, \quad \delta = 2,$$

e quindi l'equazione della proiettività è:

$$(*) \quad xx' - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x' + 2 = 0, \quad \text{ossia}$$

$$(13) \quad 2xx' - 5x - x' + 4 = 0.$$

**n. 12 – Punti limite di due punteggiate proiettive: 1° esempio.**

Scrivere l'equazione della proiettività fra due punteggiate distinte  $r$  ed  $r'$  nella quale ai punti di ascisse  $0;1;2$  della  $r$  corrispondono rispettivamente, sulla  $r'$ , i punti di ascisse  $-2;0;2/3$ . Trovare le ascisse dei punti limite sulle due punteggiate (L. Campedelli, Esercizi di Geometria, pg. 210).

Soluzione

Il birapporto di quattro punti della  $r$  è uguale al birapporto dei punti corrispondenti della retta  $r'$ . Ne segue che le ascisse di due punti omologhi  $x, x'$  sono legate dalla relazione

$$(1) \quad (0,1,2,x) = (-2,0,\frac{2}{3},x'), \quad \text{da cui}$$

$$(*) \quad \frac{(0,1,2)}{(0,1,x)} = \frac{(-2,0,2/3)}{(-2,0,x')}$$

$$(*) \quad \frac{2-0}{2-1} \cdot \frac{x-0}{x-1} = \frac{2/3+2}{2/3-0} \cdot \frac{x'+2}{x'-0},$$

$$(*) \quad \frac{2(x-1)}{x} = \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{x'}{x'+2}, \quad \rightarrow \quad \frac{2(x-1)}{x} = \frac{4x'}{x'+2},$$

$$(2) \quad \frac{2x'}{x'+2} = \frac{x-1}{x}.$$

Liberando dai denominatori si ha:  $2xx' = (x-1) \cdot (x'+2)$ .

Ne segue che l'equazione fra le due punteggiate è:

$$(3) \quad xx' - 2x + x' + 2 = 0.$$

Vogliamo ora trovare le ascisse dei punti limite  $J$  e  $I'$  delle due punteggiate. A tale scopo ricaviamo dalla (3) le espressioni di  $x$  e  $x'$ . Si ha:

$$(*) \quad x(x'-2) = -(x'+2), \quad \text{da cui}$$

$$(4) \quad x = \frac{2+x'}{2-x'};$$

ma anche  $x'(x+1) = 2x-2$ , da cui

$$(5) \quad x' = \frac{2x-2}{x+1}.$$

Dalla (4) possiamo ricavare l'ascissa del punto limite  $J$ , cioè l'ascissa del punto della retta  $r$  corrispondente al punto improprio  $J'_\infty$  della retta  $r'$ . Si ha:

$$(*) \quad x_J = \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{2+x'}{2-x'} = -1,$$

e quindi (6)  $J \equiv (-1).$

Analogamente, dalla (5) possiamo ricavare l'ascissa del punto limite  $I'$ , cioè l'ascissa del punto della retta  $r'$ , che corrisponde al punto improprio  $I_\infty$  della retta  $r$ . Si ha:

$$(*) \quad x_{I'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-2}{x+1} = 2,$$

e quindi (6)  $I' \equiv (2).$

Se ora  $X, X'$  è una coppia di punti corrispondenti sulle due punteggiate, il prodotto delle loro distanze dai punti limite situati sulle rispettive rette è costante, cioè:

$$(7) \quad XJ \cdot X'I' = \text{cost.}$$

Nel nostro caso si ha:

$$(*) \quad XJ = -1 - x, \quad X'I' = 2 - x'; \quad \text{ne segue}$$

$$(*) \quad (-1 - x) \cdot (2 - x') = \text{cost.}, \quad \text{e quindi}$$

$$(8) \quad (x+1) \cdot (x'-2) = k.$$

Possiamo ricavare il valore della costante  $k$  ricordando che le ascisse di due punti corrispondenti sono  $x = 0, x' = -2$ . Sostituendo nella (8) si ha:

$$(*) \quad k = 1 \cdot (-2 - 2), \quad \text{ossia} \quad k = -4.$$

Sostituendo nella (8) si ricava che l'equazione della proiettività è:

$$(9) \quad (x+1) \cdot (x'-2) = -4, \quad \text{da cui}$$

$$(3) \quad xx' - 2x + x' + 2 = 0.$$

Si ritrova così l'equazione (3) della proiettività ottenuta attraverso l'eguaglianza dei birapporti di due quaderne di punti corrispondenti.

**n. 13 – Punti limite di due punteggiate proiettive: 2° esempio**

Scrivere l'equazione della proiettività fra due punteggiate distinte  $r$  ed  $r'$ , conoscendo i punti limite  $J(3)$ ,  $I'(-1)$  e una coppia di punti omologhi  $A \equiv (-2)$  e  $A' \equiv (+1)$ .

Soluzione

Se  $X \equiv (x)$  e  $X' \equiv (x')$  sono due punti omologhi, ricordando che il prodotto delle distanze dai punti limite delle rette sulle quali essi giacciono è costante, si ha:

$$(1) \quad XJ \cdot X'I' = AJ \cdot A'I'.$$

Nel nostro caso si ha:

$$(*) \quad \begin{aligned} XJ &= 3 - x, & X'I' &= -1 - x', \\ AJ &= 3 + 2, & A'I' &= -1 - 1. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (1) si ha:

$$(*) \quad (3 - x) \cdot (-1 - x') = 5 \cdot (-2).$$

Scambiando opportunamente segno nei primi due fattori si ha:

$$(2) \quad (x - 3) \cdot (x' + 1) = -10, \quad \text{ossia}$$

$$(3) \quad xx' + x - 3x' + 7 = 0.$$

La (3) è l'equazione della proiettività richiesta.

**n. 14 – Problemi sulle involuzioni** (L. Campedelli; Es. di Geometria, pag. 214)

Data una retta e fissato sopra di essa un sistema di ascisse, scrivere l'equazione dell'involuzione individuata dalle due coppie di punti coniugati  $A(-1)$ ,  $A'(0)$  e  $B(2)$ ,  $B'(3)$ .

Soluzione

L'equazione di una involuzione su una punteggiata è

$$(1) \quad axx' + b(x + x') + d = 0, \quad \text{con} \quad ad - b^2 \neq 0.$$

Ponendo prima  $x = -1$ ,  $x' = 0$  e poi  $x = 2$ ,  $x' = 3$  si ha il sistema

$$(2) \quad \begin{cases} 0 - b + d = 0 \\ 6a + 5b + d = 0. \end{cases}$$

Si ricava  $b = d$ ; e poiché i coefficienti  $a, b, c$  sono determinati a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo, possiamo porre  $b = d = 1$ . Si ricava  $a = 1$  e quindi l'involuzione ha l'equazione

$$(3) \quad xx' - x - x' - 1 = 0.$$

Ponendo  $x' = x$  la (3) diventa un'equazione di 2° grado che con le sue radici ci dà le ascisse dei punti doppi  $U, V$  dell'involuzione. Si ottiene:

$$(*) \quad x^2 - 2x - 1 = 0, \quad \text{da cui}$$

$$(3) \quad U \equiv x_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad V \equiv x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Poiché i due punti doppi sono reali, l'involuzione è iperbolica.

Il punto medio del segmento  $UV$  ci dà il centro  $O$  dell'involuzione; la sua ascissa è:

$$(*) \quad x_O = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1.$$

La potenza dell'involuzione è la costante  $k$  data dall'espressione

$$(*) \quad BO \cdot B'O = \overline{OU}^2 = \overline{OV}^2 = k.$$

Con facili calcoli si ricava:

$$(*) \quad k = \overline{OV}^2 = (1 + \sqrt{2} - 1)^2 = 2,$$

oppure  $BO = 1 - 2 = -1, \quad B'O = 1 - 3 = -2$

e quindi  $k = BO \cdot B'O = 2$ .

**n. 15 – Esercizio sull'involuzione** (Cacciafesta; Es. di Geometria, pag. 24)

Sopra una retta punteggiata  $r$  fissiamo un sistema di coordinate proiettive omogenee  $x_1, x_2$ . Scrivere l'equazione dell'involuzione che ha i punti omologhi  $P(1,0)$ ,  $P'(0,1)$  e il punto unità  $U(1,1)$ . Trovare il secondo elemento unito.

Soluzione.

Primo procedimento.

In coordinate omogenee l'equazione di una proiettività è

$$(1) \quad \begin{cases} \rho \xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \rho \xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} .$$

Imponendo il passaggio per i punti omologhi si ha

$$(2) \quad \begin{array}{l} U(1,1) \leftrightarrow U(1,1) \\ P'(0,1) \leftrightarrow P(1,0) \rightarrow \\ P(1,0) \leftrightarrow P'(0,1) \end{array} \rightarrow \begin{cases} \rho = a_{11} + a_{12}, & \rho = a_{21} + a_{22} \\ 0 = a_{11} + 0, & t = a_{21} + 0 \\ \lambda = 0 + a_{21}, & 0 = 0 + a_{22} \end{cases} .$$

Si ricava  $a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0$  .

Poiché i coefficienti del sistema (2) sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità possiamo  $\rho = 1$  .

Si ricava (\*)  $a_{12} = 1, \quad a_{21} = 1, \quad \lambda = t = 1$  .

Con questi valori l'equazione dell'involuzione è

$$(*) \quad \begin{cases} \rho \xi_1 = x_2 \\ \rho \xi_2 = x_1 \end{cases} .$$

Si ricava  $\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{x_2}{x_1}$ , da cui (3) :  $\frac{\xi_1}{\xi_2} \cdot \frac{x_1}{x_2} = 1$  .

Passando a coordinate non omogenee si ricava che l'equazione dell'involuzione è

$$(4) \quad \xi x - 1 = 0 .$$

Secondo procedimento.

Usando coordinate non omogenee, l'equazione dell'involuzione è:

$$(5) \quad \alpha \xi x + \beta x + \gamma \xi + \delta = 0 ,$$

da cui  $\xi(\alpha x + \beta) = -\gamma x - \delta$ , e quindi  $\xi = \frac{-\beta x - \delta}{\alpha x + \beta}$  .

Si ricava (6)  $\xi = \frac{-\beta - \delta/x}{\alpha + \beta/x}$  .

