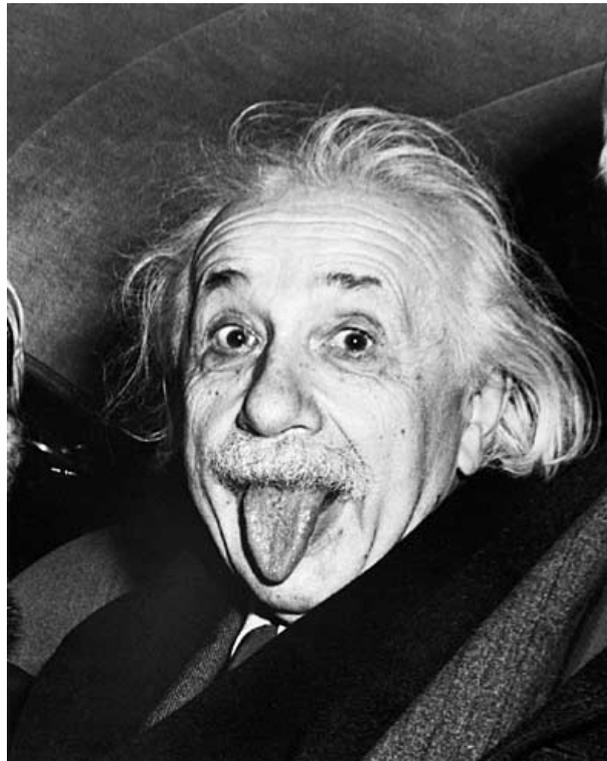


Fisica ?  
... No problem !

La meccanica



A cura di Carlo Sintini

## SOMMARIO

BIBLIOGRAFIA .....	6
INTRODUZIONE.....	7
CAP. 1 - CALCOLO VETTORIALE.....	8
1-1. Elementi di calcolo vettoriale .....	8
Somma algebrica fra vettori.....	9
Somma di due vettori paralleli.....	11
Forme rettangolare e polare di un vettore .....	11
1-2. Prodotto scalare fra due vettori.....	12
1-3. Prodotto vettoriale fra due vettori.....	14
CAP. 2 – CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE.....	17
2-1. La velocità .....	17
2-2. L'accelerazione.....	19
2-3. Corpi in caduta libera.....	20
2-4. Moto rettilineo uniforme.....	21
2-5. Moto rettilineo uniformemente accelerato.....	22
Una formula utile .....	23
2-6. Moto circolare uniforme .....	24
2-7. Effetti di una accelerazione generica.....	26
2-8. Traiettoria di un proiettile.....	26
Due angoli per una stessa gittata.....	27
Gli errori prima di Galileo .....	28
2-9. Velocità e accelerazione relative .....	29
ESERCIZI DI CINEMATICA.....	30
Formule da ricordare:.....	30
Esercizio 1.....	30
Esercizio 2.....	31
Esercizio 3.....	32
Esercizio 4.....	34
Esercizio 5.....	35
Esercizio 6.....	35
CAP. 3 – DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE.....	37
3-1. La forza.....	37
3-2. Prima legge (o legge d'inerzia).....	38
3-3. Seconda legge (o legge fondamentale).....	38
3-4. Terza legge (o legge d'azione e reazione).....	39
3-5. Costante elastica di richiamo .....	40
3-6. La forza di attrito .....	41
3-7. Il piano inclinato .....	42
3-8. Reazioni e tensioni.....	43
3-9. Forza centripeta e centrifuga .....	45
ESERCIZI DI DINAMICA DEL PUNTO .....	46
Esercizio 7.....	46
Esercizio 8.....	47
Esercizio 9.....	48
Esercizio 10.....	49
Esercizio 11.....	50
Esercizio 12.....	52

Esercizio 13.....	53
Esercizio 14.....	54
Esercizio 15.....	55
CAP. 4 – LAVORO E POTENZA.....	57
4-1. Lavoro fatto da una forza costante.....	57
4-2. Lavoro fatto da una forza variabile.....	59
4-3. Teorema dell'energia cinetica.....	60
4-4. La potenza.....	61
ESERCIZI SUL LAVORO E LA POTENZA.....	62
Esercizio 16.....	62
Esercizio 17.....	63
Esercizio 18.....	64
CAP. 5 – L'ENERGIA.....	65
5-1. Le forze conservative.....	65
5-2. L'energia potenziale.....	67
5-3. Teorema della conservazione dell'energia meccanica.....	69
ESERCIZI SULLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA.....	70
Esercizio 19.....	70
Esercizio 20.....	71
Esercizio 21.....	73
CAP. 6 – DINAMICA DEI SISTEMI DI PARTICELLE.....	75
6-1. Il baricentro.....	75
6-2. Il moto del baricentro.....	77
6-3. Il lavoro interno.....	78
6-4. La quantità di moto.....	79
6-5. Conservazione della quantità di moto.....	80
ESERCIZI SUI SISTEMI DI PARTICELLE.....	81
Esercizio 22.....	81
Esercizio 23.....	82
Esercizio 24.....	83
Esercizio 25.....	83
CAP. 7 – GLI URTI.....	85
7-1. L'impulso e la quantità di moto.....	85
7-2. Urti elastici in una dimensione.....	86
7-3. Urti anelastici.....	88
7-4. Urti elastici in due dimensioni.....	89
ESERCIZI SUGLI URTI.....	92
Esercizio 26.....	92
Esercizio 27.....	92
Esercizio 28.....	93
Esercizio 29.....	94
CAP. 8 – SISTEMI RUOTANTI.....	96
8-1. Cinematica rotazionale.....	96
8-2. Momento di un vettore.....	97
8-3. Momento di una coppia.....	100
8-4. Il momento angolare e momento d'inerzia.....	100
8-5. Energia cinetica di rotazione.....	101
8-6. Momenti d'inerzia di alcuni corpi.....	102
Sbarretta sottile di lunghezza $l$ .....	102
Cilindro circolare di lunghezza $l$ e raggio $R$ .....	103
Cilindro circolare vuoto di raggi $R$ ed $r$ .....	103

Parallelepipedo di lati $a, b, c$ .....	104
Lastra sottile rettangolare di lati $a$ e $b$ .....	104
Toro con raggio interno $r$ ed esterno $R$ .....	105
Cono circolare con raggio di base $r$ ed altezza $h$ .....	105
Lastra circolare di raggio $R$ .....	106
Lastra circolare forata con raggio interno $r$ ed esterno $R$ .....	106
Nastro circolare sottile di raggio $R$ .....	107
Sfera piena di raggio $R$ .....	107
Sfera vuota di raggio $R$ .....	108
Sfera scavata con raggi interno $r$ ed esterno $R$ .....	108
Ellissoide con semiassi $a, b, c$ .....	109
8-7. Teorema degli assi paralleli per i momenti d'inerzia .....	109
8-8. Rotolamento di un corpo rigido .....	110
8-9. Conservazione del momento angolare .....	111
ESERCIZI SUI SISTEMI RUOTANTI .....	112
Corrispondenze da ricordare: .....	112
Esercizio 30 .....	112
Esercizio 31 .....	113
Esercizio 32 .....	114
Esercizio 33 .....	115
Esercizio 34 .....	115
CAP. 9 – APPROFONDIMENTI .....	117
9-1. Sul moto circolare uniforme .....	117
9-2. Formula di Poisson .....	119
9-3. Accelerazione di Coriolis .....	121
9-4. Effetti della forza di Coriolis .....	123
CAP. 10 – EQUILIBRIO DEI CORPI RIGIDI .....	124
10-1. Equilibrio statico .....	124
10-2. Equilibrio dei corpi appoggiati .....	124
10-3. Equilibrio dei corpi sospesi .....	125
ESERCIZI SULL'EQUILIBRIO .....	126
Esercizio 35 .....	126
Esercizio 36 .....	127
CAP. 11 – IL MOTO ARMONICO .....	129
11-1. Generalità .....	129
11-2. Approccio cinematico .....	129
11-3. Approccio dinamico .....	132
11-4. Il pendolo .....	133
11-5. L'energia nel moto armonico .....	135
11-6. Equazione differenziale del moto armonico .....	135
11-7. Il moto armonico smorzato .....	137
11-8. Oscillazioni armoniche forzate .....	139
CAP. 12 – LA GRAVITAZIONE .....	143
12-1. La legge della gravitazione universale .....	143
12-2. Le forze esistenti in natura .....	144
12-3. Massa inerziale e gravitazionale .....	145
12-4. Distribuzione sferica di massa .....	146
12-5. Il campo gravitazionale .....	148
12-6. Il principio di sovrapposizione .....	149
12-7. Energia potenziale gravitazionale .....	150
12-8. Potenziale e superfici equipotenziali .....	152

12-9. La prima legge di Keplero .....	153
12-10. La seconda legge di Keplero.....	156
13-10. La terza legge di Keplero.....	157
14-10. La velocità di fuga .....	158
<b>CAP. 13 – I FLUIDI</b> .....	<b>160</b>
13-1. La pressione e la densità .....	160
13-2. La legge di Stevin .....	160
13-3. Principio di Pascal .....	162
13-4. Principio di Archimede.....	162
13-5. La pressione atmosferica .....	163
13-6. Il martinetto idraulico .....	164
13-7. Equazione di Bernouilli .....	164

## BIBLIOGRAFIA

- D. Halliday – R. Resnick – Fondamenti di Fisica I – Zanichelli Editore
- C. Mencuccini – V. Silvestrini – Fisica I – Liguori Editore
- R. A. Serway – Fisica per scienze ed ingegneria – Vol. I – Soc. Edit. Scientifica

## INTRODUZIONE

Un fanciullo riceve in regalo un oggetto strano e con colori brillanti.

Le sue piccole dita afferrano l'oggetto per esplorarne la forma e la struttura. Egli scuote l'oggetto per vedere se si rompe e quasi certamente lo porta alla bocca.

Il piccolo usa tutti i suoi sensi per esplorarne la grandezza, la forma, i colori, la struttura, il suono.

E' naturalmente curioso e comincia prestissimo ad apprendere informazioni sul mondo circostante.

Questa curiosità innata, più evidente nel periodo dello sviluppo, è caratterizzata dalla domanda:

“Perché ?”

E' stimolante anche da adulti tornare ad avere delle curiosità come i fanciulli.

La scienza, ed in particolare la fisica, tenta di rispondere ai perché del mondo naturale.

Nella ricerca delle risposte i fisici hanno esteso l'interesse dell'osservazione umana ad una grande quantità di fenomeni: dallo studio delle particelle subatomiche a quello delle stelle e delle galassie.

La fisica è la più importante delle scienze che studiano la natura.

Essa rappresenta sia un metodo di studio che un punto di vista del mondo naturale, con lo scopo di spiegare il comportamento del mondo fisico per mezzo di pochi principi fondamentali.

In questo senso lo studio della fisica è semplice perché richiede la padronanza soltanto di pochi principi fondamentali, che sintetizzano tutto ciò che i fisici hanno scoperto nell'ordinamento dell'universo.

E' un gran viaggio costellato da molte domande e da poche risposte.

Ci si può domandare se sia un bene o un male progredire sempre più nella ricerca scientifica, e si potrebbero portare molti esempi sia a favore che contro questo interrogativo.

A questo proposito Bertrand Russell (1872-1970) disse: “Non credo che la conoscenza scientifica possa mai essere dannosa. Ciò che sostengo, e sostengo con vigore, è che la conoscenza è più spesso utile che dannosa, e che il timore della conoscenza è invece più spesso dannoso che utile”.

Infine voglio accennare al fatto che l'evoluzione della fisica ha spesso portato radicali cambiamenti alle teorie precedenti e fieri contrasti (si pensi per esempio alla teoria eliocentrica di Galileo o alle innovazioni introdotte dalla teoria della relatività), che sono stati assorbiti ed accettati solo dopo diverso tempo dalla loro formulazione.

Ma, come affermò Clement V. Durell, “la storia del progresso scientifico dimostra come siano indigeste le nuove idee all'uomo comune, privo di immaginazione, di una certa epoca, ma come poi le idee che hanno superato la prova del tempo vengano assimilate facilmente dall'uomo comune, privo di immaginazione delle epoche successive”.

## CAP. 1 - CALCOLO VETTORIALE

### 1-1. Elementi di calcolo vettoriale

Molte grandezze fisiche sono completamente descritte dal valore numerico della loro grandezza (per esempio il tempo, la temperatura, il volume, ecc ).

Ma altre grandezze fisiche (per esempio la forza, la velocità, l'accelerazione, lo spostamento, ecc), hanno bisogno anche della conoscenza della **direzione** verso la quale sono rivolte.

Le prime si chiamano **grandezze scalari**, le seconde vengono invece dette **grandezze vettoriali**.

Si usa questo simbolo perché le grandezze vettoriali possono essere rappresentate appunto da una freccia.

Un vettore è caratterizzato da:

- La **lunghezza** della freccia (detta anche intensità o modulo).
- Una **direzione**, costituita dalla retta che attraversa la freccia (che si chiama anche **retta di applicazione**).
- Un **verso**, fissato dalla punta della freccia.

Il punto iniziale della freccia si chiama **punto di applicazione** del vettore.

Spostando un vettore parallelamente a se stesso con una traslazione si ha un vettore **equipollente** (o **equivalente**) a quello iniziale.

Tipograficamente il vettore viene indicato **con una lettera sulla quale si trova una piccola freccetta**, oppure più semplicemente **con una lettera scritta in grassetto** (per esempio  $\vec{v}$  o  $\mathbf{v}$  indica il vettore velocità, mentre  $v$  indica semplicemente il suo valore scalare, la sua lunghezza).

Un vettore può essere espresso (con molti vantaggi) utilizzando i **versori**.