Per il punto unito U si hanno le coordinate non omogenee  $\xi = 1, \quad x = 1$  e dalla (6) si ha la condizione

$$(7) \quad 1 = \frac{-\beta - \delta}{\alpha + \beta} .$$

Per il punto  $P(1;0)$  si ricava la coordinata non omogenea  $x = \frac{1}{0}$ , ossia  $x = \infty$ ;  
il punto corrispondente  $P'(0;1)$  ha la coordinata non omogenea  $\xi = \frac{0}{1}$ , ossia  $\xi = 0$ .

Sostituendo i valori  $x = \infty$  e  $\xi = 0$  nella (6) si ottiene

$$(*) \quad 0 = \frac{-\beta}{\alpha}, \quad \text{da cui} \quad (8) \quad \beta = 0.$$

Dalle (7) (8) si ricava  $-\beta/\alpha = 1$ .

Poiché i coefficienti sono determinati a meno di un coefficiente di proporzionalità, si ricava la soluzione

$$(9) \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \delta = -1.$$

Ne segue che l'equazione dell'involuzione è

$$(10) \quad x\xi - 1 = 0.$$

Dalla (10) possiamo ricavare le coordinate dei punti uniti ponendo  $x = \xi$ .

Si ottiene  $x^2 = 1$ , da cui  $x = \pm 1$ .

Per  $x = \frac{x_1}{x_2} = 1$  si ricava il punto unito  $U(1)$ , in coord. omogenee  $U(1;1)$ ;

per  $x = \frac{x_1}{x_2} = -1$  si ricava il punto unito  $V(-1;0)$ , in coord. omogenee  $V(-1;1)$ .

### **PROBLEMA 1 B** ( Testo di L. Campedelli; Geometria pag. 253)

Dato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico  $Oxy$ , sia  $p$  la polare di un punto  $P$  rispetto ad una conica  $\gamma$ ; sappiamo che mentre un punto  $Q$  percorre la retta  $p$  la sua polare  $q$  genera un fascio di rette di centro  $P$ .

Quesito I)

Dimostrare che questo fascio è proiettivo rispetto alla punteggiata descritta dal punto  $Q$ .

Soluzione.

Riferiamoci per semplicità alla circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r = 5$  (fig. 11P).



La polare del punto  $Q_1$  coincide con la tangente alla circonferenza nel punto stesso e passa per il punto  $P$ .

Sulla retta  $x = 3$ , che è la polare del punto  $P$ , consideriamo un generico punto  $Q(3, t)$  e troviamo la sua polare rispetto alla circonferenza data. Si ha:

$$(4) \quad 3x + ty - 25 = 0,$$

da cui  $y = -\frac{3}{t}x + \frac{25}{t}$  e quindi  $(5) \quad y = -\frac{3}{t}\left(x - \frac{25}{3}\right).$

La (5) rappresenta un fascio di rette di centro  $P(25/3; 0)$ , pertanto le polari dei vari punti della retta  $x = 3$  passano tutte per il punto  $P$ .

Possiamo quindi dire: "Mentre il punto  $Q(3, t)$  percorre la polare  $p$  del punto  $P$ , la sua polare  $q$  descrive un fascio di rette di centro  $P$ ".

Abbiamo così trovato che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta  $x = 3$  e le polari dei punti stessi.

Per esempio, ai punti  $Q_1(3; 4)$ ,  $Q_2(3; 5)$ ,  $Q_3(3; 6)$ ,  $Q_4(3; 7)$  della punteggiata  $x = 3$  corrispondono biunivocamente le rette (che sono anche le loro polari)

$$(*) \quad \begin{aligned} q_1 : y &= -\frac{3}{4}\left(x - \frac{25}{3}\right), & q_2 &= -\frac{3}{5}\left(x - \frac{25}{3}\right), & q_3 &= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{25}{3}\right), \\ q_4 : y &= -\frac{3}{7}\left(x - \frac{25}{3}\right). \end{aligned}$$

Facciamo vedere che la punteggiata  $x = 3$  e il fascio di rette  $y = -\frac{3}{t}\left(x - \frac{25}{3}\right)$  sono

due forme proiettive. A tale scopo dobbiamo far vedere che si verificano due proprietà:

- a) tra gli elementi delle due forme esiste una corrispondenza biunivoca (e ciò è già stato dimostrato);
- b) il birapporto di quattro punti qualsiasi della punteggiata  $r$  è uguale al birapporto delle quattro rette corrispondenti del fascio, cioè:

$$(6) \quad (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = (q_1, q_2, q_3, q_4).$$

Infatti, il birapporto dei quattro punti, con ovvia terminologia, è:

$$(7) \quad (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = (t_1, t_2, t_3, t_4).$$

Il birapporto delle quattro polari dei punti corrispondenti è uguale al birapporto dei rispettivi coefficienti angolari e quindi possiamo scrivere:

$$(*) \quad (q_1, q_2, q_3, q_4) = \left(-\frac{3}{t_1}, -\frac{3}{t_2}, -\frac{3}{t_3}, -\frac{3}{t_4}\right) = \left(\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, \frac{1}{t_3}, \frac{1}{t_4}\right). \quad \text{Ne segue:}$$

$$(*) \quad (q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\left( \frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, \frac{1}{t_3} \right)}{\left( \frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, \frac{1}{t_4} \right)} = \frac{\frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_1}}{\frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_2}} : \frac{\frac{1}{t_4} - \frac{1}{t_1}}{\frac{1}{t_4} - \frac{1}{t_2}} .$$

$$(*) \quad (q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\frac{t_1 - t_3}{\cancel{t_3} t_1}}{\frac{t_2 - t_3}{\cancel{t_3} t_2}} : \frac{\frac{t_1 - t_4}{\cancel{t_4} t_1}}{\frac{t_2 - t_4}{\cancel{t_4} t_2}} ,$$

$$(*) \quad (q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{t_1 - t_3}{t_1} \cdot \frac{t_2}{t_2 - t_3} : \frac{t_1 - t_4}{t_1} \cdot \frac{t_2}{t_2 - t_4} ,$$

$$(*) \quad (q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\cancel{t_2} (t_1 - t_3)}{\cancel{t_\lambda} (t_2 - t_3)} \cdot \frac{\cancel{t_\lambda} (t_2 - t_4)}{\cancel{t_2} (t_1 - t_4)} = \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} : \frac{t_4 - t_1}{t_4 - t_2} .$$

Infine (8):  $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (t_1, t_2, t_3) : (t_1, t_2, t_4) = (t_1, t_2, t_3, t_4) .$

Confrontando le (7), (8) si ha, come abbiamo previsto:

$$(6) \quad (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = (q_1, q_2, q_3, q_4) .$$

La (6) ci dice che la punteggiata  $x = 3$  e il fascio di rette  $y = -\frac{3}{t}(x - \frac{25}{3})$  sono due forme di prima specie fra loro proiettive.

Possiamo ora trovare la formula della proiettività che fa corrispondere ai punti  $Q_1(3;4)$ ,  $Q_2(3;5)$ ,  $Q_3(3;6)$  della retta  $x = 3$  le rispettive polari  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  (di queste già conosciamo i coefficienti angolari). Il teorema fondamentale delle proiettività ci insegna che essa esiste ed è una sola. La sua equazione è data dall'eguaglianza di birapporti:

$$(9) \quad (4, 5, 6, t) = \left( -\frac{3}{4}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, \lambda \right) ,$$

ove  $t$  è la coordinata del generico punto  $Q$  e  $\lambda$  è il coefficiente della polare del punto stesso.

Sviluppando i due birapporti si ha:

$$(*) \quad \frac{(4,5,6)}{(4,5,t)} = \frac{\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{5}, \lambda\right)}, \text{ da cui}$$

$$(*) \quad \frac{6-4}{6-5} \cdot \frac{t-4}{t-5} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{-\frac{1}{2} + \frac{3}{5}} \cdot \frac{\lambda + \frac{3}{4}}{\lambda + \frac{3}{5}}.$$

$$(*) \text{ Segue } \frac{2(t-5)}{t-4} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{10}} \cdot \frac{4\lambda+3}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5(4\lambda+3)}{4(5\lambda+3)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4(5\lambda+3)}{5(4\lambda+3)},$$

$$(*) \quad \frac{\cancel{2}(t-5)}{t-4} = \frac{\cancel{2}(5\lambda+3)}{4\lambda+3}, \rightarrow$$

$$(t-5)(4\lambda+3) = (t-4)(5\lambda+3).$$

Si ricava che l'equazione della proiettività è

$$(10) \quad \lambda t + 3 = 0.$$

Da questa formula si ricava che quando  $t$  assume i valori  $4,5,6,7,8,\dots$  allora  $\lambda$  riassume i valori che già conosciamo  $-\frac{3}{4}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{7}, -\frac{3}{8}$ .

La (10) è una proiettività tra due forme di prima specie diverse: pertanto essa non può avere elementi uniti e non può essere una involuzione.

Quesito II)

Torniamo a considerare la polare  $q$  del generico punto  $Q(3,t)$  della retta  $x=3$  rispetto alla circonferenza  $x^2 + y^2 - 25 = 0$  (fig. 11P); come abbiamo ricavato, essa ha l'equazione

$$(*) \quad y = -\frac{3}{t}\left(x - \frac{25}{3}\right), \text{ e passa per il punto } P\left(\frac{25}{3}, 0\right).$$

Se il punto  $Q$  è esterno alla circonferenza, la sua polare  $q$  interseca la retta  $x=3$  in un punto  $Q'$  interno alla circonferenza e di coordinate  $Q'\left(3, \frac{16}{t}\right)$ .

TESI: Vogliamo dimostrare che tra i punti  $Q$  e  $Q'$  intercorre una proiettività.

Infatti tra i punti  $Q$  e  $Q'$  intercorre evidentemente una corrispondenza biunivoca algebrica; per il nostro scopo, basta far vedere che essa conserva i birapporti, ossia che si ha:

$$(11) \quad (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = (Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4).$$

Infatti si ha (12)  $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = (t_1, t_2, t_3, t_4),$

$$(13) \quad (Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4) = \left( \frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, \frac{1}{t_3}, \frac{1}{t_4} \right) = (t_1, t_2, t_3, t_4).$$

Gli ultimi due birapporti sono uguali perché si passa dalla variabile  $t$  alla variabile  $1/t$  mediante una sostituzione lineare non degenera, la quale, come è noto, lascia invariati i birapporti.

Dal confronto delle (12), (13) subito si ricava la (11). La tesi è così dimostrata.

Per  $t = \pm 4$  i punti  $Q$  e  $Q'$  coincidono, quindi la proiettività ha i due punti uniti  $U(3,4)$  e  $V(3,-4)$ .

I punti  $Q(3;t)$  e  $Q'(3;16/t)$  ci dicono, inoltre, che essi si corrispondono in doppio modo, quindi la proiettività è una involuzione che ha  $U$  e  $V$  come punti doppi. In conclusione, per ogni valore del parametro  $t$  abbiamo coppie di punti coniugati o involutorie.

E' facile verificare che i punti corrispondenti  $(3;t)$  e  $(3;16/t)$  separano armonicamente la coppia di punti uniti  $U(3;-4), V(3;4)$ , cioè che il birapporto  $(-4, 4, t, \frac{16}{t})$  vale  $-1$ . Si ha così una nuova dimostrazione che la proiettività fra i punti  $Q$  e  $Q'$  della punteggiata è una involuzione.

Vogliamo trovare l'equazione di questa involuzione.

Poiché la punteggiata  $x = 3$  è parallela all'asse  $y$ , è sufficiente riferirsi alle ordinate dei punti, indicando con  $y$  e  $y'$  le ordinate di due punti corrispondenti.

Possiamo procedere in due modi.

1° metodo.

L'equazione generale di una involuzione è

$$(f) \quad \alpha yy' + \beta(y + y') + \delta = 0.$$

Poiché  $\alpha, \beta, \delta$  sono determinati a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo, possiamo porre  $\alpha = 1$ , quindi la (f) diventa

$$(*) \quad yy' + \beta(y + y') + \delta = 0.$$

I punti doppi dell'involuzione sono  $U(3, -4), V(3;4)$ .

Ponendo  $y = y' = 4$  e poi  $y = y' = -4$  si ha il sistema:

$$(*) \quad \begin{cases} 16 + 8\beta + \delta = 0 \\ 16 - 8\beta + \delta = 0 . \end{cases}$$

Si ricava  $\beta = 0$ ,  $\delta = -16$  . Quindi l'equazione dell'involuzione è

$$(14) \quad yy' - 16 = 0 .$$

2° metodo.

Abbiamo visto che nel nostro caso una coppia di punti coniugati separa armonicamente la coppia dei punti doppi, quindi:

$$(*) \quad (U, V, Q, Q') = -1 \quad . \text{ Passando alle coordinate si ha:}$$

$$(*) \quad (4, -4, y, y') = -1, \quad \frac{(4, -4, y)}{(4, -4, y')} = -1 ,$$

$$(*) \quad \frac{y-4}{y+4} : \frac{y'-4}{y'+4} = -1, \quad \text{da cui}$$

$$(y-4) \cdot (y'+4) = -(y+4) \cdot (y'-4) ;$$

$$\text{quindi} \quad yy' + \cancel{4y} - 4y' - 16 = -yy' + \cancel{4y} - \cancel{4y'} + 16 = 0 .$$

Ne segue che l'equazione dell'involuzione è:

$$(14) \quad yy' - 16 = 0 .$$

# DIMOSTRAZIONI PROIETTIVE DEI TEOREMI DI PAPPO E DI PASCAL

di Nazario Magnarelli

P.le Carturan, 12 – LATINA – Tel.: 0773- 697994

## Sunto

Vogliamo dare due dimostrazioni dei teoremi di Pappo e di Pascal che richiedono semplici nozioni di Geometria Proiettiva.

Il procedimento seguito si presta agevolmente allo studio di altri interessanti argomenti della Disciplina, come il teorema di Désargues sul quadrangolo completo. Essi possono essere pertanto presentati anche agli alunni delle Scuole medie superiori.

### n. 1 – Nozioni preliminari di geometria proiettiva

In questo paragrafo sono esposte alcune nozioni di Geometria proiettiva che consentiranno a tutti una facile lettura dell'articolo.

1) Si dice rapporto semplice di tre punti  $A, B, C$  di una retta orientata  $r$  l'espressione

$$(1) \quad (ABC) = \frac{AC}{BC},$$

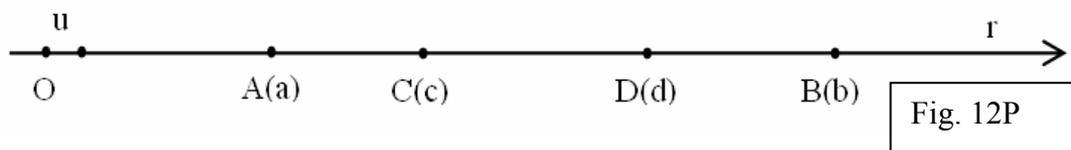
ove  $AC$  e  $BC$  sono le misure algebriche dei segmenti omonimi. L'espressione (1), quindi, è un numero reale relativo.

La retta  $r$  è detta anche "punteggiata".

2) Si dice birapporto di quattro punti  $A, B, C, D$  della retta  $r$  l'espressione

$$(2) \quad (ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}.$$

Il birapporto è un numero reale relativo.



Se poi stabiliamo sulla retta un sistema di ascisse e indichiamo con  $a, b, c, d$  le ascisse dei punti considerati, ricordando l'espressione cartesiana della misura di un segmento orientato, si ha:

$$(ABCD) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}.$$

Quando il punto  $D$  tende al punto improprio  $D_\infty$  della retta  $r$  si ha

$$(3) \quad \lim_{D \rightarrow D_\infty} (ABCD) = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{(c-a)(1-\frac{b}{d})}{(c-b)(1-\frac{a}{d})} = \frac{c-a}{c-b},$$

ossia 
$$\lim_{D \rightarrow D_\infty} (ABCD) = (ABCD_\infty) = (ABC),$$

cioè quando il quarto punto di un birapporto tende al punto improprio della retta sulla quale i quattro punti giacciono, il birapporto dei quattro punti è uguale al rapporto semplice dei primi tre.

a) Se  $(ABCD) = (ABCD')$ , è evidente che  $D' \equiv D$  ( $D'$  coincide con  $D$ ).

b) Si può dimostrare che

$$(ABCD) = (BADC) = (DCBA) = (CDAB),$$

cioè il valore di un birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due.

c) Il birapporto di quattro punti  $A, B, C, D$  di una punteggiata  $r$  è uguale al birapporto delle quattro rette  $a, b, c, d$  che li proiettano da un punto  $P$  esterno ad essa.

Consideriamo sull'asse  $x$  quattro punti generici  $A(x_1), B(x_2), C(x_3), D(x_4)$ . Il birapporto dei quattro punti è

$$(1) \quad (ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1}.$$

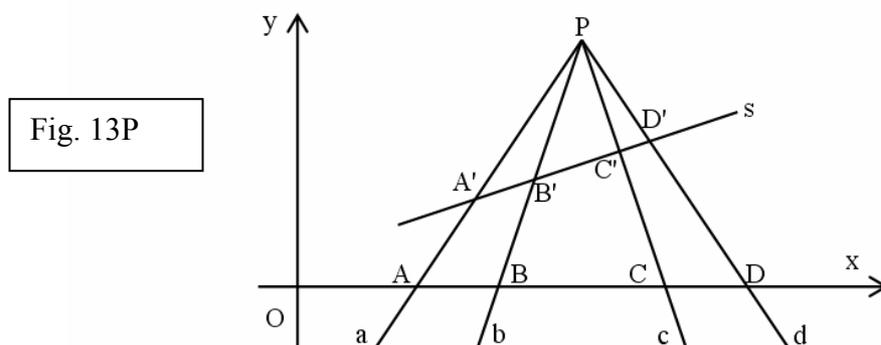


Fig. 13P

Vogliamo far vedere che il birapporto dei quattro punti è uguale al birapporto delle quattro rette  $a, b, c, d$  che li proiettano da un punto  $P(x_0, y_0)$  del piano (Fig. 13P). A tale scopo consideriamo un fascio di rette di centro  $P(x_0, y_0)$  e intersechiamo le rette del fascio con l'asse  $x$ :

$$(2) \quad \begin{cases} k(y - y_0) = x - x_0 \\ y = 0 \text{ (asse } x), \end{cases} \quad \rightarrow \quad -ky_0 = x - x_0, \quad \rightarrow (3) \quad x = x_0 - ky_0.$$

Sostituiamo alle ascisse  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) dei punti  $A, B, C, D$  della (1) le espressioni (3), nelle quali compaiono i coefficienti angolari  $k_1, k_2, k_3, k_4$  delle rette del fascio che passano per questi punti. Si ha

$$(*) \quad (ABCD) = \frac{(x_0 - k_3 y_0 - x_0 + k_1 y_0)}{(x_0 - k_3 y_0 - x_0 + k_2 y_0)} \cdot \frac{(x_0 - k_4 y_0 - x_0 + k_2 y_0)}{(x_0 - k_4 y_0 - x_0 + k_1 y_0)} = \\ = \frac{(k_1 y_0 - k_3 y_0)}{(k_2 y_0 - k_3 y_0)} \cdot \frac{(k_2 y_0 - k_4 y_0)}{(k_1 y_0 - k_4 y_0)} = \frac{(k_3 - k_1)}{(k_3 - k_2)} \cdot \frac{(k_4 - k_1)}{(k_4 - k_2)},$$

ossia  $(ABCD) = (k_1 k_2 k_3) : (k_1 k_2 k_4) = (k_1 k_2 k_3 k_4),$

e quindi (4)  $(ABCD) = (abcd).$

Abbiamo così dimostrato che il birapporto di quattro punti  $A, B, C, D$  di una punteggiata  $r$  è uguale al birapporto delle quattro rette  $a, b, c, d$  che li proiettano da un punto  $P$ , esterno ad essa.