**Un versore è un vettore di lunghezza unitaria avente una direzione prestabilita.**

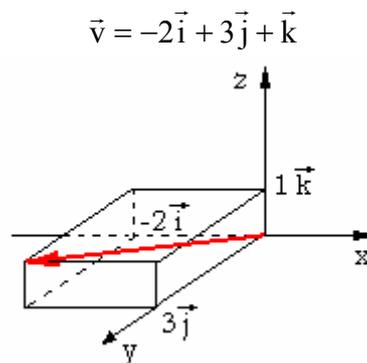
Nei casi in cui esso è parallelo all'asse  $x$  lo indicheremo con i simboli  $\vec{i}$  o  $\mathbf{i}$ , quando è parallelo all'asse  $y$  lo indicheremo con  $\vec{j}$  o con  $\mathbf{j}$ , ed infine quando è parallelo all'asse  $z$  (nello spazio a 3 dimensioni), lo indicheremo con  $\vec{k}$  o con  $\mathbf{k}$ .

Il versore serve spesso per rendere vettoriale una grandezza scalare senza alterarne il valore, perché moltiplicando uno scalare per il versore, si ottiene un vettore diretto come il versore e con lunghezza pari al valore scalare.

Se il valore scalare è negativo il vettore cambia anche il verso.

Questo criterio permette di esprimere un vettore in modo molto sintetico ed espressivo.

Per esempio il vettore



è formato dalla somma (vettoriale) di tre vettori:

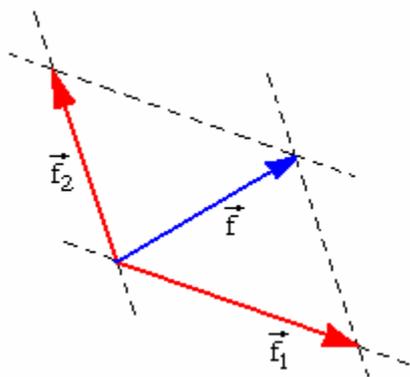
- $-2\vec{i}$  è un vettore con lunghezza due e diretto come l'asse x (ma con verso opposto).
- $3\vec{j}$  è un vettore con lunghezza tre e diretto come l'asse y.
- $\vec{k}$  è un vettore con lunghezza unitaria e diretto come l'asse z.

Componendo con la regola del parallelogramma prima la lunghezza di due vettori (a caso) e poi ancora con la regola del parallelogramma il risultato ottenuto con la lunghezza del terzo ed ultimo vettore, si ottiene appunto la lunghezza del vettore risultante  $\vec{v}$ .

## Somma algebrica fra vettori

Limitiamoci per ora a considerare vettori giacenti su uno stesso piano.

La somma fra due vettori complanari si esegue applicando i due vettori in uno stesso punto, e costruendo un parallelogramma.



Nel caso in cui siano applicati in due punti diversi, basta farli scorrere sulle loro rette di applicazione fino a quando non risultino applicati in uno stesso punto.

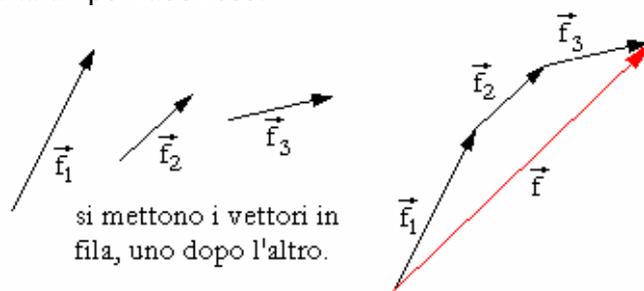
La diagonale del parallelogramma (vedi figura a fianco) fornisce il vettore  $f$  risultante.

Si può anche eseguire l'operazione contraria: un vettore  $f$  può essere scomposto in due componenti  $f_1$  e  $f_2$  applicando la regola del parallelogramma. Si scelgono due rette arbitrarie passanti per il punto di applicazione di  $f$ , e si costruisce il parallelogramma.

Chiaramente questa operazione si può fare in infiniti modi differenti. Essa diventa unica solo se vengono assegnate le direzioni che devono avere le componenti.

Per sommare tre (o più) vettori fra loro, si può applicare più volte successivamente la regola del parallelogramma: prima si trova la risultante fra due vettori e poi si trova la risultante fra questa e il terzo vettore.

Qualunque sia l'ordine con cui si prendono i vettori, il vettore finale sarà sempre lo stesso. Questo metodo però risulta un po' laborioso.



Si preferisce ricavare il risultante disponendo i tre vettori in fila (anche qui non importa l'ordine con cui si prendono), in modo che l'inizio di ogni vettore coincida con la punta del precedente.

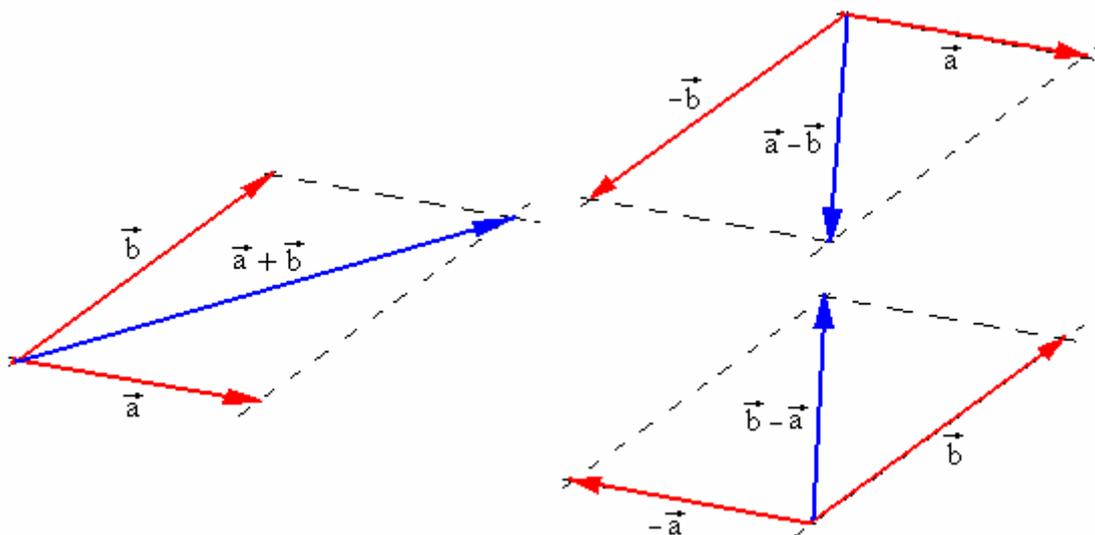
Il vettore  $f$  che unisce l'inizio del primo con la punta dell'ultimo è il vettore risultante.

Questo metodo grafico prende il nome di **metodo del poligono funicolare**.

Invece per sottrarre fra loro due vettori è sufficiente trasformare la differenza in somma, aggiungendo al primo vettore l'opposto del secondo:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

Nella rappresentazione grafica risulta evidente che dati due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , mentre una diagonale del parallelogramma fornisce la somma vettoriale  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , l'altra diagonale fornisce la differenza  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  o  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  (infatti la differenza fra due vettori non gode della proprietà commutativa).



Vediamo ora come sia possibile sommare due vettori sfruttando la loro rappresentazione con i versori.

Siano dati due vettori

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} \end{cases}$$

la somma vettoriale (attenzione a non confondere la somma scalare con quella vettoriale ! Dati due vettori lunghi rispettivamente 3 e 4 e normali fra loro, la somma scalare delle loro lunghezze è 7, mentre la somma vettoriale è un vettore lungo 5), è

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$$

Sostituendo si ottiene

$$(1-1) \quad \vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \pm (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j}$$

### Esempio

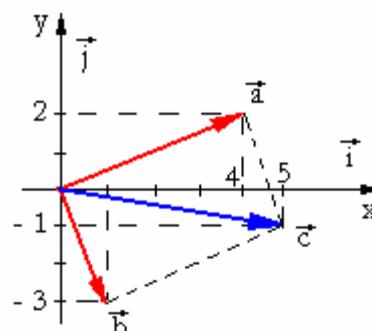
Passando dalle lettere ad un esempio numerico, si ha

$$\begin{cases} \vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} \end{cases}$$

La somma vettoriale è

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (4+1)\vec{i} + (2-3)\vec{j} = 5\vec{i} - \vec{j}$$

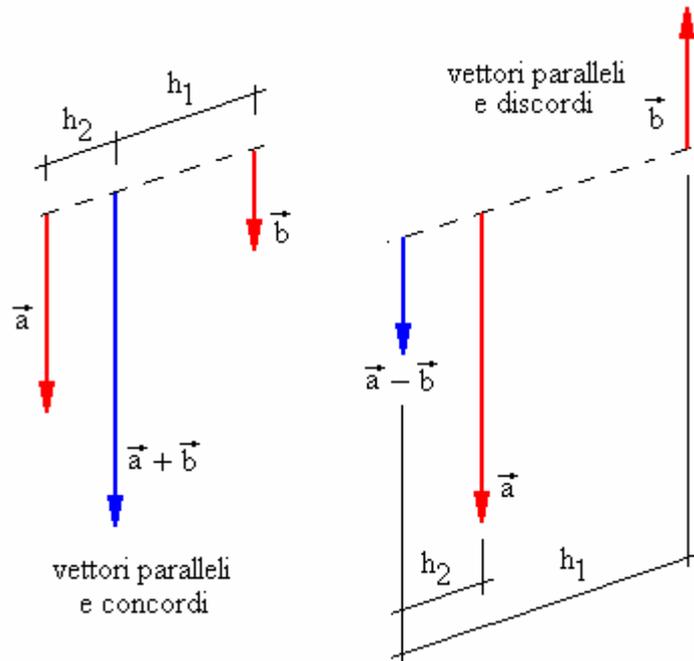
come si può verificare nella figura qui sopra, tale risultato corrisponde proprio alla diagonale del parallelogramma formato dai due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .



## Somma di due vettori paralleli

Se due vettori **a** e **b** sono paralleli, come è possibile sommarli, visto che non è possibile farli scorrere sulle loro rette di applicazione fino a far coincidere i loro punti di applicazione ?

Se i vettori sono paralleli e concordi si ha la situazione illustrata a sinistra, mentre se sono paralleli e discordi si ha la situazione illustrata a destra.



In entrambi i casi la lunghezza della risultante si trova semplicemente sommando o sottraendo le lunghezze dei due vettori **a** e **b**.

La risultante risulta parallela ad **a** e **b**, ed è applicata in un punto che in entrambi i casi si ottiene imponendo la relazione

$$\vec{a} : \vec{b} = h_1 : h_2$$

(vettore lungo sta a vettore corto, come lunghezza grande sta a lunghezza piccola).

Nel caso dei vettori concordi il punto di applicazione è intermedio fra **a** e **b**.

Invece nel caso dei vettori discordi il punto di applicazione è esterno e si trova dalla parte del vettore lungo.

La ragione per cui si deve applicare questo criterio potrà essere compresa quando sarà spiegato cosa è il momento di una forza.

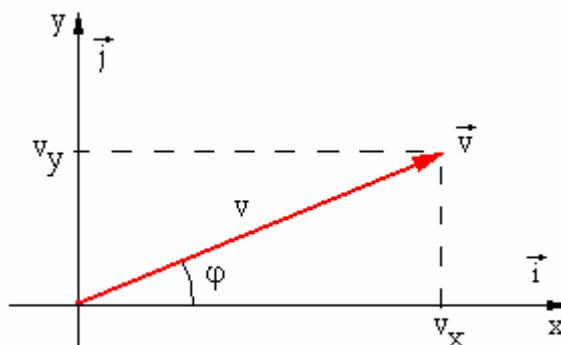
## Forme rettangolare e polare di un vettore

L'espressione

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

viene anche detta **forma rettangolare** del vettore perché le sue componenti formano i lati di un rettangolo.

Lo stesso vettore può però essere espresso anche mediante la trigonometria, nel modo seguente



Sappiamo che

$$\begin{cases} v_x = v \cos \varphi \\ v_y = v \sin \varphi \end{cases}$$

Quadrando e sommando membro a membro, si ha

$$\begin{cases} v_x^2 = v^2 \cos^2 \varphi \\ v_y^2 = v^2 \sin^2 \varphi \end{cases} \rightarrow v_x^2 + v_y^2 = v^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \rightarrow v_x^2 + v_y^2 = v^2$$

mentre invece dividendo membro a membro, si ha

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{v \sin \varphi}{v \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi \rightarrow \varphi = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

Il vettore  $\vec{v}$  si può anche esprimere quindi sotto la forma

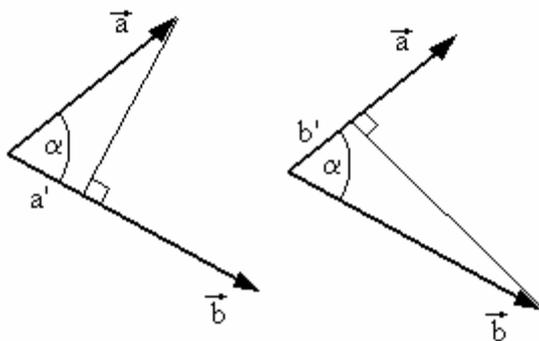
$$\begin{cases} v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{v_y}{v_x} \end{cases}$$

detta **forma polare**, in cui la sua lunghezza  $v$  e l'angolo  $\varphi$  che esso forma con l'asse  $x$ , sono espressi per mezzo delle sue componenti  $v_x$  e  $v_y$ .

## 1-2. Prodotto scalare fra due vettori

Dati due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  il loro prodotto scalare è un numero c (quindi uno scalare e non un vettore) corrispondente al prodotto della lunghezza di  $\mathbf{a}$  per la proiezione di  $\mathbf{b}$  lungo la direzione di  $\mathbf{a}$ , oppure (vedremo che è la stessa cosa) al prodotto della lunghezza di  $\mathbf{b}$  per la proiezione di  $\mathbf{a}$  lungo la direzione di  $\mathbf{b}$ .