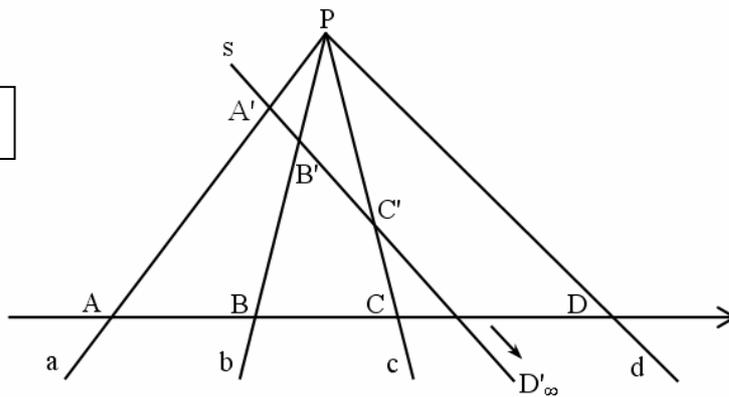
d) Se ora intersechiamo le rette  $a, b, c, d$  con un'altra retta  $s \neq r$  otteniamo altri quattro punti  $A', B', C', D'$ ; ma siccome i coefficienti angolari delle rette che li proiettano non variano evidentemente si avrà

$$(A'B'C'D') = (abcd);$$

ne segue (5)  $(ABCD) = (abcd) = (k_1 k_2 k_3 k_4) = (A'B'C'D')$

La (5) esprime una importantissima proprietà, detta conservazione dei birapporti: il birapporto di quattro punti di una punteggiata o di quattro rette di un fascio è invariabile per operazioni di proiezione e sezione.

Fig. 14P

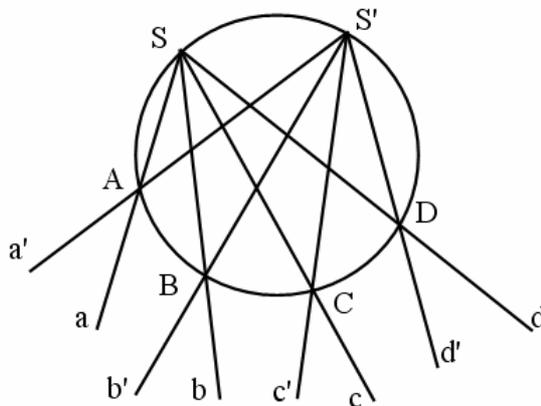


Se poi la retta  $s$  è parallela alla retta  $d$ , il punto  $D$  viene proiettato nel punto improprio  $D'_{\infty}$  della retta  $s$  (Fig. 14P) e ovviamente si ha

$$(ABCD) = (A'B'C'D'_{\infty}) = (A'B'C')$$

e) Possiamo estendere la nozione di birapporto anche a quattro punti  $A, B, C, D$  di una circonferenza  $\gamma$ .

Fig. 15P



Prendiamo sulla circonferenza altri due punti  $S$  ed  $S'$  e ricordiamo che angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono uguali o supplementari, e quindi hanno lo stesso seno. Pertanto, con riferimento alla fig. 15P, si ha:

$$(6) \quad \frac{\widehat{\text{sen } ac} : \widehat{\text{sen } ad}}{\widehat{\text{sen } bc} : \widehat{\text{sen } bd}} = \frac{\widehat{\text{sen } a'c'} : \widehat{\text{sen } a'd'}}{\widehat{\text{sen } b'c'} : \widehat{\text{sen } b'd'}}$$

cioè 
$$\frac{(abc)}{(abd)} = \frac{(a'b'c')}{(a'b'd')} \quad \text{ossia} \quad (abcd) = (a'b'c'd').$$

Ciò vuol dire che le due quaderne di rette che proiettano i punti  $A, B, C, D$  da  $S$  ed  $S'$  formano birapporti uguali.

Con un opportuno simbolismo possiamo scrivere

$$S(ABCD) = S'(ABCD).$$

### Altra proprietà dei birapporti

Consideriamo 4 punti distinti di una punteggiata  $r$  e sia  $k$  il valore del loro birapporto, quindi

$$(7) \quad (ABCD) = k.$$

Scambiando i due primi o i due ultimi punti, il valore del birapporto si muta nel reciproco, ossia

$$(8) \quad (ABCD) = 1/k.$$

Se il valore del birapporto (7) non varia scambiando i due punti  $C, D$  si avrà:

$$(9) \quad (ABCD) = (ABDC), \quad \text{ossia} \quad (10) \quad k = 1/k,$$

da cui  $k^2 = 1$  e quindi (11)  $k = \pm 1$ .

Si vede subito che il valore  $k = 1$  non è accettabile. Infatti, quando  $k = 1$  i due primi o i due ultimi punti del birapporto coincidono, e ciò è da escludere perché i 4 punti, per ipotesi, sono distinti.

Deve quindi essere  $k = -1$ . Ne segue che

$$(12) \quad (ABCD) = -1, \quad \text{ossia il birapporto è armonico.}$$

Viceversa, se un birapporto è armonico, il suo valore non varia scambiando di posto i suoi primi due primi punti, o gli ultimi due: infatti il reciproco di  $-1$  è ancora  $-1$ .

## **n. 2 – Proposizione 139 di Pappo**

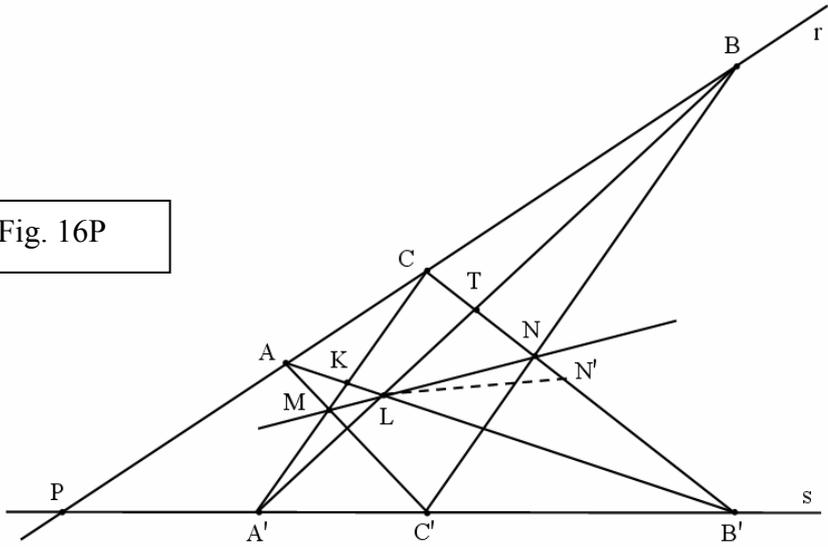
Dimostriamo ora il teorema di Pappo contenuto nelle proposizioni 138 e 139 del libro VII della “Collezione Matematica”. Cominciamo con la seconda proposizione, che il matematico alessandrino (III-IV secolo d.c.) ritiene più impegnativa.

### **Proposizione 139**

In termini attuali possiamo dire:

“Se in un esagono intrecciato  $AB'CA'BC'$  i vertici di posto dispari stanno su una retta e i vertici di posto pari stanno sopra una seconda retta, i punti di intersezione delle tre coppie di lati opposti stanno su una terza retta”.

Fig. 16P



Siano  $r$  ed  $s$  due rette incidenti nel punto  $P$ . Prendiamo tre punti  $A, B, C$  sulla retta  $r$  e indichiamo con  $A', B', C'$  i punti corrispondenti sulla retta  $s$  (vedi fig. 16P). Tracciamo le coppie di segmenti

$$AB', A'B \quad ; \quad AC', A'C \quad ; \quad BC', B'C$$

e siano rispettivamente  $L, M, N$  i punti di intersezione di ciascuna coppia. Quindi

$$AB' \cap A'B = L \quad , \quad AC' \cap A'C = M \quad , \quad BC' \cap B'C = N$$

Vogliamo dimostrare che questi punti sono allineati.

Consideriamo anche i punti di intersezione

$$A'B \cap CB' = T \quad \quad A'C \cap AB' = K .$$

**Prima proiezione e sezione.**

Dal punto  $B$  proiettiamo i punti  $B', C', A', P$  sulla retta  $CB'$ :

$B'$  resta dove sta ,  $C' \rightarrow N$  ,  $A' \rightarrow T$  ,  $P \rightarrow C$ .

Per la conservazione dei birapporti si ha

$$(2.1) \quad (B'C'A'P) = (B'NTC)$$

**Seconda proiezione e sezione**

Dal punto  $A$  proiettiamo i punti  $B', C', A', P$  sulla retta  $CA'$ :

$B' \rightarrow K$  ,  $C' \rightarrow M$  ,  $A'$  resta dove sta ,  $P \rightarrow C$ .

Per la conservazione dei birapporti si ha

$$(2.2) \quad (B'C'A'P) = (KMA'C)$$

Dal confronto delle (2.1), (2.2) segue

$$(2.3) \quad (B'NTC) = (KMA'C) .$$

### **Terza proiezione e sezione**

Dal punto  $L$  proiettiamo i punti  $K, M, A', C$  sulla retta  $CB'$  e supponiamo per un istante che al punto  $M$  corrisponda un punto  $N' \neq N$  :

$$K \rightarrow B' , \quad M \rightarrow N' , \quad A' \rightarrow T , \quad C \text{ resta dove sta .}$$

Teniamo presente che, a causa della proiezione,  $N'$  è allineato con  $L$  ed  $M$ .  
Per la conservazione dei birapporti si ha

$$(2.4) \quad (KMA'C) = (B'N'TC) .$$

Per la proprietà transitiva dell'eguaglianza, dalle (2.3) e (2.4), si ha

$$(2.5) \quad (B'NTC) = (B'N'TC) .$$

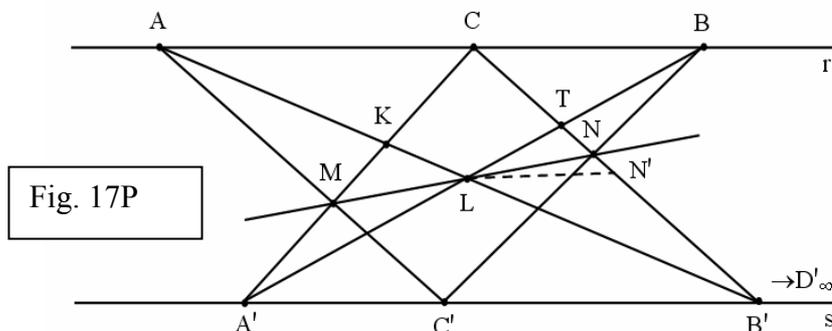
La (2.5) ci dice che, poiché i punti corrispondenti di tre coppie sono uguali, anche la quarta coppia è costituita da elementi uguali, cioè  $N' \equiv N$

Poiché i punti  $M, L, N'$  sono allineati, come osservato poco sopra, anche i punti  $M, L, N$  sono tali: si tratta infatti dei medesimi punti.