Il prodotto scalare si indica con un puntino.



Osservando la figura qui a fianco si ricava allora che (proiettando  $\mathbf{a}$  lungo  $\mathbf{b}$  come nella costruzione a sinistra)

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a'b = a \cos \alpha \quad b = a b \cos \alpha$$

Mentre, proiettando  $\mathbf{b}$  lungo  $\mathbf{a}$  come nella costruzione a destra, si ha

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a b' = a b \cos \alpha$$

Come si vede, in entrambi i casi si ha lo stesso risultato.

Si può dunque affermare che il prodotto scalare **gode della proprietà commutativa**.

Quindi per calcolare il prodotto scalare vale la formula

$$(1-2) \quad c = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a b \cos \alpha$$

Notiamo che se la (1-2) fornisce un risultato positivo, allora l'angolo fra i due vettori è acuto.

Mentre se invece il risultato è negativo, l'angolo è ottuso.

Se infine il risultato è nullo, i due vettori sono perpendicolari fra loro.

Questa osservazione conduce ad un risultato importante: un prodotto scalare può essere nullo anche quando entrambi i vettori **non sono nulli**, ma sono **perpendicolari fra loro**.

Infatti in questo caso la proiezione di un vettore lungo la direzione dell'altro è nulla.

Vediamo ora come si calcola il prodotto scalare per mezzo dei versori.

Dati due vettori

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} \end{cases}$$

Il loro prodotto scalare è

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j})$$

applicando la proprietà distributiva, si ottiene

$$(1-3) \quad c = a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j}$$

Ora osserviamo che moltiplicando scalarmene fra loro i versori (si ricordi che la loro lunghezza è uguale ad 1, e se i vettori sono paralleli  $\cos \alpha = \cos 0^\circ = 1$ , mentre se sono perpendicolari fra loro  $\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$ ), si ottiene

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \end{cases}$$

e quindi, sostituendo nella (1-3), il prodotto scalare fra i vettori **a** e **b**, è semplicemente

$$(1-4) \quad c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Ragionando in modo analogo, se i vettori si trovano invece **nello spazio a tre dimensioni**, si ha

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{cases}$$

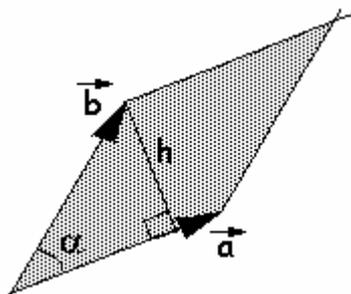
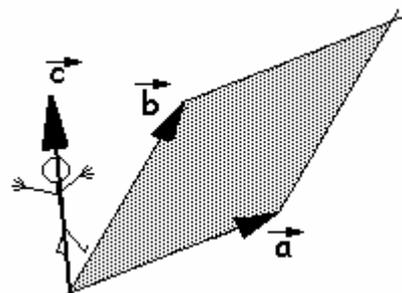
e il prodotto scalare diviene

$$(1-5) \quad c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

## 1-3. Prodotto vettoriale fra due vettori

Dati due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  il loro prodotto vettoriale è un vettore  $\vec{c}$  (quindi un vettore e non uno scalare), avente le seguenti caratteristiche:

- La lunghezza di  $\vec{c}$  corrisponde all'area del parallelogramma formato da  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (ombreggiato nella figura).
- La direzione di  $\vec{c}$  corrisponde a quella di una retta perpendicolare al piano su cui si trovano  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (quindi la sua direzione è perpendicolare al foglio).
- Il verso di  $\vec{c}$  è tale che tale vettore "personificato" deve vedere il primo vettore  $\vec{a}$  ruotare in verso antiorario per sovrapporsi a  $\vec{b}$ , lungo la via più breve (vedi figura).



Il prodotto vettoriale si indica con una crocetta analoga al segno di moltiplicazione.

Abbiamo detto che la lunghezza del vettore  $\vec{c}$  corrisponde all'area del parallelogramma.

Considerando come base del parallelogramma il lato  $a$ , la sua altezza è  $h$ . Poiché nel triangolo rettangolo della figura qui a

fianco risulta  $\sin \alpha = \frac{h}{b}$  l'area del parallelogramma è

$$(1-6) \quad c = \text{base per altezza} = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Anche il prodotto vettoriale ha una proprietà importante: esso è nullo quando almeno uno dei due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  è nullo, ma è nullo anche quando pur essendo entrambi i vettori non nulli, essi **sono paralleli fra loro**.

Infatti in questo caso il parallelogramma si schiaccia fino ad assumere una superficie nulla.

Si noti anche che, a differenza del prodotto scalare, quello vettoriale non gode della proprietà commutativa. Infatti scambiando fra loro i due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , il vettore  $\vec{c}$  cambia verso.

In altre parole

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad \text{mentre} \quad \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$$

Come si calcola il prodotto vettoriale utilizzando i versori ?

Poiché il vettore  $\vec{c}$  è perpendicolare ad  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , è necessario prendere in considerazione un riferimento cartesiano in tre dimensioni anziché due.

Quindi i due vettori moltiplicati vettorialmente fra loro saranno espressi con tre versori invece di due ( $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  dove l'ultimo versore è quello parallelo all'asse  $z$ ).

Dati dunque

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{array} \right.$$

si ha

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

Applicando la proprietà distributiva si ha

$$(1-7) \quad \begin{aligned} \vec{c} = & a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + \\ & + a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} + \\ & + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} \end{aligned}$$

Ora, ricordando al solito che i versori hanno lunghezza unitaria, quando sono perpendicolari fra loro si ha  $\text{sen}\alpha = \text{sen}90^\circ = 1$  e, applicando la regola che permette di stabilire il verso e quindi il segno del prodotto vettoriale, possiamo scrivere per i seguenti prodotti vettoriali:

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \text{e quindi} & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \text{e quindi} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \text{e quindi} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{cases}$$

mentre quando i vettori sono paralleli si ha  $\text{sen}\alpha = \text{sen}0^\circ = 0$  e perciò per i seguenti prodotti vettoriali si ha invece

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Sostituendo nella (1-7), si ottiene

$$(1-8) \quad \vec{c} = a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i}$$

Per la lunghezza del vettore  $\vec{c}$  si ha quindi

$$(1-9) \quad c = a_x b_y - a_x b_z - a_y b_x + a_y b_z + a_z b_x - a_z b_y$$

Ora osserviamo la seguente matrice quadrata del terzo ordine (cioè con tre righe e tre colonne)

$$(1-10) \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Questa può risolversi con la regola di **Sarrus**, che consiste nel ripetere le prime due colonne, poi occorre tracciare tre freccette rivolte diagonalmente verso il basso (**diagonali principali**) e tre freccette rivolte diagonalmente verso l'alto (**diagonali secondarie**), come nella figura.



Ebbene, la matrice equivale alla somma dei prodotti degli elementi appartenenti alle diagonali principali meno i prodotti degli elementi appartenenti alle diagonali secondarie.

Si può constatare che sviluppando la matrice nel modo indicato si riottiene esattamente il valore del vettore  $\vec{c}$  espresso dalle (1-8).

Quindi il prodotto vettoriale si può calcolare semplicemente formando una matrice quadrata in cui nella prima riga compaiono i tre versori degli assi, nella seconda riga le tre componenti del primo vettore  $\vec{a}$ , e nella terza riga le tre componenti del secondo vettore  $\vec{b}$ .

**Esempio**

Dati i vettori  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$  e  $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{k}$  per il loro **prodotto vettoriale** si ha

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k} - 6\vec{k} - \vec{j} + 0\vec{i} = 2\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}$$

Mentre il loro **prodotto scalare** è

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 = 3 - 2 = 1$$

## CAP. 2 – CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

Un corpo mentre si muove può ruotare su se stesso, si può allungare o contrarre, può vibrare, può suddividersi in più parti.

Basta immaginare per esempio ad una goccia d'acqua che si stacca da un rubinetto e cade in terra. In questa parte della fisica prendiamo invece in considerazione soltanto un corpo immaginario costituito da un singolo punto (detto punto materiale) e ci proponiamo di studiare il loro moto.

In altre parole non ci interessano per ora le cause che generano il moto, le dimensioni del corpo, le sue caratteristiche fisiche e chimiche (colore, forma, tipo di materiale), ma ci proponiamo di studiare essenzialmente la sua **traiettoria nello spazio**, e le sue **leggi orarie** (cioè formule che ci permettano di conoscere come variano nel tempo la sua posizione, la velocità e l'accelerazione. Si comprenderà in seguito che la maggior parte dei moti reali riguardano corpi rigidi che possiamo immaginare condensati in un punto e quindi i risultati forniti dalla cinematica del punto potranno essere applicati con buona approssimazione anche ai loro movimenti.

Cominciamo con il notare che lo **spostamento** di un punto da A a B può essere considerato una **grandezza vettoriale**. Infatti possiamo associare allo spostamento un vettore con punto di applicazione in A e con la punta della freccia in B.

Ed ora passiamo a introdurre i concetti di velocità ed accelerazione, anche queste entrambe grandezze vettoriali.

### 2-1. La velocità

La velocità si definisce come il rapporto fra lo spostamento e il tempo impiegato a percorrerlo.

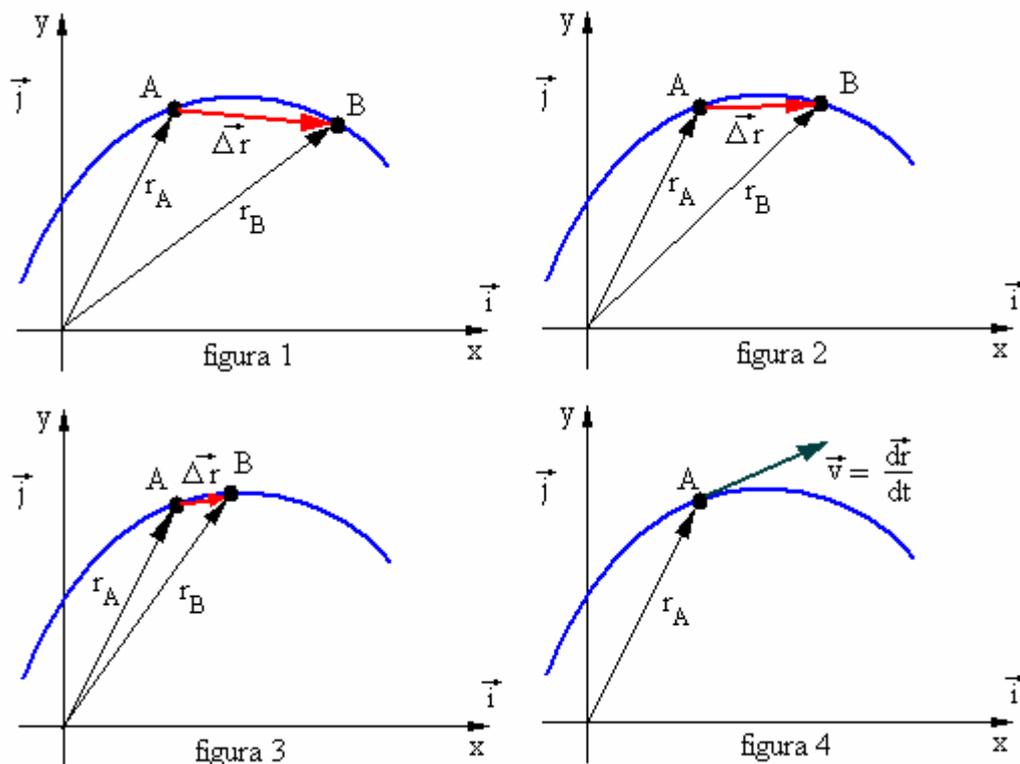
$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\text{spostamento (vettore)}}{\text{tempo impiegato (scalare)}}$$

Poiché è formata da un vettore diviso uno scalare,  $\vec{v}$  è un nuovo vettore avente la stessa direzione di  $\vec{\Delta r}$  ma lunghezza divisa per lo scalare  $\Delta t$ .

Notiamo che il vettore  $\vec{\Delta r}$  non ha la direzione di  $\vec{r}$ .

Il simbolo  $\Delta$  ha il significato di “differenza fra ...” e quindi  $\Delta t$  significa differenza fra due tempi (cioè per esempio  $t_2 - t_1$ ), e allo stesso modo  $\vec{\Delta r}$  significa differenza fra due spostamenti (cioè per esempio  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ).

Dopo questa precisazione osserviamo le figure seguenti



Consideriamo il punto materiale nelle due posizioni A e B (figura 1). I vettori spostamento sono indicati dalle due frecce  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$ .

In base al criterio esposto in precedenza per calcolare la differenza fra due vettori, il vettore  $\vec{\Delta r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$  corrisponde alla diagonale corta del parallelogramma formato da  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$ .

Si ottiene quindi la formula

$$(2-1) \quad \vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_B - t_A}$$

che si chiama **velocità media** fra i due istanti  $t_A$  e  $t_B$ .

Ora, mantenendo fermo il punto A, avviciniamo gradualmente il punto B ad A (figure 2 e 3).

Il vettore  $\vec{\Delta r}$  diviene più piccolo, ma ruota intorno al punto di applicazione A tendendo a divenire parallelo alla traiettoria.

Quando il punto B raggiunge il punto A (figura 4), il vettore  $\vec{\Delta r}$  è diventato parallelo ed avviene una cosa molto importante (che costituisce il fondamento dell'analisi matematica): sia il numeratore

che il denominatore di  $\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$  si annullano, ma il rapporto continua a mantenere un valore finito (che si chiama derivata dello spostamento rispetto al tempo).

Questo valore prende il nome di **velocità istantanea** al tempo  $t_A$  e si indica con il simbolo

$$(2-2) \quad \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Dal punto di vista matematico la velocità istantanea è la derivata dello spostamento rispetto al tempo.