C.V.D.

### N. 3 – Proposizione 138 di Pappo

Consideriamo, in questo caso, due rette parallele  $r$  ed  $s$ . Prendiamo tre punti  $A, B, C$  sulla retta  $r$  e siano  $A', B', C'$  i punti corrispondenti sulla retta  $s$ . Tracciamo l'esagono intrecciato  $AB'CA'B'C'$  (Fig. 17P).



Consideriamo i punti di intersezione

$$L = AB' \cap A'B \quad , \quad M = AC' \cap A'C \quad , \quad N = BC' \cap B'C \quad .$$

Vogliamo dimostrare che i tre punti  $M, L, N$  sono allineati.

Consideriamo anche i punti di intersezione

$$A'B \cap CB' = T \quad , \quad A'C \cap AB' = K \quad .$$

#### Prima proiezione e sezione

Dal punto  $A$  proiettiamo i punti  $A', M, K, C$  della retta  $A'C$  sulla retta  $s$  e teniamo presente che i punti  $A', M, K$  vengono proiettati rispettivamente nei punti  $A', C', B'$  della retta  $s$  mentre il punto  $C$  viene proiettato nel punto improprio  $D'_\infty$  della retta stessa. Ricordando la proprietà a) del birapporto di quattro punti di una retta si ha

$$(2.6) \quad (A'MKC) = (A'C'B'D'_\infty) = (A'C'B') \quad .$$

#### Seconda proiezione e sezione

Dal punto  $B$  proiettiamo i punti  $T, N, B', C$  della retta  $CB'$  sulla retta  $s$ . Tenendo ancora presente che il punto  $C$  viene proiettato nel punto improprio  $D'_\infty$  della retta  $s$  si ha

$$(2.7) \quad (TNB'C) = (A'C'B'D'_\infty) = (A'C'B') \quad .$$

Dalle ultime due relazioni, eguagliando membro a membro, si ha

$$(2.8) \quad (A'MKC) = (TNB'C) \quad .$$

### Terza proiezione e sezione

Dal punto  $L$  proiettiamo ora la quaterna di punti  $A', M, K, C$  della retta  $CA'$  sulla retta  $CB'$  e supponiamo per un momento che al punto  $M$  corrisponda un punto  $N' \neq N$ . Si noti che, in virtù della proiezione, i punti  $M, L, N'$  sono allineati. Per la conservazione dei birapporti si ha

$$(2.9) \quad (A'MKC) = (TN'B'C) .$$

Dalle ultime due relazioni, eguagliando membro a membro, si ha

$$(2.10) \quad (TN'B'C) = (TNB'C) .$$

La (2.10) ci dice che, poiché i punti corrispondenti di tre coppie sono uguali, anche la quarta coppia è costituita da elementi uguali, cioè  $N' \equiv N$ .

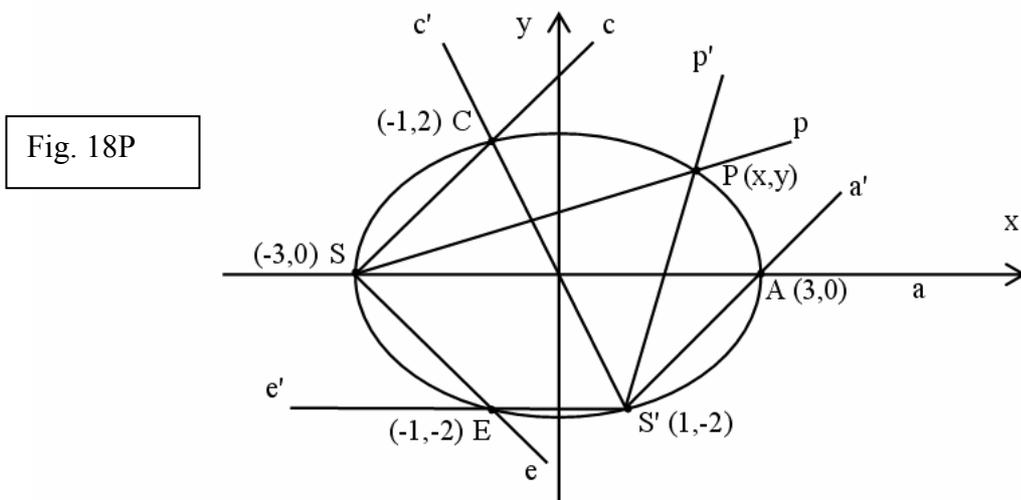
Poiché i punti  $M, L, N'$  sono allineati, come osservato poco sopra, anche i punti  $M, L, N$  sono tali: si tratta infatti dei medesimi punti. C.V.D.

### n. 4 –Primo teorema di Steiner-Chasles

Vogliamo ora dimostrare il 1° teorema di Steiner-Chasles, che ha il seguente enunciato:

“Dati due fasci proiettivi di rette, complanari, distinti e non prospettivi, il luogo dei punti di intersezione di rette corrispondenti è una conica che passa per i centri dei due fasci”.

Illustriamo il teorema con un esempio (fig. 18P)



Consideriamo due fasci proiettivi di rette

$$S(A, C, E \dots) \omega S'(A, C, E \dots)$$

ove i punti hanno le coordinate cartesiane :

$$S (-3,0) \quad , \quad S' (1,-2),$$

$$A (3,0) \quad , \quad C (-1,2) \quad , \quad E (-1,-2) \quad , \quad P (x,y) .$$

I coefficienti angolari delle rette corrispondenti si leggono sul seguente prospetto

retta SA	$m_1 = 0$	retta S'A	$m'_1 = 1$
retta SC	$m_2 = 1$	retta S'C	$m'_2 = -2$
retta SE	$m_3 = -1$	retta S'E	$m'_3 = 0$
retta SP	$m$	retta S'P	$m'$

La proiettività è data dall'eguaglianza di birapporti

$$(4.1) \quad (0,1,-1,m) = (1,-2,0,m')$$

da cui si ricava l'equazione

$$(4.2) \quad 2mm' + m - m' + 1 = 0$$

Troviamo ora i coefficienti angolari delle due rette proiettive corrispondenti passanti per il punto  $P(x,y)$  . Subito si trova

$$\text{per la retta SP} \quad m = \frac{y}{x+3} \quad , \quad \text{per la retta S'P} \quad m' = \frac{y+2}{x-1}$$

Sostituendo le espressioni di  $m$  ed  $m'$  nell'equazione (4.2) della proiettività si ricava agevolmente

$$(4.3) \quad x^2 + 2y^2 = 9$$

cioè: il luogo dei punti di intersezione di raggi corrispondenti di due fasci proiettivi è una conica. Come è facile verificare, essa passa per i centri  $S$  ed  $S'$  dei due fasci.

## n. 5 – Secondo teorema di Steiner-Chasles

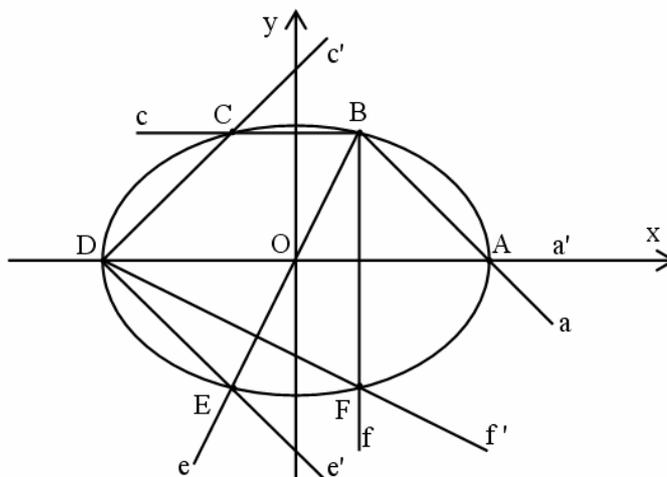
Diamo l'enunciato del secondo teorema di Steiner-Chasles:

“le rette che proiettano i punti di una conica da due punti fissi  $B$  e  $D$  di essa descrivono due fasci proiettivi di rette. Quindi, se  $C, E, F, A$  sono altri quattro punti della conica, si ha l'eguaglianza di birapporti

$$(1) \quad B(CEFA) = D(CEFA) .$$

Illustriamo questo teorema con un esempio (fig. 19P).

Fig. 19P



Nella conica di equazione  $x^2 + 2y^2 = 9$  consideriamo l'esagono di vertici  
 $A(3,0)$   $B(1,2)$   $C(-1,2)$   $D(-3,0)$   $E(-1,-2)$   $F(1,-2)$ .

Chiameremo  $c, e, f, a$  le rette condotte dal punto  $B$  verso i punti  $C, E, F, A$  e con  $c', e', f', a'$  le rette condotte dal punto  $D$  verso i medesimi punti.

Indichiamo rispettivamente con  $m_1, m_2, m_3, m_4$  i coefficienti angolari delle rette che dal punto  $B$  proiettano i punti  $C, E, F, A$  e con  $m'_1, m'_2, m'_3, m'_4$  i coefficienti angolari delle rette che dal punto  $D$  proiettano i punti stessi.

E' facile verificare che i due birapporti  $(m_1, m_2, m_3, m_4)$  ed  $(m'_1, m'_2, m'_3, m'_4)$  si riducono ai birapporti  $(0, 2, \infty, -1)$ ,  $(1, -1, -1/2, 0)$  e che questi sono uguali perché hanno lo stesso valore 3.

La verifica ci dà una conferma del teorema.

## n. 6 – Teorema di Pascal (prima parte)

Possiamo ora dimostrare il Teorema di Pascal. Esso comprende il teorema di Pappo nel caso particolare in cui l'esagono sia inscritto in una conica spezzata in due rette.

Il procedimento che noi seguiremo usa nel modo più semplice le nozioni di proiettività e di birapporto e quindi non richiede conoscenze approfondite di geometria proiettiva.