Per esempio la velocità che leggiamo sul tachimetro dell'automobile è una velocità istantanea.

Le unità di misura per la velocità si esprimono in m/s (cioè in metri al secondo). Talvolta può far comodo esprimerle in modo diverso, per esempio in Km/h (chilometri l'ora).

Come si effettua la trasformazione di una velocità da m/s in Km/h (o viceversa) ?

Basta osservare che

$$1 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 1 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Quindi la costante 3,6 è il **fattore di conversione** che ci permette di passare da un criterio di misura all'altro.

Per esempio

$$60 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = \frac{60 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \cong 16,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$50 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 50 \cdot 3,6 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 180 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

## 2-2. L'accelerazione

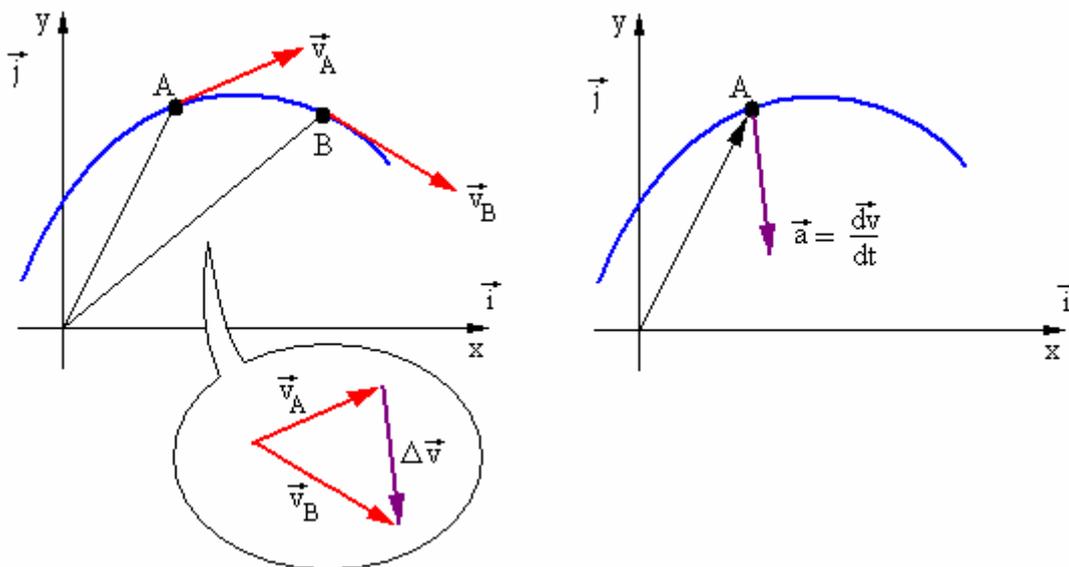
L'accelerazione si definisce come il rapporto fra una variazione di velocità e il tempo impiegato ad ottenere tale variazione.

$$\vec{a} = \frac{\overline{\Delta \vec{v}}}{\Delta t} = \frac{\text{variazione di velocità (vettore)}}{\text{tempo impiegato (scalare)}}$$

Poiché è formata da un vettore diviso uno scalare,  $\vec{a}$  è un nuovo vettore avente la stessa direzione di  $\overline{\Delta \vec{v}}$  ma lunghezza divisa per lo scalare  $\Delta t$ .

Anche in questo caso, similmente a quanto avveniva per la velocità, il vettore  $\overline{\Delta \vec{v}}$  non ha la direzione di  $\vec{v}$ .

Anche per l'accelerazione si distingue fra **accelerazione media** fra due istanti  $t_A$  e  $t_B$  ed **accelerazione istantanea** al tempo  $t_A$ .



Esse sono rispettivamente

$$(2-3) \quad \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{t_B - t_A} \quad \text{l'accelerazione media}$$

$$(2-4) \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{l'accelerazione istantanea}$$

Dal punto di vista matematico l'accelerazione istantanea è la derivata della velocità rispetto al tempo. Ma poiché questa era già a sua volta la derivata dello spazio, l'accelerazione è anche la derivata seconda dello spostamento rispetto al tempo.

Le unità di misura per l'accelerazione si esprimono in  $\frac{m}{s^2}$  (cioè in metri al secondo quadrato)

perché trattandosi di una velocità diviso un tempo, si ha

$$\frac{[\text{velocità}]}{[\text{tempo}]} = \frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s \cdot s} = \frac{m}{s^2}$$

(le parentesi quadre stanno ad indicare che si stanno facendo operazioni che riguardano le unità di misura).

## 2-3. Corpi in caduta libera

Quando un corpo è libero di cadere per effetto della gravità terrestre, si muove con una accelerazione costante.

Il moto viene detto in questo caso **naturalmente accelerato**.

Il valore di questa accelerazione è

$$(2-5) \quad \vec{g} \cong 9,8 \frac{m}{s^2}$$

e si chiama **accelerazione di gravità**.

Tale valore non è costante, ma varia da punto a punto della terra, anche se di poco, e varia anche (come vedremo in seguito) con l'altezza dal suolo.

In prima approssimazione, limitandoci ad una sola cifra decimale, possiamo considerare attendibile il valore della (2-5) se non prendiamo in considerazione distanze verticali molto grandi o molto distanti dalla superficie della terra.

In realtà l'accelerazione sarebbe rigorosamente costante se non ci fosse la presenza dell'aria che oppone una consistente azione frenante. Negli esercizi comunque, a meno che non sia precisato diversamente, assumeremo sempre che un corpo in caduta libera si muova con accelerazione costante.

Si potrebbe obiettare che l'esperienza comune ci mostra continuamente che per esempio una piuma impiega molto più tempo a cadere di un sasso. Questa differenza è però dovuta appunto alla presenza dell'aria: se in un tubo verticale di vetro aspiriamo l'aria possiamo verificare che i due oggetti cadrebbero impiegando esattamente lo stesso tempo.

Galileo per primo, nel 1600, stabilì con una semplice ed elegante dimostrazione teorica, che un corpo pesante (per esempio una incudine di ferro massiccio) lasciata libera di cadere, non raggiunge il suolo più rapidamente di un altro corpo più leggero (per esempio un comune martello).

Se fosse vera l'ipotesi secondo la quale l'incudine cade più velocemente del martello perché più pesante, e raggiunge prima il suolo, cosa dovrebbe succedere quando si lasciano cadere i due oggetti legati fra di loro con una fune ?

Il sistema dei due corpi uniti fra loro dovrebbe cadere **più lentamente** perché il martello in qualche modo frena l'incudine, ma nello stesso tempo il sistema dovrebbe cadere **più velocemente** perché i due corpi posseggono complessivamente una massa maggiore di quella della sola incudine o del solo martello.

Si arriva così alla conclusione assurda che l'incudine dovrebbe cadere **sia più lentamente che più velocemente del caso in cui essa non sia collegata con il martello.**

L'assurdo non può che nascere dal fatto che l'ipotesi è sbagliata: **i corpi debbono quindi cadere tutti con accelerazione costante.**

## 2-4. Moto rettilineo uniforme

Poiché il moto avviene su una retta possiamo tralasciare la notazione vettoriale e trattare spostamenti, velocità ed accelerazioni come se fossero grandezze scalari. Resta comunque inteso che essi restano sempre dei vettori diretti come la retta sulla quale avviene il moto.

Con il termine **uniforme** intendiamo specificare che **la velocità è costante.**

Consideriamo allora un punto P che si muove lungo una retta. Se la velocità è costante la velocità media e quella istantanea saranno sempre uguali e quindi possiamo usare indifferentemente la (2-1) o la (2-2).

Dalla (2-1) trascurando, come si è detto, la notazione vettoriale e indicando con la variabile s gli spostamenti, possiamo scrivere

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_B - s_A}{t_B - t_A}$$

se poi poniamo (per semplicità)  $t_A = 0$  e indichiamo la posizione corrispondente  $s_A$  con  $s_0$  (che chiameremo **spazio iniziale** perché rappresenta appunto la posizione del punto P nell'istante in cui cominciamo a contare i tempi), possiamo scrivere

$$v = \frac{s_B - s_0}{t_B - 0}$$

cioè, tralasciando l'indice B in quanto il punto B rappresenta ora una posizione generica del punto in movimento,

$$v = \frac{s - s_0}{t}$$

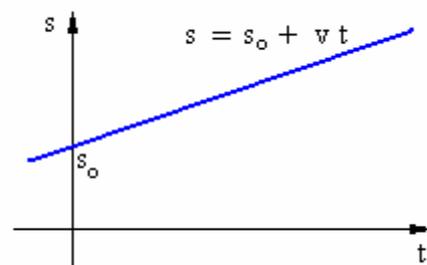
$$(2-6) \quad s = s_0 + v t$$

Questa formula rappresenta la **legge oraria del moto** (detta anche grafico **spazio-tempo**).

La velocità  $v$  e lo spazio iniziale  $s_0$  sono valori costanti, mentre  $t$  ed  $s$  sono delle variabili.

Riportando la (2-6) su un grafico cartesiano, mettendo in ascissa il tempo  $t$  ed in ordinata lo spazio  $s$ , si ha una retta.

Si tenga però ben presente che questo grafico **non rappresenta il moto del punto P**, ma solo come varia lo spazio percorso in funzione del tempo (la legge oraria,



appunto), che è una cosa molto diversa.

## 2-5. Moto rettilineo uniformemente accelerato

Anche in questo caso il moto avviene su una retta e quindi possiamo tralasciare la notazione vettoriale e trattare i vettori come se fossero grandezze scalari.

Consideriamo un punto P che si muove con accelerazione costante lungo una retta: in questo caso l'accelerazione media e quella istantanea saranno sempre uguali e quindi possiamo usare indifferentemente la (2-3) o la (2-4).

Dalla (2-3) si ha

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A}$$

se poi poniamo (per semplicità)  $t_A = 0$  e indichiamo la velocità corrispondente  $s_A$  con  $s_0$  (che chiameremo **velocità iniziale**), possiamo scrivere

$$a = \frac{v_B - v_0}{t_B - 0}$$

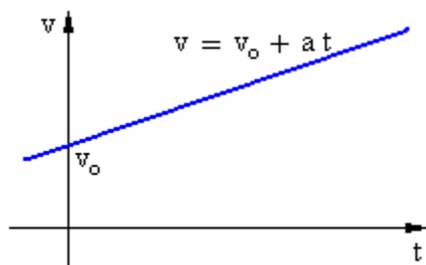
cioè,

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

(2-7)

$$v = v_0 + a t$$

Anche questa formula è una **legge oraria del moto** (è il grafico **velocità-tempo**).



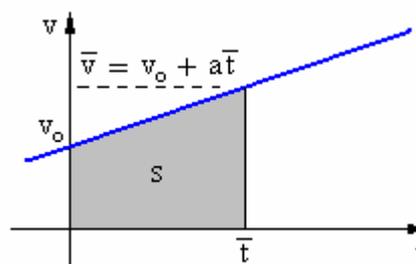
Riportando la (2-7) su un piano cartesiano, mettendo in ascissa il tempo  $t$  ed in ordinata la velocità  $v$ , si ha ancora una retta.

Anche qui si ricordi che il grafico **non rappresenta il moto del punto P**.

E' importante a questo punto fare una osservazione notevole che non riguarda solo il moto uniformemente accelerato, ma tutti i moti.

Nel grafico velocità-tempo, preso un generico istante  $\bar{t}$ , la superficie compresa fra l'asse  $x$  e la linea del moto (in questo caso la retta), e gli istanti  $t = 0$  e  $t = \bar{t}$  (vedi la regione colorata nella figura a fianco) rappresenta sempre **lo spazio percorso dal punto in movimento fra i due istanti di tempo**.

Questa corrispondenza è giustificata dal fatto che la superficie è formata da un tempo per una velocità che dimensionalmente è appunto una lunghezza, cioè uno spazio percorso.



Questa osservazione ci permette di ricavare una seconda legge oraria per il moto uniformemente accelerato.

Infatti calcoliamo l'area della regione colorata, cioè lo spazio  $s$  percorso dal punto: la figura è un trapezio con basi  $v_0$  e  $\bar{v}$ , ed altezza  $\bar{t}$ .

L'area è quindi (tralasciando la sopralinea perché ci riferiamo ad un tempo variabile, e non ad un istante generico fisso  $\bar{t}$ )

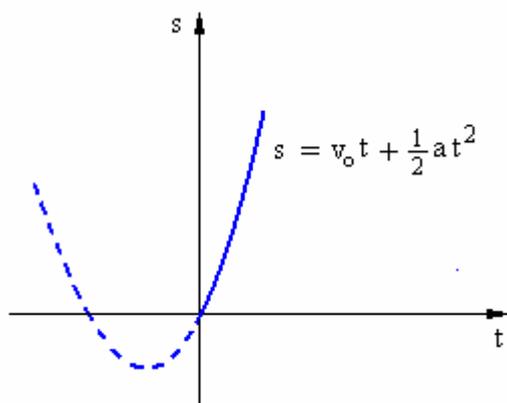
$$s = \frac{\text{base maggiore} + \text{base minore}}{2} \text{altezza} = \frac{(v_0 + at) + v_0}{2} t$$

cioè

$$s = \frac{1}{2}(at + 2v_0)t = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

(2-8)

$$s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$



Questa è **un'altra legge oraria** che mette in relazione lo **spazio** con il **tempo**.

Questa parabola passa per l'origine, ha asse di simmetria verticale, concavità verso l'alto, e la parte tratteggiata corrisponde a tempi negativi.

Avremmo potuto raggiungere lo stesso risultato ricorrendo all'analisi matematica.

Infatti sapendo che la velocità è la derivata dello spazio rispetto al tempo, al contrario conoscendo la velocità dobbiamo fare una operazione di integrazione per ottenere lo spazio.