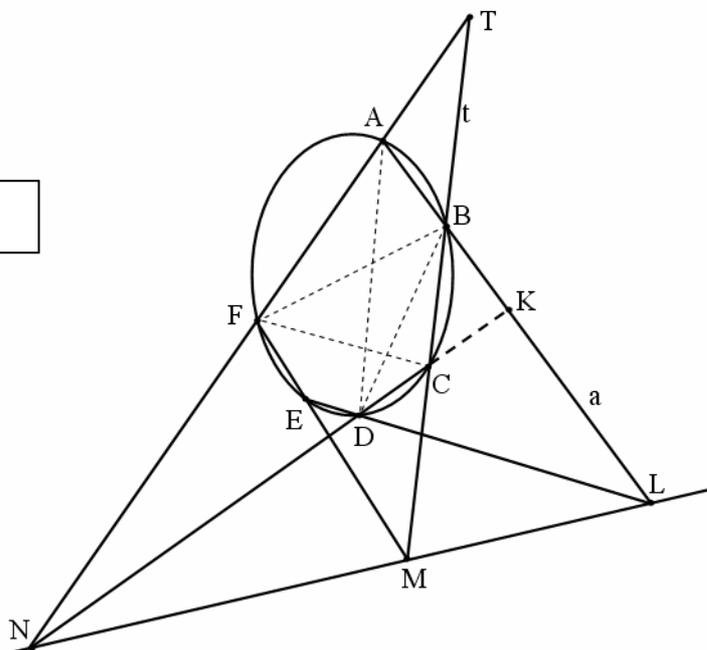
Prima parte:

“Se un esagono semplice  $ABCDEF$  è inscritto in una conica, le intersezioni delle coppie di lati opposti stanno su una retta, detta retta di Pascal”.

Seconda parte ( vedi n. seguente)

“Se in un esagono semplice le intersezioni delle tre coppie di lati opposti stanno su una retta, i vertici dell'esagono appartengono ad una conica”.

Fig. 20P



Sia  $ABCDEF$  un esagono semplice inscritto in una conica (fig. 20P) le tre coppie di lati opposti sono rispettivamente il 1° e 4° lato, il 2° e 5°, il 3° e 6°, come viene chiarito nel seguente prospetto

AB	BC	CD
DE	EF	FA
1 <sup>a</sup> coppia	2 <sup>a</sup> coppia	3 <sup>a</sup> coppia

Poniamo  $AB \cap DE = L$ ,  $BC \cap EF = M$ ,  $CD \cap FA = N$ .

Vogliamo dimostrare che i punti  $L, M, N$  sono allineati.

A tale scopo poniamo anche  $AF \cap BC = T$  e  $AB \cap CD = K$ .

Proiettiamo da  $F$  i punti  $A, B, C, E$  sulla retta  $BC$ . Poiché  $A \rightarrow T, E \rightarrow M$ , mentre  $B$  e  $C$  restano fermi, si ottiene

$$(3.1) \quad F(ABCE) = (TBCM).$$

Proiettiamo da  $D$  gli stessi punti  $A, B, C, E$  sulla retta  $AB$ . Poiché  $C \rightarrow K, E \rightarrow L$ , mentre  $A$  e  $B$  restano fermi, si ha

$$(3.2) \quad D(ABCE) = (ABKL).$$

Per il teor. di Steiner-Chasles già ricordato, i fasci che proiettano dai punti  $F, D$  della conica i punti  $A, B, C, E$  della conica stessa sono proiettivi, cioè

$$(3.3) \quad F(ABCE) = D(ABCE) .$$

Per le (3.1) e (3.2), la (3.3) fornisce la relazione

$$(3.4) \quad (TBCM) = (ABKL) .$$

La (3.4) ci dice che fra le rette  $t$  ed  $a$  sussiste una proiettività che ha le coppie di punti corrispondenti  $(T,A)$ ,  $(B,B)$ ,  $(C,K)$ ,  $(M,L)$ .

Questa proiettività, avendo l'elemento  $B$  comune alle due rette come punto unito, è una prospettività. Quindi le rette  $AT$ ,  $CK$ ,  $ML$ , che uniscono coppie di punti corrispondenti, convergono verso il centro della prospettività; e poiché la retta  $AT$  coincide con  $AF$  e la retta  $CK$  coincide con  $CD$ , possiamo dire che tale centro è il punto

$$N = AT \cap CK \quad \text{o se si vuole} \quad N = AF \cap CD.$$

Abbiamo così dimostrato che il punto  $N$  è allineato con i punti  $M$  ed  $L$ . La prima parte del teorema è così dimostrata.

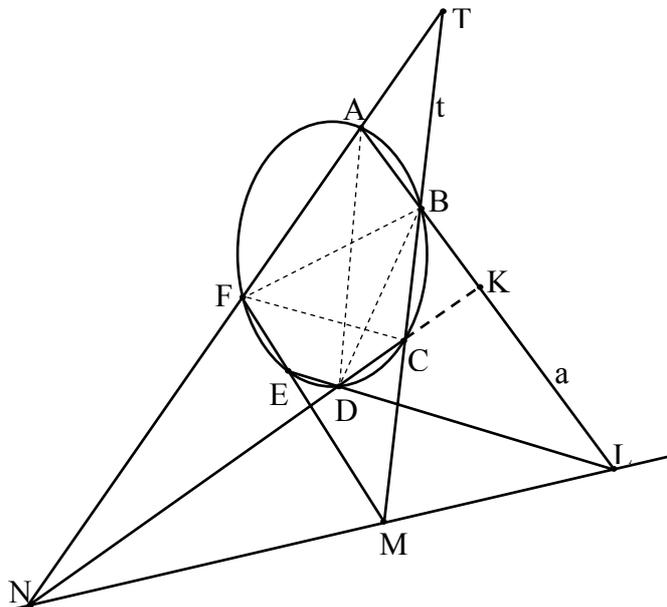
### n. 7 – Inverso del teorema di Pascal (seconda parte)

Dimostriamo ora la parte inversa del teorema di Pascal.

Consideriamo un esagono semplice, cioè non intrecciato,  $ABCDEF$ ; siano rispettivamente  $L, M, N$  i punti di intersezione delle tre coppie di lati opposti  $(AB,DE)$ ,  $(BC,EF)$ ,  $(CD,FA)$  e supponiamo che essi giacciono su una retta. Vogliamo dimostrare che, in tali ipotesi, i vertici dell'esagono appartengono ad una conica.

Possiamo utilizzare ancora la Fig. 20 P, purché non si faccia l'ipotesi preliminare che l'esagono sia inscritto in una conica. Quindi consideriamo solo l'esagono e le coppie di lati opposti.

Fig. 20P



Prolunghiamo i lati  $BC, AF, CD$  e poniamo  $T = BC \cap AF$  e  $K = AB \cap CD$ .

Sulle due rette  $TB = t$  e  $AB = a$  otteniamo così due quaderne di punti  $T, B, C, M$  e  $A, B, K, L$  che si corrispondono in una prospettiva di centro  $N$ : basta osservare le coppie di punti  $(A, T), (B, B), (K, C)$  ed  $(L, M)$  e notare che i punti di ciascuna coppia sono allineati con  $N$ .

Questa prospettiva ci permette di scrivere l'eguaglianza di birapporti

$$(4.4) \quad (TBCM) = (ABKL).$$

Se ora proiettiamo la quaterna di punti  $T, B, C, M$  dal centro  $F$  otteniamo quattro rette che passano rispettivamente per i vertici  $A, B, C, E$  dell'esagono e quindi possiamo dire

$$(4.5) \quad (TBCM) = F(ABCE).$$

Se poi proiettiamo la quaterna di punti  $A, B, K, L$  dal centro  $D$  otteniamo altre quattro rette, distinte dalle precedenti, che passano ordinatamente per gli stessi vertici  $A, B, C, E$  e quindi possiamo dire

$$(4.6) \quad (ABKL) = D(ABCE).$$

La (4.4) ci permette di eguagliare membro a membro le (4.5) (4.6).  
Si ottiene

$$(4.7) \quad F(ABCE) = D(ABCE).$$

La (4.7) rappresenta due fasci proiettivi, piani e distinti, di rette per i quali i punti  $A, B, C, E$  sono punti di intersezione di rette corrispondenti.

Il 1° teor. di Steiner-Chasles, già ricordato, ci permette di dire che per due fasci proiettivi di questo tipo il luogo dei punti di intersezione di rette corrispondenti è una conica che passa anche per i centri  $D$  ed  $F$  dei due fasci. Per i vertici dell'esagono passa quindi una conica.

C.V.D.

NOTA. Il procedimento seguito per le dimostrazioni dei teoremi richiamati nel presente articolo e le poche nozioni di geometria proiettiva ricordate ci mettono nella condizione di dimostrare, se si vuole, il noto teorema di Désargues sul quadrangolo completo.

**n. 8 – Altro esempio della retta di Pascal relativa ad un esagono semplice inscritto in una conica**

Un esagono semplice ABCDEF inscritto in una conica si può presentare nelle forme più inconsuete, come nella fig. 21P.

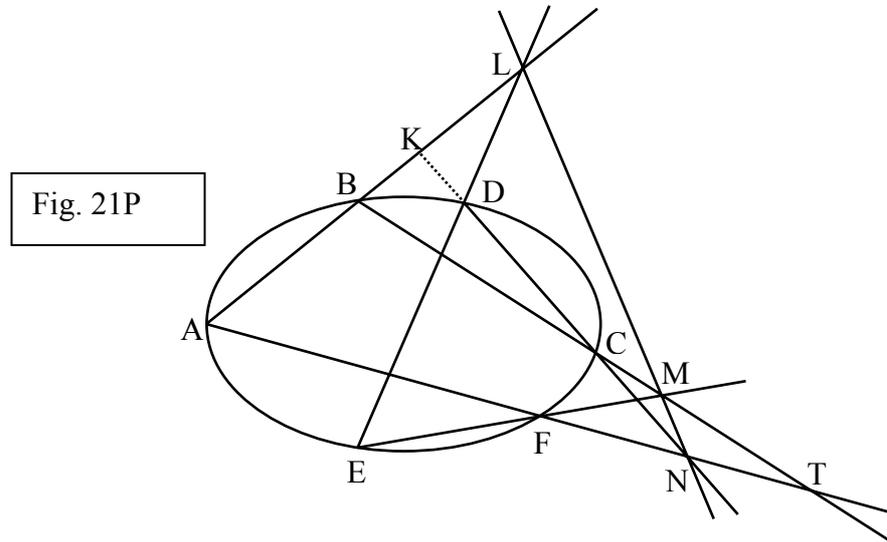


Fig. 21P

Facciamo vedere che anche in questo caso è agevole dimostrare il teorema di Pascal. Basta ripetere la dimostrazione precedente parola per parola. Poniamo ancora

$$(5.1) \quad AB \cap DE = L \quad BC \cap EF = M \quad CD \cap FA = N .$$

Vogliamo dimostrare che i punti L, M, N sono allineati.