Svolgendo i calcoli si ha

$$s = \int_0^t (v_0 + at) dt = \left[ v_0t + \frac{1}{2}at^2 \right]_0^t = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

che è identica alla (2-8).

## Una formula utile

Nel moto uniformemente o naturalmente accelerato le (2-7) e (2-8) possono essere scritte in modo semplificato nel caso in cui la velocità iniziale  $v_0$  sia nulla.

In tal caso esse divengono

$$\begin{cases} v = at \\ s = \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

ricavando il tempo dalla prima relazione ( $t = \frac{v}{a}$ ) e sostituendo nella seconda si ottiene

$$s = \frac{1}{2}a \frac{v^2}{a^2}$$

$$s = \frac{v^2}{2a}$$

$$v^2 = 2as$$

Quest'ultima relazione

$$v = \sqrt{2as}$$

ci permette di risolvere problemi in cui siano coinvolti solo accelerazione, velocità e spazio percorso, ma non il tempo.

Lo stesso calcolo si può facilmente ripetere anche con le leggi orarie (2-7) e (2-8) non semplificate, ottenendo una formula dello stesso genere, ma un po' più complessa.

Occupiamoci ora **dei moti che avvengono su un piano**, ed in particolare di due moti caratteristici: quello circolare uniforme e quello parabolico di un proiettile lanciato sotto l'effetto della gravità terrestre.

## 2-6. Moto circolare uniforme

La traiettoria è una circonferenza, e la legge del moto è uniforme (cioè la velocità è costante).

Precisiamo che la velocità si deve intendere costante come **lunghezza** del vettore, ma il vettore ruota continuamente mantenendosi in ogni istante tangente alla circonferenza.

Si chiama **periodo T** il tempo necessario perché il punto P compia un giro completo.

La **frequenza  $\nu$**  è invece il numero di giri eseguiti da P nell'unità di tempo.

Vale sempre la relazione

$$(2-9) \quad \nu = \frac{1}{T}$$

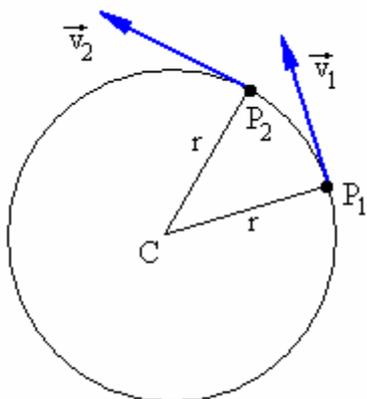
Il periodo si misura in secondi, mentre la frequenza si misura in giri/secondo detti anche Hertz (Hz). Il valore della velocità (detta anche velocità tangenziale o periferica) si può calcolare (ricordando che ha una lunghezza costante) eseguendo il rapporto  $\frac{\text{spazio}}{\text{tempo}}$  prendendo come spazio la lunghezza

dell'intera circonferenza, e come tempo quello necessario a percorrerla, cioè il periodo

$$(2-10) \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

Definiamo invece velocità **angolare  $\omega$** , non lo spazio percorso nell'unità di tempo, ma l'**angolo  $\alpha$**  percorso nell'unità di tempo.

Tale angolo è misurato in radianti.



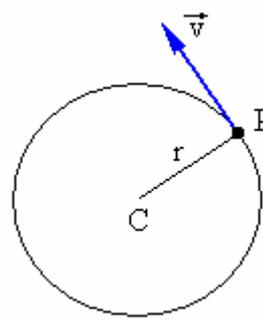
Anche la velocità angolare è costante e quindi si può calcolare facendo il rapporto fra l'angolo giro misurato in radianti ( $2\pi$ ) e il tempo necessario a percorrerlo, cioè il periodo T

$$(2-11) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

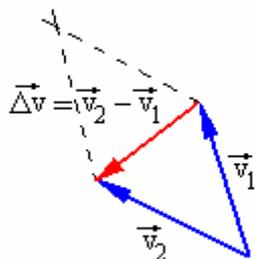
Sostituendo la (2-11) nella (2-10) quest'ultima può allora essere scritta anche nel modo seguente

$$(2-12) \quad v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

in cui si vede che **la velocità tangenziale  $v$  varia al variare del raggio, mentre la velocità angolare  $\omega$  è indipendente da esso.**



Comunque velocità tangenziale e velocità periferica sono legate dalla relazione  $v = \omega r$ .



Nel paragrafo 2-2 abbiamo visto (formule 2-3 e 2-4) che una variazione di velocità dà luogo ad una accelerazione, ed in questo caso la velocità rimane costante come lunghezza ma varia continuamente di direzione. Infatti le velocità illustrate nella figura precedente quando il punto si trova nelle posizioni  $P_1$  e  $P_2$ , danno luogo ad un  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  che, diviso per l'intervallo  $\Delta t$  necessario per percorrere l'arco  $\widehat{P_1 P_2}$ , fornisce una accelerazione diretta come  $\overline{\Delta \vec{v}}$  cioè **diretta verso il centro**. Questa accelerazione prende il nome, appunto, di **accelerazione centripeta** (cioè diretta verso il centro).

E' la presenza di questa accelerazione che costringe il punto P a deviare continuamente mantenendo una traiettoria circolare.

Anche l'accelerazione centripeta è un vettore costante in lunghezza, ma che ruota continuamente (compiendo un giro intero nel tempo T corrispondente al periodo).

Stabilito che l'accelerazione centripeta è sempre diretta verso il centro, proponiamoci ora di ottenere una formula che ci permetta di calcolare questa accelerazione centripeta.

Prendiamo allora in considerazione diversi vettori  $\vec{v}$  mentre il punto P descrive la circonferenza di raggio r.

Applichiamo questi vettori tutti in uno stesso punto.

Otteniamo la figura mostrata qui a fianco.

Se immaginiamo di aumentare il numero di punti avremo un numero molto maggiore di vettori  $\vec{v}$  ed il poligono indicato in figura tenderà a diventare una circonferenza (una nuova circonferenza immaginaria di raggio  $\vec{v}$  e non r!).

Quindi in un tempo T il vettore  $\overline{\Delta \vec{v}}$  descriverà una circonferenza di raggio  $\vec{v}$ .

Ebbene l'accelerazione centripeta può allora calcolarsi nel modo seguente

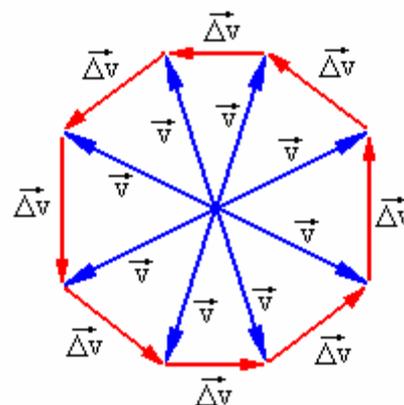
$$a = \frac{\text{lunghezza crf}}{\text{periodo}} = \frac{2\pi v}{T} = \frac{2\pi}{T} v = \frac{2\pi}{T} \frac{2\pi r}{T}$$

moltiplicando e dividendo per r si ottiene

$$(2-13) \quad a = \frac{2\pi r}{T} \frac{2\pi r}{T} \frac{1}{r} = v^2 \frac{1}{r} = \frac{v^2}{r}$$

o, anche, ricordando la (2-12)

$$(2-14) \quad a = \omega^2 r$$



## 2-7. Effetti di una accelerazione generica

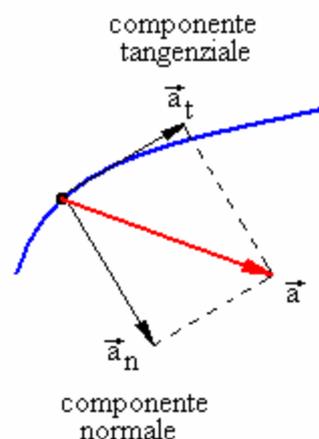
Applichiamo ad un corpo una accelerazione generica  $\vec{a}$ . Possiamo sempre scomporre questa accelerazione in due componenti: una  $\vec{a}_t$  tangente alla traiettoria nell'istante considerato, ed una  $\vec{a}_n$  normale, perpendicolare alla traiettoria stessa.

Gli effetti prodotti dalle due componenti sono indipendenti e possono essere studiati come se avvenissero da soli, ignorando l'altra componente.

La componente tangenziale agisce sulla legge oraria aumentando la lunghezza del vettore velocità ma senza avere alcuna influenza sulla traiettoria. Se agisse da sola il moto avverrebbe lungo una retta tangente alla traiettoria.

La componente normale invece agisce sulla traiettoria facendo ruotare il vettore velocità ma senza avere influenza sulla sua lunghezza. Se agisse da sola (e avesse valore costante) il moto avverrebbe su una circonferenza.

La possibilità di scomporre le due accelerazioni e studiare separatamente i loro effetti, è molto utile per la comprensione di molti fenomeni fisici.



## 2-8. Traiettoria di un proiettile

Si abbia un corpo (per esempio un proiettile, trattato sempre come se fosse un punto) lanciato in aria con una velocità iniziale  $v_0$  e con un certo angolo  $\alpha$  (detto **alzo**) rispetto alla direzione orizzontale.

Il suo moto si può pensare decomposto in due moti indipendenti: uno orizzontale lungo l'asse  $x$  con velocità costante  $v_{0x}$ , ed un altro verticale lungo l'asse  $y$ , uniformemente accelerato con velocità iniziale  $v_{0y}$  ed accelerazione  $-g$  (negativa perché l'asse delle ordinate è rivolto verso l'alto mentre l'accelerazione di gravità è invece rivolta verso il basso).

Il punto P rappresenta la posizione del corpo in un istante generico  $t$ .

La legge oraria lungo l'asse  $x$  è

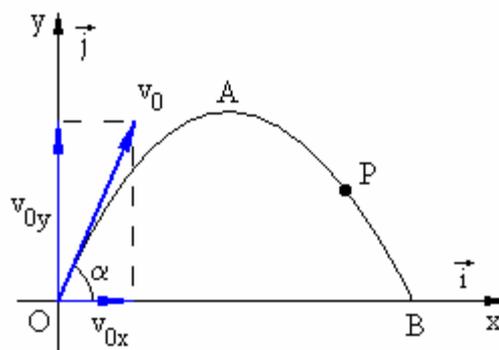
$$x = v_{0x} t$$

mentre quella lungo l'asse  $y$  è

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Il punto P nel generico istante  $t$  ha quindi le coordinate seguenti

$$\begin{cases} x = v_{0x} t \\ y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



che vengono dette anche **coordinate parametriche** di P (il parametro è il tempo t).

Il luogo (in matematica si chiama **luogo** un insieme di punti che rispettano tutti una certa proprietà geometrica o algebrica) descritto da P al passare del tempo (cioè al variare del parametro) si ottiene eliminando il parametro t dalle due leggi orarie.

Dunque, ricavando il tempo dalla prima equazione

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

e sostituendolo nella seconda, si ha

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

Ordiniamo poi i termini nel modo seguente

$$(2-15) \quad y = -\frac{g}{2v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x$$

cioè una parabola con asse verticale, passante per l'origine, con concavità rivolta verso il basso. Le coordinate del vertice (corrispondente alla **quota massima** raggiunta dal corpo nella sua traiettoria) sono

$$A \equiv \left( \frac{v_{0x} v_{0y}}{g}; \frac{v_{0y}^2}{2g} \right)$$

e quelle del punto B (corrispondente alla **gittata**, cioè alla distanza massima alla quale arriva il corpo, se il terreno è pianeggiante) sono

$$B \equiv \left( \frac{2v_{0x} v_{0y}}{g}; 0 \right)$$

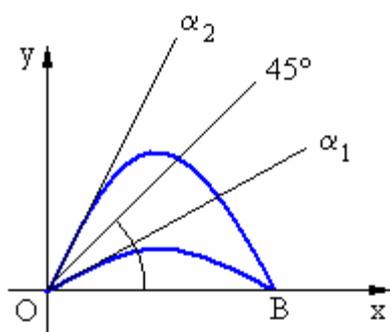
Quindi un proiettile per effetto della forza di gravità descrive una traiettoria parabolica.

Le componenti  $v_{0x}$  e  $v_{0y}$  possono anche essere espresse nel modo seguente

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Ricordiamoci comunque che nel calcolo della traiettoria abbiamo trascurato la resistenza dell'aria.

## Due angoli per una stessa gittata



Osservando la figura si può notare che per due angoli simmetrici (per esempio  $\alpha_1=45-10=35^\circ$  e  $\alpha_2=45+10=55^\circ$ ) rispetto alla bisettrice, si ottengono due parabole che forniscono la stessa gittata.

Con un alzo di  $45^\circ$  si ha la "gittata massima".

Anche in questo caso però prescindendo dalla presenza dell'aria che con il suo attrito deforma la traiettoria.

## Gli errori prima di Galileo

Nel medioevo si riteneva valida la teoria dell'**impetus**, come viene mostrato nella incisione a fianco.

Secondo la logica Aristotelica i corpi avevano due attributi: la **gravità** e la **leggerezza**.

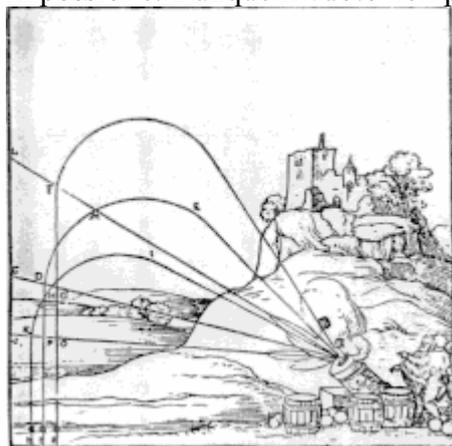
I loro moti potevano essere di due tipi: quelli **naturali** (come quello di un corpo in caduta libera) e quelli **violenti** (come quello di un corpo lanciato verso l'alto con una direzione qualsiasi).

L'impeto cioè la spinta iniziale, secondo la loro visione, impediva alla forza di gravità di agire e il corpo saliva con moto rettilineo e velocità costante.

Esaurito l'impeto il corpo cadeva in verticale con velocità proporzionale al suo peso (e non con accelerazione costante) e inversamente proporzionale alla densità dell'aria.

Fra l'altro questa teoria permetteva agli studiosi aristotelici di affermare che il vuoto non poteva esistere (infatti nel vuoto la densità è nulla e quindi il corpo doveva avere velocità infinita.

Ne derivava che esso poteva trovarsi contemporaneamente in due luoghi diversi, e ciò era impossibile. Dunque il vuoto non poteva esistere.)



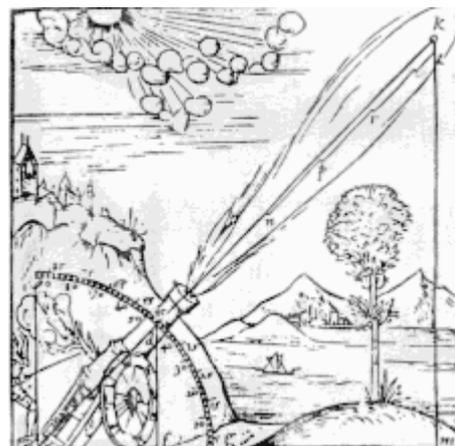
In epoca più vicina a noi, nel 1672, quindi dopo la morte di Galileo (avvenuta nel 1642), sopravvivevano ancora teorie errate: le traiettorie erano rappresentate come archi di circonferenza raccordate con segmenti rettilinei.

In trenta anni le idee di Galileo, pur così chiare e convincenti, non avevano ancora raggiunto una diffusione profonda.

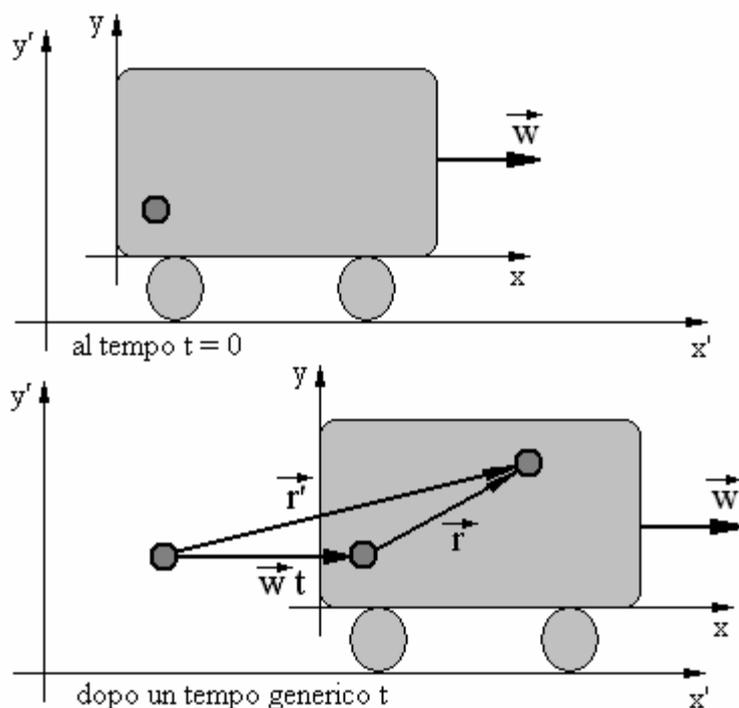
Il processo di Galileo sulla teoria geocentrica non è probabilmente la causa di tale ritardo.

La ragione principale è presumibilmente la tenacia con cui i pregiudizi tendono a permanere radicati nell'uomo, e la difficoltà (rispetto ad oggi) con cui le innovazioni scientifiche venivano divulgate fuori degli ambienti accademici.

Non c'erano infatti pubblicazioni internazionali, periodici scientifici e mass media, che permettessero una rapida diffusione delle notizie.



## 2-9. Velocità e accelerazione relative



Mettiamo ora a confronto le velocità e le accelerazioni misurate da due osservatori posti in due sistemi di riferimento che si muovono fra loro con velocità costante.

Per esempio, come mostra la figura a fianco, un osservatore fisso a terra su un sistema  $S'$  (che userà le coordinate  $x'$  e  $y'$ ), ed un osservatore su un vagone ferroviario che si muove con velocità  $\vec{w}$  e quindi solidale con un sistema  $S$  (che userà le coordinate  $x$  ed  $y$ ).

Un oggetto (il pallino scuro) viene lanciato in aria dall'osservatore che si trova sul vagone.

Dopo un generico tempo  $t$  il pallino si troverà in una posizione diversa (vedi seconda figura) e l'osservatore fisso a terra potrà visualizzare uno

spostamento  $\vec{r}'$ , mentre l'osservatore sul vagone registrerà uno spostamento  $\vec{r}$ .

Nel frattempo il vagone ferroviario, poiché procede con velocità costante  $\vec{w}$ , avrà percorso una lunghezza  $\vec{w}t$  (velocità per lunghezza = spostamento).

Osservando la figura ed interpretando la composizione di vettori come un poligono funicolare, possiamo scrivere

$$(2-16) \quad \vec{r}' = \vec{w}t + \vec{r}$$

Ora, derivando rispetto al tempo, otteniamo

$$(2-17) \quad \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{w} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}' = \vec{w} + \vec{v}$$

Quindi la velocità nel sistema  $S'$  è data dalla somma vettoriale della **velocità di trascinamento**  $\vec{w}$  per la velocità nel sistema  $S$ .

Vedremo in seguito che la (2-17) è valida soltanto se tutte le velocità in gioco sono molto più piccole della velocità della luce. In questo caso infatti occorre applicare le correzioni relativistiche.

Per quanto riguarda infine le accelerazioni nei due sistemi  $S$  ed  $S'$ , si può derivare la (2-17)

ricordando che abbiamo supposto costante la velocità di trascinamento  $\vec{w}$  (e quindi la sua derivata è nulla), ed ottenere

$$(2-18) \quad \vec{a}' = \vec{a}$$

Dunque nei due sistemi di riferimento  $S$  ed  $S'$  i due osservatori misureranno **la stessa accelerazione** per i movimenti dell'oggetto.

## ESERCIZI DI CINEMATICA

### Formule da ricordare:

Moto uniforme

$$s = s_0 + v\Delta t \quad \text{oppure} \quad s = vt$$

Moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \\ v = v_0 + a\Delta t \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} s = \frac{1}{2}at^2 \\ v = at \end{cases}$$

Eliminando il tempo fra le due si ha anche

$$(\Delta v)^2 = 2a(s - s_0) \quad \text{oppure} \quad v^2 = 2as$$

Moto circolare uniforme

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{T} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ v &= \frac{2\pi}{T}r = \omega r \\ a &= \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \end{aligned}$$

### Esercizio 1

Un aereo per poter decollare deve raggiungere la velocità di 360 km/h e la pista su cui sta rullando è lunga 1800 m.

Supponiamo che i motori forniscano una spinta costante, quindi il suo moto è uniformemente accelerato. Calcolare il valore dell'accelerazione e il tempo necessario per staccarsi dal suolo.

### Soluzione

Le leggi orarie sono

$$(2-19) \quad \begin{cases} s = \frac{1}{2}at^2 \\ v = at \end{cases} \quad (\text{spazio iniziale e velocità iniziale sono nulli})$$

Eliminando il tempo vale anche la formula

$$(2-20) \quad v = \sqrt{2as}$$

Poiché conosciamo

$$s = 1800 \text{ m}$$

$$v = 360 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{360 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Possiamo ricavare l'accelerazione utilizzando la (2-20)

$$v^2 = 2as$$

$$a = \frac{v^2}{2s}$$

Si ricordi che è sempre conveniente ricavare la formula risolvete con il calcolo letterale prima di sostituire i numeri alle lettere.

$$a = \frac{100^2}{2 \cdot 1800} = \frac{10000}{3600} \cong 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Il tempo necessario per il decollo si può ottenere dalla seconda relazione delle (2-19)

$$t = \frac{v}{a} = \frac{100}{2,8} = 35,7 \text{ sec}$$

## Esercizio 2

Un'auto si muove con accelerazione costante e attraversa due traguardi B e C posti a 60 metri uno dall'altro, in 6 secondi.

La sua velocità quando attraversa il traguardo C è di 54 km/h.

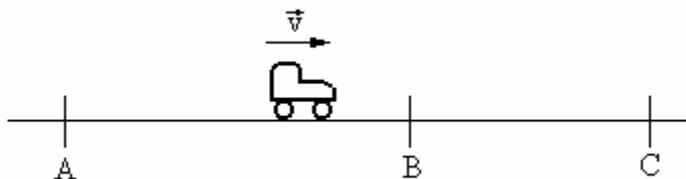
Qual'era la sua velocità quando ha attraversato il traguardo B ? Qual è la sua accelerazione ? Qual è la distanza fra il punto A in cui è partita (da ferma) e il traguardo B ?

## Soluzione

$$v_C = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{54}{3,6} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta s = s_C - s_B = 60 \text{ m}$$

$$\Delta t = t_C - t_B = 6 \text{ s}$$



L'auto si muove con accelerazione costante verso destra. Parte da ferma in A ed aumentando progressivamente la propria velocità attraversa il punto B e poi il punto C.

Talvolta può far comodo, ed è questo il caso, immaginare la situazione capovolta: l'auto parte da C, e con una accelerazione costante negativa, rallenta progressivamente fino a fermarsi in A.

In questo modo la velocità  $v_C$  diventa velocità iniziale e posso applicare la formula

$$s_B = s_C + v_C \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

$$\Delta s = v_C \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

per calcolare l'accelerazione. Si ottiene

$$2\Delta s = 2v_c \Delta t + a(\Delta t)^2$$

$$a = \frac{2\Delta s - 2v_c \Delta t}{(\Delta t)^2} = \frac{2 \cdot 60 - 2 \cdot 15 \cdot 6}{6^2} = -\frac{60}{36} = -1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Per ottenere la velocità nel punto B posso applicare la formula

$$v_B = v_C + a\Delta t$$

cioè

$$v_B = 15 - 1,7 \cdot 6 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Infine, per calcolare la distanza AB, consideriamo l'auto nel punto iniziale  $s_B$ , con accelerazione negativa ( $a = -1,7$ ) che procede verso sinistra, fino ad arrivare in  $s_A$  con velocità  $v_A$  nulla.

$$v_B^2 = 2as_A$$

$$s_A = \frac{v_B^2}{2a} = \frac{5^2}{2 \cdot 1,7} \cong 7,35\text{m}$$

### Esercizio 3

Un oggetto viene lanciato verticalmente verso il basso dal terrazzo di un palazzo alto 60m, con una velocità iniziale di 20 m/s, e successivamente un altro oggetto identico viene lasciato cadere liberamente con velocità iniziale nulla.

In entrambi i casi, con quale velocità urta il suolo, e dopo quanto tempo ?

### Soluzione

Per calcolare la velocità con cui tocca il suolo utilizziamo la formula

$$(\Delta v)^2 = 2a(s - s_0)$$

che nel primo caso (oggetto con velocità iniziale non nulla) diviene

$$(v - v_0)^2 = 2a(s - 0)$$

in quanto poniamo  $s_0 = 0$  e, sostituendo, si ha

$$(v - 20)^2 = 2 \cdot 10 \cdot 60$$

$$v^2 - 40v + 400 - 1200 = 0$$

$$v^2 - 40v - 800 = 0$$

$$v = 20 \pm \sqrt{400 + 800} \cong 20 \pm 35 = \begin{cases} 55 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ -15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

La soluzione negativa è priva di significato fisico. Quindi il corpo toccherà il suolo con una velocità di

$$v = 55 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 55 \cdot 3,6 = 198 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Nel secondo caso, lasciando cadere il corpo da fermo, si ha invece

$$v^2 = 2as$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 60} = \sqrt{1200} \cong 35 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 35 \cdot 3,6 = 126 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Per inciso, quando si viaggia su un'auto alla velocità di 120 km/h e purtroppo avviene un incidente, è come se cadessimo da un palazzo alto circa 60 metri (cioè un palazzo di circa 17 piani) !!

Rispondiamo ora all'altra domanda: dopo quanto tempo il corpo tocca il suolo dal momento in cui viene lasciato?

Utilizziamo la formula

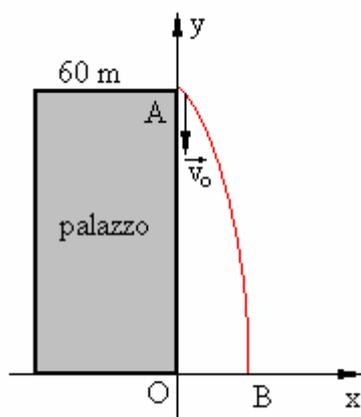
$$s = s_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

Stabiliamo di fissare un riferimento cartesiano come in figura, con l'origine in O.

Non occorre utilizzare entrambe le coordinate x e y, ma è sufficiente indicare l'ordinata, cioè la quota, con la lettera s.

$$\text{Poniamo quindi } s_0 = 60 \quad v_0 = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad a \cong -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Si tenga presente che la velocità iniziale e l'accelerazione di gravità (che per semplicità abbiamo posto uguale a 10) sono dirette verso il basso, cioè in direzione contraria rispetto all'asse y, e quindi sono negative.



Sostituendo si ottiene

$$s = 60 - 20\Delta t + \frac{1}{2}(-10)(\Delta t)^2$$

Vogliamo ora stabilire per quale intervallo di tempo  $\Delta t$  necessario perché l'ordinata s diventi nulla (cioè quando il corpo raggiunge il punto B). Si ha

$$0 = 60 - 20\Delta t - 5(\Delta t)^2$$

$$(\Delta t)^2 + 4 \cdot \Delta t - 12 = 0$$

$$\Delta t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{5} = \frac{1 \pm 4}{5} \cong \begin{cases} 1 \text{ s} \\ -3 \text{ s} \end{cases}$$

La soluzione negativa va scartata perché priva di significato fisico. Ora passiamo al caso in cui il corpo venga lasciato cadere partendo da fermo.