Dimostrazione . Prolunghiamo opportunamente i lati dell'esagono e poniamo

$$(*) \quad AF \cap BC = T \quad AB \cap CD = K .$$

Da F proiettiamo i punti A, B, C, E sulla retta  $BC = t$ ; allora  $A \rightarrow T$ ,  $E \rightarrow M$ , mentre B e C restano fermi. Poiché il birapporto delle rette che proiettano i quattro punti è uguale al birapporto dei punti che si ottengono intersecando con le rette  $t$  si ha

$$(5.2) \quad F(ABCE) = (TBCM) .$$

Analogamente, proiettiamo da D gli stessi punti A, B, C, E sulla retta AB. Poiché,  $C \rightarrow K$ ,  $E \rightarrow L$ , mentre A e B restano fermi, per l'invarianza dei birapporti si ha

$$(5.3) \quad D(ABCE) = (ABKL) .$$

Per il 2° teorema di Steiner-Chasles già ricordato, i fasci che proiettano dai punti  $F, D$  della conica i punti  $A, B, C, E$  della conica stessa sono proiettivi, e quindi si ha

$$(5.4) \quad F(ABCE) = D(ABCE).$$

Tenendo presenti le (5.2), (5.3) si ricava

$$(5.5) \quad (TBCM) = (ABKL).$$

La (5.4) ci dice che fra le rette  $t$  ed  $a$  abbiamo una corrispondenza biunivoca che conserva i birapporti, ossia una proiettività.

Poiché questa proiettività ha il punto  $B$  unito, essa è una prospettività; quindi le rette che uniscono punti corrispondenti, cioè  $TA, CK, ML$ , convergono necessariamente verso il centro  $S$  della prospettività. Ciò permette di dire che i punti  $M, L, S$  sono allineati e che  $S$  è la comune intersezione

$$TA \cap CK \cap ML = S.$$

E' facile ora convincersi che il punto  $S$  coincide con  $N$ .

Infatti le rette  $TA$  e  $CK$  non sono altro che le rette  $FA$  e  $CD$ , che hanno per intersezione il punto  $N$ , come ci ricorda la posizione

$$(5.1) \quad CD \cap FA = N.$$

Quindi  $S \equiv N$ , ossia i punti  $M, L, N$  sono allineati.

La prima parte del teorema è così dimostrata.

Per completezza facciamo vedere bene la prospettività di centro  $S \equiv N$  fra le rette  $a$  e  $t$ , richiamata poco sopra (fig. 22P).

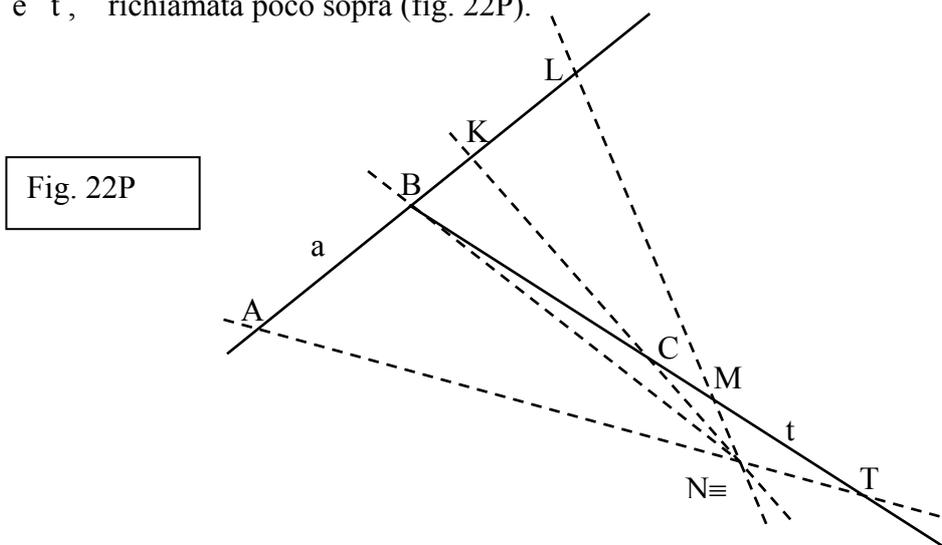


Fig. 22P

Se dal punto  $N$  si proietta la punteggiata  $a$  sulla  $t$ , allora

$$A \rightarrow T, \quad K \rightarrow C, \quad L \rightarrow M,$$

mentre il punto  $B$ , intersezione fra le due rette, resta dove sta, ossia è un punto unito. Possiamo allora scrivere l'eguaglianza di birapporti

$$(ABKL) = (TBCM) .$$

Si trova così esattamente la prospettiva utilizzata nel corso della dimostrazione svolta poc'anzi.

C.V.D.

## Appendice A .

### n. 9 – Dimostrazione del teorema di Pascal basata sull'asse di collineazione di una proiettività

Vogliamo dare un'altra dimostrazione del teor. di Pappo-Pascal, nel caso di un esagono inscritto in una conica degenera. E' da notare, però, che il procedimento seguito non si presta a dimostrare il teorema nel caso generale di un esagono semplice inscritto in una conica non degenera.

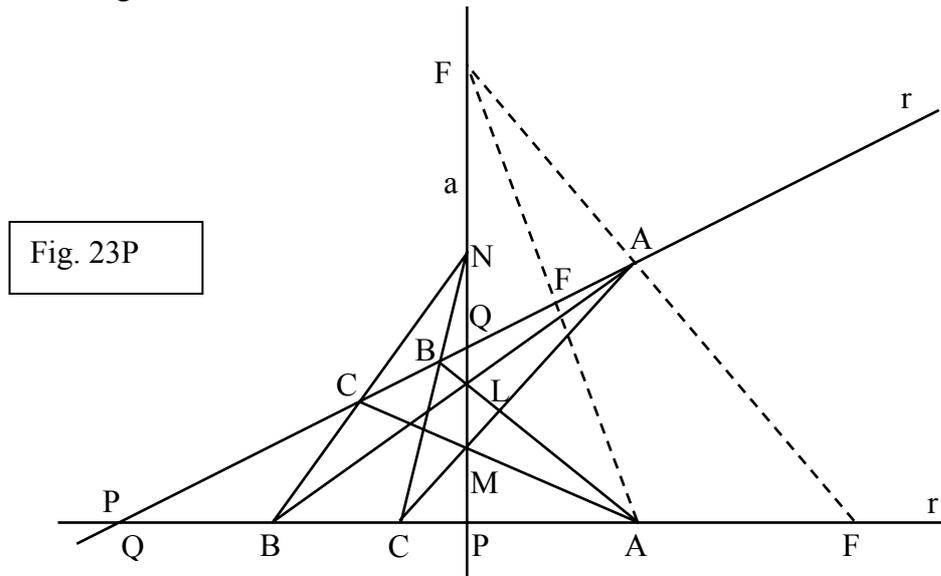


Fig. 23P

Consideriamo due punteggiate complanari e distinte  $r$  ed  $r'$  e indichiamo con  $P$  o  $Q'$  il loro punto di intersezione (Fig. 23P). Sia  $\omega$  la proiettività che ai punti  $A, B, C$  della retta  $r$  fa corrispondere rispettivamente i punti  $A', B', C'$  della retta  $r'$ . La proiettività è perfettamente individuata da questi tra coppie di punti corrispondenti, come ci assicura un teorema fondamentale.

Questa proiettività può essere costruita, mediante operazioni di proiezione e sezione, come prodotto di due prospettività fra le rette  $r$  ed  $r'$ : una avente il centro  $S$  coincidente con  $A'$  e l'altro avente il centro  $S'$  coincidente con  $A$ .

Proiettiamo dal centro  $A$  i punti  $B', C'$  e dal centro  $A'$  i punti corrispondenti. Per intersezione si ottengono i punti

$$L = AB' \cap A'B \quad M = AC' \cap A'C .$$

Tracciamo la retta  $a = LM$  e siano rispettivamente  $Q, P'$  i suoi punti di intersezione con le rette  $r$  ed  $r'$ .

La retta  $a = LM$  si dice "asse di prospettività" tra  $r$  ed  $r'$ , o meglio "asse di collineazione". Essa dipende solo dalla proiettività e non dalla particolare coppia di punti  $A$  e  $A'$  scelti come centri di proiezione.

Infatti al punto  $P$ , pensato apparente alla retta  $r$ , corrisponde il punto  $P' = a \cap r'$ ; mentre il punto  $Q$  intersezione fra  $a$  ed  $r$ , è il corrispondente del punto  $Q'$  della retta  $r'$ , sovrapposto al punto  $P$  della retta  $r$ .

Poiché i punti  $P'$  e  $Q$  dipendono solo dalla proiettività, anche la retta  $a$  che li congiunge dipende solo da essa.

Per questo motivo, l'asse di collineazione  $a$  non muta se proiettiamo le rette  $r$  ed  $r'$  dai nuovi centri  $S \equiv B'$  ed  $S' \equiv B$ . Ne segue che il punto  $N = BC' \cap B'C$  cade sull'asse  $a$ , ossia è allineato con  $L$  ed  $M$ .

Come conseguenza immediata di questa proprietà abbiamo il teorema di Pappo-Pascal, del quale ripetiamo l'enunciato.

“Se nella conica degenera costituita dalle rette  $r$  ed  $r'$  si traccia l'esagono intrecciato  $AB'CA'BC'A$ , i punti di intersezione dei lati opposti dell'esagono

$$L = AB' \cap A'B \quad M = AC' \cap A'C \quad N = BC' \cap B'C$$

cadono su una retta, che si dice retta di Pascal”.

C.V.D.

#### NOTA

Per la dimostrazione del teorema precedente, ricordiamo come si costruisce il corrispondente del punto  $P \equiv r \cap r'$ , nel caso che si pensi  $P \in r$ .

Se dal punto  $A' \equiv S$  proiettiamo con il punto  $P$  sull'asse di collineazione  $a$ , si ottiene il punto  $P'$ . Se ora dal punto  $A \equiv S'$  proiettiamo il punto  $P'$  sull'asse  $a$ , si ottiene il medesimo punto: pertanto la proiettività  $\omega$  fa corrispondere al punto  $P$  il punto  $P'$ .