Nella formula

$$s = s_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

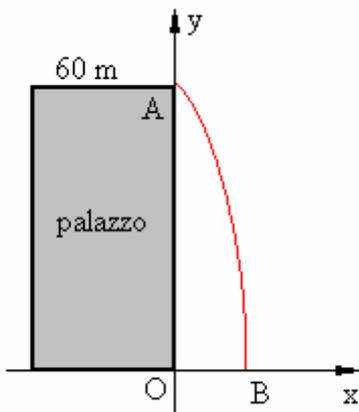
poniamo ora  $s_0 = 60 \text{ m}$  e  $v_0 = 0$

Si ottiene

$$s = 60 + \Delta t + \frac{1}{2}(-10)(\Delta t)^2$$

Si tenga presente che l'accelerazione di gravità (che per semplicità abbiamo posto uguale a 10) è diretta verso il basso, cioè in direzione contraria rispetto all'asse y, e quindi è negativa.

Vogliamo ora stabilire per quale intervallo di tempo  $\Delta t$  necessario perché l'ordinata s diventi nulla (cioè quando il corpo raggiunge il punto B). Si ha



$$0 = 60 + \Delta t - 5(\Delta t)^2$$

$$(\Delta t)^2 - \Delta t - 60 = 0$$

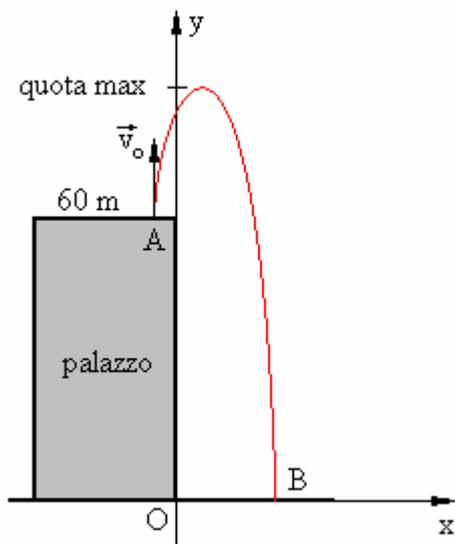
$$\Delta t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 240}}{2} \cong \frac{1 \pm 15,5}{5} \cong \begin{cases} 3,3 \text{ s} \\ -2,9 \text{ s} \end{cases}$$

Anche qui la soluzione negativa va scartata.

## Esercizio 4

Nel caso dell'esercizio precedente, se il corpo viene lanciato verso l'alto dalla terrazza del palazzo con velocità iniziale di 20 m/s, qual è la quota massima che raggiunge, dopo quanto tempo la raggiunge, e dopo quanto tempo (dal lancio) il corpo tocca il suolo ?

## Soluzione



Cominciamo a vedere qual'è la quota massima raggiunta. Nella formula

$$v = v_0 + a\Delta t$$

poniamo  $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$   $a \cong -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$v = 20 - \frac{1}{2}10 \cdot \Delta t$$

nel punto di quota massima la velocità è per un istante nulla (e poi si inverte dirigendosi verso il basso). Quindi poniamo  $v = 0$

$$0 = 20 - \frac{1}{2}10 \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{20}{5} = 4 \text{ s}$$

Dopo 4 secondi dal lancio il corpo raggiunge la quota

massima, ma qual è questa quota ?

Capovolgendo la situazione, il moto equivale a quello di un corpo che partendo da fermo nel punto di quota massima, in caduta libera per h metri, raggiunge il punto A con velocità di 20 m/s.

Si ha

$$v^2 = 2gh$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{400}{2 \cdot 10} = 20 \text{ m}$$

Aggiungendo a questa lunghezza l'altezza del palazzo, si ottiene la quota massima di

$$s = 60 + 20 = 80 \text{ m}$$

Infine, per calcolare dopo quanto tempo (dal lancio) il corpo tocca il suolo, nella formula

$$s = s_0 + v_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

poniamo  $s_0 = 60$   $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$   $a \cong -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  e otteniamo

$$s = 60 + 20 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}(-10)(\Delta t)^2$$

$$60 + 20 \cdot \Delta t - 5(\Delta t)^2 = 0$$

$$(\Delta t)^2 - 4 \cdot \Delta t - 12 = 0$$

$$\Delta t = 2 \pm \sqrt{4 + 12} = 2 \pm 4 = \begin{cases} 6 \text{ s} \\ -2 \text{ s} \end{cases}$$

Scartando al solito la soluzione negativa, la traiettoria completa del corpo dal lancio all'istante in cui tocca terra, dura 6 secondi.

### Esercizio 5

Una stazione spaziale ha la forma di un anello rotante con il diametro di 100 m. L'accelerazione centrifuga prodotta dalla rotazione è uguale a quella esistente sulla superficie della luna (cioè un sesto della gravità terrestre).

Calcolare la velocità angolare della piattaforma ed il suo periodo di rotazione.

### Soluzione

Dalla formula  $a = \omega^2 r$  ottengo  $\omega = \sqrt{\frac{a}{r}}$  e, sostituendo,

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{g}{6}}{100}} = \sqrt{\frac{1,6}{100}} = 0,126 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Dalla formula  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  si ottiene il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{0,126} \cong 50 \text{ sec}$$

Quindi la piattaforma compie un giro completo in poco meno di un minuto.

Anche se non richiesto, calcoliamo la velocità tangenziale

$$v = \omega r = 0,126 \cdot 100 = 12,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 12,6 \cdot 3,6 \cong 45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

### Esercizio 6

Un ragazzo fa ruotare orizzontalmente un sasso legato ad una corda lunga 1,5 m, ad un'altezza di 2 m.

Ad un certo istante il ragazzo lascia andare la corda ed il sasso schizza via lungo la tangente, e tocca il suolo in un punto distante 10 m.

Qual'era il valore dell'accelerazione centripeta durante il moto circolare ?

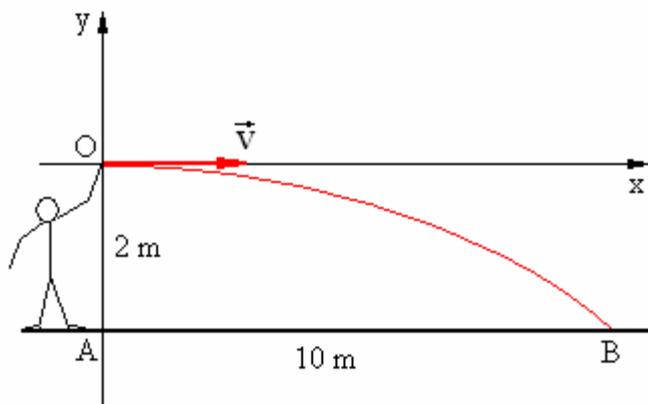
## Soluzione

Indichiamo con  $\vec{v}$  la velocità tangenziale posseduta dal sasso non appena la corda viene lasciata. Dalla formula (2-15) della teoria sappiamo che la traiettoria (parabolica) del sasso è del tipo

$$y = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x$$

in cui le componenti di  $\vec{v}$  sono  $v_{0x} = v$  e  $v_{0y} = 0$ .

Quindi la traiettoria è data in questo caso dalla formula



$$y = -\frac{g}{2v^2}x^2$$

Le coordinate del punto B sono (10;-2) e quindi avremo

$$-2 = -\frac{g}{2v^2}15^2$$

Risolvendo, otteniamo la velocità  $v$

$$v^2 = \frac{10 \cdot 225}{4} = 562$$

$$v = \sqrt{562} \cong 23,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

L'accelerazione centripeta raggiunta durante il moto circolare è dunque

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{562}{1,5} \cong 375 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Infine, anche se non richiesto dal problema, conoscendo la velocità tangenziale al momento del rilascio della corda, possiamo risalire al calcolo del periodo del moto circolare.

$$v = \frac{2\pi}{T}r \rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$T = \frac{6,28 \cdot 1,5}{23,7} \cong 0,4 \text{ s}$$

da cui si ottiene la frequenza

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \frac{\text{giri}}{\text{sec}}$$

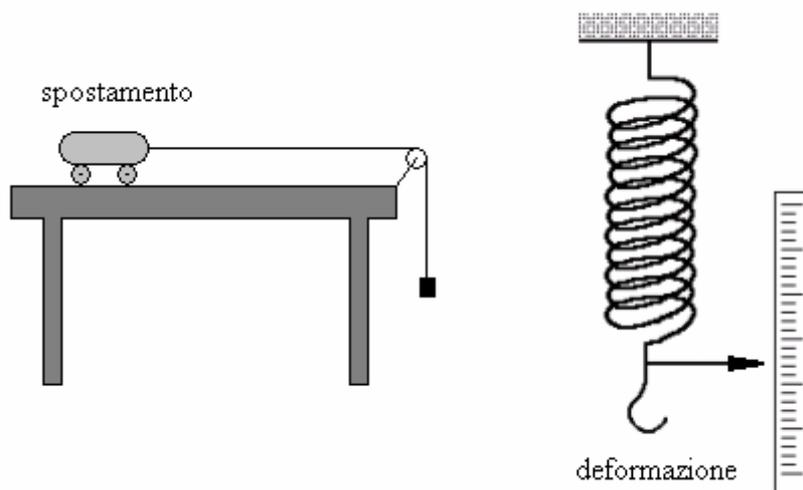
## CAP. 3 – DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

### 3-1. La forza

Occupiamoci ora delle cause che generano il moto, limitandoci sempre per ora, al moto di un semplice punto materiale. Estenderemo in seguito il discorso ai sistemi di punti.

I moti sono provocati dalle forze applicate ad un corpo: cominciamo allora a definire il concetto di **forza**.

**Si dice forza qualunque causa capace di produrre uno spostamento o una deformazione.**



Nella figura a sinistra la caduta di un oggetto pesante trasmette attraverso il filo una forza al carrello che provoca un suo spostamento. Nella figura a destra invece applicando al gancio inferiore un oggetto pesante, la forza produce una deformazione, un allungamento, che può anche essere misurato e fornire un valore della forza stessa.

Un dispositivo di questo genere, si chiama **dinamometro**.

Con il dinamometro è importante non usare pesi o forze troppo grandi perché la molla si può sfibrare, acquistare una deformazione permanente e non riprendere più la posizione iniziale quando torna in condizioni di riposo.

Le unità di misura per la forza sono il **Newton**, abbreviato con N nel sistema S.I. ( sistema internazionale) e la **dina** nel sistema cgs (centimetro, grammo, secondo).

Occorrono 100.000 dine per ottenere la forza di 1 Newton.

Le forze sono grandezze vettoriali.

Quando ad un corpo viene applicata **una forza costante**, questo si muove con **accelerazione costante**.

I moti che le forze producono sui corpi costituiscono una parte della fisica denominata **dinamica**, ed è imperniata su tre leggi fondamentali (elaborate da Newton nel 1600).

### 3-2. Prima legge (o legge d'inerzia)

**Se ad un corpo non viene applicata alcuna forza, o se ad esso vengono applicate forze con risultante nulla, esso tende a mantenere il proprio stato di moto.**

**Cioè se è fermo tende a rimanere fermo e se è in moto tende a continuare a muoversi con velocità costante.**

Può sembrare una affermazione ovvia, ma talvolta non lo è. Siamo abituati a vedere che un corpo in movimento tende a fermarsi se cessa la spinta che lo fa muovere, ma ciò è dovuto alla presenza dell'attrito (con il piano d'appoggio o con l'aria).

Se l'attrito è nullo il corpo in moto tenderà a continuare il suo moto con velocità costante, per sempre: si pensi alla terra che è in movimento da miliardi di anni e non accenna a rallentare.

Abbiamo talvolta una conoscenza intuitiva di questa legge quando per esempio scendiamo da un treno ancora in movimento: non possiamo scendere e fermarci all'istante perché cadremmo. Occorre invece fare qualche passo nella direzione di movimento del treno e rallentare gradatamente fino a fermarci.

Al contrario per salire su un treno già in moto occorre cominciare a correre nella direzione di marcia del treno fino ad assumere la sua stessa velocità, e soltanto allora è possibile fare il salto per salire sul treno senza cadere.

Viene anche detta legge d'inerzia perché questo termine mette in evidenza che il corpo tende a mantenere il proprio stato di moto o di quiete. E' come se fosse riluttante a variare la propria velocità.

Questa riluttanza è tanto più marcata ed evidente quanto più grande è il corpo (cioè, come vedremo nella seconda legge, quanto più grande è la sua massa).

### 3-3. Seconda legge (o legge fondamentale)

Quando applichiamo ad un corpo una forza costante, questo si muove con accelerazione costante.

Supponiamo di applicare una forza costante  $f_1$ : esso assumerà una accelerazione costante  $a_1$ .

Successivamente applichiamo allo stesso corpo una forza  $f_2$ : esso assumerà una accelerazione  $a_2$ .

Poi una forza  $f_3$ : esso assumerà una accelerazione  $a_3$ , e così via.

Ora calcoliamo i rapporti fra le forze applicate e le conseguenti accelerazioni.

Si ha

$f_1$	$a_1$	$F_1/a_1 = m$
$f_2$	$a_2$	$F_2/a_2 = m$
$f_3$	$a_3$	$F_3/a_3 = m$
...	...	...

Si potrà constatare che il rapporto  $f/m$  è costante. Questa costante è una caratteristica del corpo e si chiama **massa** del corpo.

Si noti che mentre la forza e l'accelerazione sono grandezze vettoriali, la massa è una grandezza scalare.