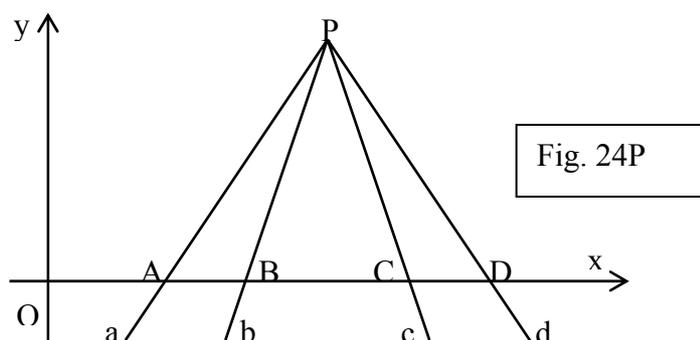
Analogamente, se dal centro  $A \equiv S'$  proiettiamo il punto  $Q' \in r'$  sull'asse di collineazione  $a$  si ottiene il punto  $Q$ . Se ora dal centro  $A'$  proiettiamo il punto  $Q$  sull'asse  $a$  si ottiene il medesimo punto. Pertanto  $Q$  è il corrispondente proiettivo del punto  $Q'$ .

## Appendice B.

### n. 10 – Altra dimostrazione dell’invarianza di un birapporto

Abbiamo già dimostrato che “ il birapporto dei quattro punti A, B, C, D di una punteggiata r è uguale al birapporto delle quattro rette a,b,c,d che proiettano questi punti da un punto P esterno alla punteggiata”.

Vogliamo dare un’altra dimostrazione di questa proprietà. Consideriamo la fig. 24P. Ricordando il teorema dei seni si ha:



$$(*) \quad \frac{AC}{AP} = \frac{\text{sen}\widehat{APC}}{\text{sen}\widehat{ACP}}, \quad \frac{BC}{BP} = \frac{\text{sen}\widehat{BPC}}{\text{sen}\widehat{BCP}}, \quad \frac{AD}{AP} = \frac{\text{sen}\widehat{APD}}{\text{sen}\widehat{ADP}}, \text{ ecc.}$$

$$(\overline{ABCD}) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\text{sen}\overline{ac}}{\text{sen}\overline{bc}} : \frac{\text{sen}\overline{ad}}{\text{sen}\overline{bd}},$$

cioè 
$$\frac{(\overline{ABC})}{(\overline{ABD})} = \frac{(\overline{abc})}{(\overline{abd})},$$

ossia 
$$(\overline{ABCD}) = (\overline{abcd}).$$

## Appendice C

### n. 11 – Teorema di Pascal nel caso di un esagono inscritto in una circonferenza

Dimostriamo il teorema di Pascal nel caso particolare di un esagono inscritto in una circonferenza (25P). La facile dimostrazione è rivolta ai lettori che si vogliono accostare allo studio della geometria proiettiva.

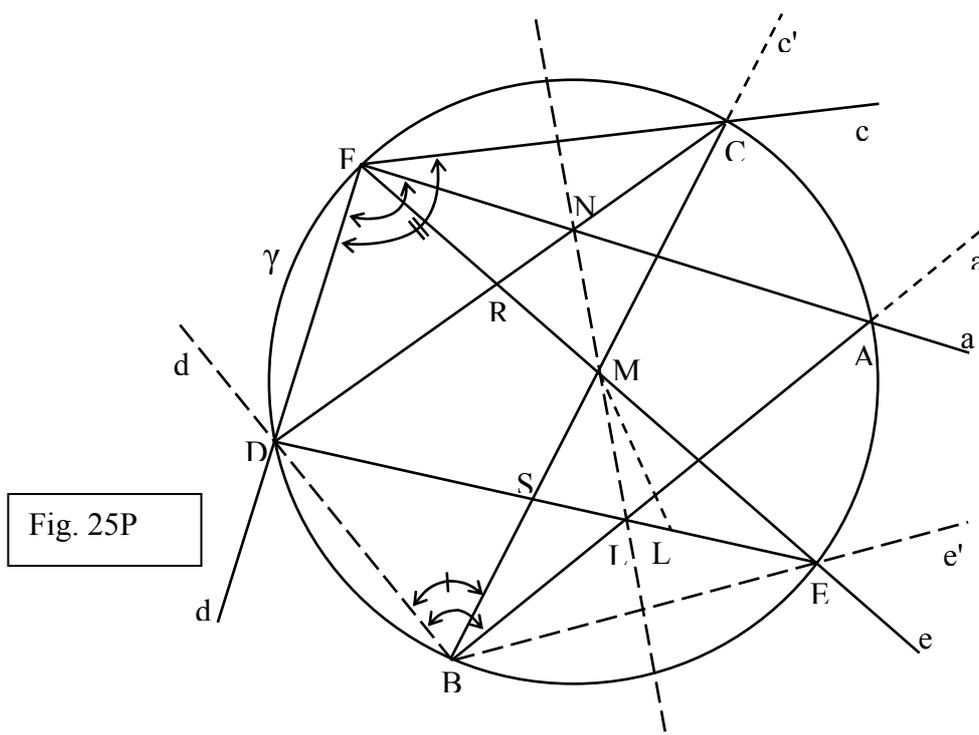


Fig. 25P

Sia  $ABCDEF$  un esagono semplice inscritto in una circonferenza  $\gamma$  e siano rispettivamente  $L, M, N$  i punti di intersezione delle tre coppie di lati opposti  $(AB, DE)$ ,  $(BC, EF)$ ,  $(CD, FA)$ ; quindi:

$$L = AB \cap DE \quad M = BC \cap EF \quad N = CD \cap FA .$$

Vogliamo dimostrare che i punti  $L, M, N$  giacciono su una retta.

Assumiamo  $F$  e  $B$  come centri di proiezione.

Siano  $a, c, d, e$  le semirette condotte dal punto  $F$  verso i punti  $A, C, D, E$ .

Per il loro birapporto si ha:

$$(8.1) \quad F(ACDE) = (acde) = \frac{(acd)}{(ace)} = \frac{\widehat{ad} \cdot \widehat{ce}}{\widehat{cd} \cdot \widehat{ae}}$$

Analogamente indichiamo con  $a', c', d', e'$  le semirette condotte dal punto  $B$

verso gli stessi punti A, C, D, E e consideriamo il birapporto di queste semirette. Si ha:

$$(8.2) \quad B(ACDE) = (a'c'd'e') = \frac{(a'c'd')}{(a'c'e')} = \frac{\widehat{\text{sen } a'd'} \cdot \widehat{\text{sen } c'e'}}{\widehat{\text{sen } c'd'} \cdot \widehat{\text{sen } a'e'}}$$

E' facile vedere che si hanno coppie di angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco e coppie costituite da angoli opposti di un quadrilatero in essa inscritto. Precisamente si ha:

$\widehat{ad} + \widehat{a'd'} = 180^\circ$	ne segue	$\widehat{\text{sen } ad} = \widehat{\text{sen } a'd'}$
$\widehat{ce} = \widehat{c'e'}$	“	$\widehat{\text{sen } cd} = \widehat{\text{sen } c'd'}$
$\widehat{ce} = \widehat{c'e'}$ (insistono su arco CE)	“	$\widehat{\text{sen } ce} = \widehat{\text{sen } c'e'}$
$\widehat{ae} = \widehat{a'e'}$ (insistono su arco AE)	“	$\widehat{\text{sen } ae} = \widehat{\text{sen } a'e'}$

Dalla (8.1) (8.2) si ricava

$$(8.3) \quad (acde) = (a'c'd'e') \quad \text{ossia} \quad F(ACDE) = B(A'C'D'E').$$

Se ora intersechiamo le semirette  $a, c, d, e$  del fascio di centro  $F$ , con la retta  $CD$  si ottengono rispettivamente i punti  $N, C, D, R$ , ove  $R = e \cap CD$ .

Per la conservazione dei birapporti si ha

$$(abcde) = (NCDR).$$

Analogamente, se intersechiamo le semirette  $a', c', d', e'$  del fascio di centro  $B$ , con la retta  $DE$  si ottengono rispettivamente i punti  $L, S, D, E$ , ove  $S = c' \cap DE$ .

Per la conservazione dei birapporti si ha

$$(a'c'd'e') = (LSDE).$$

Eguagliando membro a membro le due precedenti eguaglianze si ricava

$$(8.4) \quad (NCDR) = (LSDE).$$

Vogliamo ora dimostrare che il punto  $L$  è allineato con i punti  $N, M$ . Dal punto  $M$  proiettiamo i punti  $N, C, D, R$ , della retta  $CD$ , sulla retta  $DE$  e supponiamo, per il momento, che al punto  $N$  corrisponda un punto  $L' \neq L$ . Naturalmente, i punti  $N, M, L'$  sono allineati a causa della proiezione. A seguito di questa operazione

$$N \rightarrow L', \quad C \rightarrow S, \quad D \text{ resta fermo}, \quad R \rightarrow E$$

Per la conservazione dei birapporti si ha

$$(8.5) \quad (\text{NCDR}) = (\text{L'SDE}) .$$

Confrontando le (8.4), (8.5) si ottiene

$$(\text{LSDE}) = (\text{L'SDE}) .$$

Ma se due birapporti sono uguali, anche la quarta coppia è costituita da punti uguali, cioè

$$L' \equiv L .$$

Si conclude: poiché i punti  $N, M, L'$  sono allineati per la proiezione operata, anche i punti  $N, M, L$  sono allineati. Si tratta infatti degli stessi punti.

Il teorema di Pascal è così dimostrata.

Proiettiamo ora da un punto  $V$  dello spazio il piano  $\alpha$ , su cui giace la circonferenza  $\gamma$ , su un altro piano  $\beta$  non parallelo ad  $\alpha$ . Sappiamo che le rette del primo piano si trasformano in rette del secondo piano e che la circonferenza  $\gamma$  si trasforma in un'ellisse. La proiezione e sezione conserva però le relazioni di appartenenza e di allineamento di punti. Si ritrova così il teorema di Pascal per una ellisse.

Possiamo anche seguire un altro procedimento: cioè trasformare per mezzo di una omografia la circonferenza  $\gamma$  in una generica conica. Anche in tal caso si conservano le relazioni di appartenenza e di allineamento e quindi si ritrova il teorema di Pascal per una conica generica.