Se il corpo è molto grande la forza produrrà una piccola accelerazione, il valore di  $m$  sarà elevato, e quindi la massa rappresenta in qualche modo una misura della quantità di materia che forma il corpo.

La legge  $f/m = a$  può essere scritta sotto la forma vettoriale

$$(3-1) \quad \vec{f} = m\vec{a}$$

e rappresenta la seconda legge.

Si noti che forza e accelerazione sono vettori paralleli e concordi perché la massa è una grandezza scalare, ed è positiva: si passa dalla forza alla accelerazione o viceversa semplicemente dividendo o moltiplicando per  $m$ .

La seconda legge si può dunque enunciare dicendo che **ogni forza applicata ad un corpo (libero di muoversi) è proporzionale alla accelerazione che il corpo assume. La costante di proporzionalità prende il nome di massa del corpo.**

La tendenza (espressa con la prima legge) a mantenere invariato lo stato di quiete o di moto, è tanto maggiore quanto maggiore è la massa del corpo.

In altre parole l'inerzia di un corpo, cioè la difficoltà a variare la sua velocità, è tanto più evidente quanto più è grande la sua massa.

Quando l'accelerazione del corpo corrisponde all'accelerazione di gravità ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ) allora la forza corrisponde al peso del corpo

$$(3-2) \quad \vec{p} = m\vec{g}$$

Anche il peso si misura spesso in kilogrammi, ma non bisogna confondere fra loro i due concetti:

- Il peso è un vettore e la massa è uno scalare.
- Occorre moltiplicare o dividere per  $g$  per passare da uno all'altro.
- La massa è una caratteristica del corpo che rimane costante in ogni punto dell'universo. Il peso invece varia a seconda del posto in cui ci si trova (sulla Terra, sulla Luna, su un satellite in orbita, ecc). Infatti sulla Luna  $g$  è circa un terzo del valore che si ha sulla terra, mentre su un satellite in orbita  $g$  è addirittura nulla.

Quando poniamo un oggetto su una bilancia a bracci uguali per pesare un oggetto, confrontiamo la forza peso agente sull'oggetto con la forza peso agente sul peso campione posto nell'altro piatto. Stiamo quindi confrontando fra loro due pesi.

Ma poiché il valore di  $\vec{g}$  è lo stesso in entrambi i casi, a pesi uguali corrispondono masse uguali.

Anche nel linguaggio comune diciamo che l'oggetto "pesa" per esempio 1,3 Kg, anche se in realtà il Kg (e i suoi multipli e sottomultipli) sono unità di misura delle "masse".

Alla massa di un Kg corrisponde in realtà una forza gravitazionale (talvolta chiamata anche  $Kg_{\text{peso}}$ ) pari a

$$(3-3) \quad F = 1 \text{ Kg}_{\text{peso}} = 9,8 \text{ Newton}$$

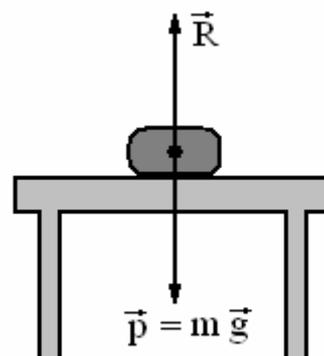
### 3-4. Terza legge (o legge d'azione e reazione)

Oltre alle forze cosiddette attive (denominate anche **azioni**), ne esistono altre dovute alla presenza di appoggi o di vincoli (che vengono denominate **reazioni**).

Per esempio se appoggio un oggetto su un tavolo, per quanto detto finora la gravità terrestre dovrebbe farlo cadere con accelerazione costante, ma sappiamo che invece esso sta fermo sul piano del tavolo. Perché ?

Su di esso non agisce soltanto la forza peso ( $\vec{p} = m\vec{g}$ ), ma c'è anche una forza esattamente uguale e contraria che la bilancia esattamente.

Questa forza  $\vec{R}$  (vedi figura) esercitata dal tavolo in direzione contraria al peso è una forza passiva, e bilancia esattamente il peso stesso.

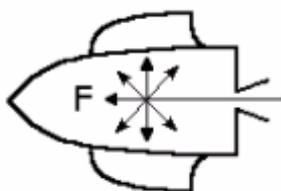


Ogni piano d'appoggio (detto anche **vincolo**) è in grado di esercitare una forza reazione sempre uguale e contraria alla forza attiva, ma fino ad un valore massimo (dipendente dalla solidità, dalla struttura del vincolo), superando il quale il vincolo si rompe.

La terza legge afferma dunque che, **se un sistema è isolato (cioè se su di esso non agiscono forze provenienti dall'esterno) allora le mutue azioni fra due corpi sono sempre uguali ed opposte, cioè ad ogni azione (cioè ad ogni forza attiva) corrisponde una reazione uguale e contraria.**

Il ragionamento vale anche per esempio per un dinamometro come quello indicato per definire la forza: alla parte inferiore viene applicata una forza attiva diretta verso il basso, ma la parte superiore è fissata ad un appoggio fisso ed esplica una reazione uguale e contraria che bilancia esattamente la forza attiva..

Il motore a reazione per esempio sfrutta il terzo principio. Un gas al suo interno si dilata sviluppando forze dirette in tutte le direzioni.



Esse si bilanciano tutte fra loro perché a ciascuna di esse ne corrisponde un'altra uguale e contraria.

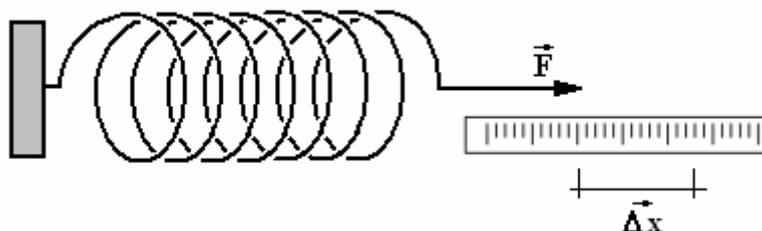
Solo una di esse (vedi figura) non è bilanciata perché quella contraria è libera di uscire dall'ugello posteriore del razzo.

Quindi la forza attiva F spinge il razzo in avanti. Il motore dovrebbe chiamarsi più esattamente di "azione e reazione".

### 3-5. Costante elastica di richiamo

Nel paragrafo 3.1 abbiamo accennato al dinamometro, ed alla sua possibilità di misurare una forza in seguito alla deformazione, l'allungamento della molla (o di un elastico).

Riprendiamo il concetto per precisare una proprietà molto importante: applicando una forza  $\vec{F}$  ad una molla, ed indicando con  $\vec{\Delta x}$  il suo allungamento (che è anch'esso un vettore), l'allungamento è proporzionale alla forza applicata.



Ciò vale comunque solo entro certi limiti perché stirando troppo la molla, questa assume deformazioni permanenti e cessata l'azione della forza, non ritorna più nella forma iniziale.

Quindi vale la formula

$$(3-4) \quad \vec{F} = -K \vec{\Delta x}$$

Il segno meno è dovuto al fatto che se applicando la forza (vedi figura) si ha uno spostamento verso destra, e quindi un vettore  $\vec{\Delta x}$  rivolto verso destra, ma cessata l'azione della forza la molla esplica una reazione uguale ma opposta ad  $\vec{F}$  che tende a riportare la molla nelle condizioni iniziali.

In altre parole la (3-4) vale dal momento in cui dopo aver stirato la molla, essa viene rilasciata libera. La costante K (sempre negativa) prende il nome di **costante elastica di richiamo**, ed è una costante caratteristica della molla.

Si noti che lo stesso discorso vale se la molla invece di essere stirata, viene compressa: anche in questo caso vale la (3-4). Lo spostamento  $\overline{\Delta x}$  e la forza  $\vec{F}$  che tende a riportare la molla nelle condizioni iniziali hanno sempre verso opposto.

### 3-6. La forza di attrito

Quando un corpo striscia o rotola su un altro corpo, si genera un attrito fra le due superfici a contatto, cioè una resistenza all'avanzamento del corpo.

Se per esempio immaginiamo di spostare un mobile da una parete all'altra di una stanza, si ha un **attrito radente** perché le due superfici a contatto si strusciano fra loro, se invece spostiamo una bicicletta, questa ha un **attrito volvente**, perché i copertoni delle ruote rotolano sul pavimento invece di strisciare.

Ci occuperemo soltanto dell'attrito radente: su quello volvente diciamo solo che diminuisce all'aumentare del raggio della ruota.

L'attrito radente è **proporzionale alla reazione** del piano di appoggio.

Cioè (vedi figura a fianco), è una forza  $\vec{A}$  proporzionale alla reazione  $\vec{R}$  con cui l'appoggio controbilancia il peso  $\vec{p}$  del corpo..

La reazione  $\vec{R}$  è sempre perpendicolare alla superficie di appoggio.

La costante di proporzionalità si chiama **coefficiente di attrito**, si indica con la lettera  $\mu$ , e non viene calcolata con metodi teorici, ma si ricava sperimentalmente.

Si può quindi scrivere

$$(3-5) \quad \vec{A} = \mu \vec{R}$$

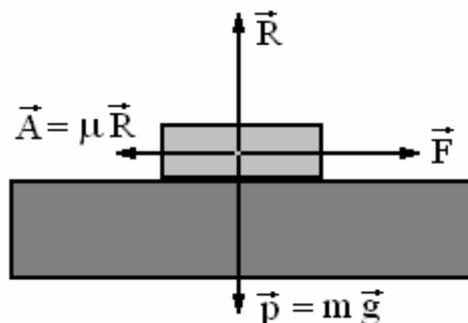
L'attrito è una forza passiva ( $\vec{A}$  non può mai superare  $\vec{F}$ ) avente la stessa direzione di  $\vec{F}$ , ma verso opposto.

Sull'attrito radente si può aggiungere una importante considerazione: quando si sposta un mobile, occorre fare uno sforzo notevole per cominciare a muoverlo, ma quando questo ha cominciato a muoversi è relativamente più facile continuare a spostarlo.

Questo effetto è reale e non è solo una impressione: esiste dunque una forza di attrito valevole per un corpo fermo che stiamo per spostare, con un **coefficiente di attrito statico**  $\mu_s$ , ed un **coefficiente di attrito dinamico**  $\mu_d$  valevole per il corpo già in movimento.

Come già accennato, i valori dei coefficienti di attrito si trovano sperimentalmente e sono elencati in apposite tabelle che possono essere consultate all'occorrenza.

Risulta comunque sempre  $\mu_s > \mu_d$ .



### 3-7. Il piano inclinato

Applichiamo le considerazioni del paragrafo precedente ad un corpo che scivola su un piano inclinato, senza attrito.

Sia  $\ell$  la lunghezza del piano inclinato, ed  $h$  la sua altezza.

Il peso  $\vec{p} = m\vec{g}$  può essere scomposto in due componenti (vedi figura), una  $\vec{p}_p$  parallela al piano inclinato, ed una  $\vec{p}_n$  normale al piano inclinato.

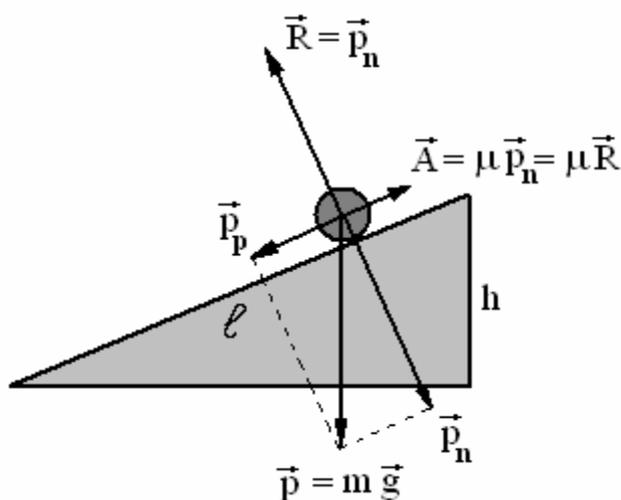
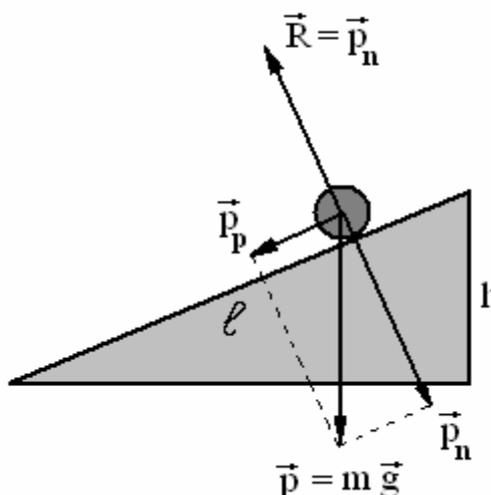
La componente  $\vec{p}_n$  viene esattamente controbilanciata dalla reazione  $R$ .

L'unica forza che provoca la discesa del corpo è la componente  $\vec{p}_p$ .

Per calcolarla basta impostare una proporzione fra lati corrispondenti di triangoli simili (abbandonando la notazione vettoriale perché in questo caso non è necessaria): il triangolo costituito dal piano inclinato ed il triangolo avente come lati  $p_p$  e  $p$ . Si ha

$$p_p : mg = h : \ell$$

$$p_p = \frac{mgh}{\ell}$$



Se però si considera anche la presenza dell'attrito, si ha la situazione indicata nella seconda figura qui a fianco.

La forza che provoca la discesa del corpo è in questo caso

$$\vec{F} = \vec{p}_p - \vec{A}$$

Cioè (trascurando la notazione vettoriale)

$$F = \frac{mgh}{\ell} - \mu R = \frac{mgh}{\ell} - \mu p_n$$

ma, ricavando anche  $p_n$  con una proporzione, abbiamo

$$p_n : mg = \sqrt{\ell^2 - h^2} : \ell$$

$$p_n = \frac{mg\sqrt{\ell^2 - h^2}}{\ell}$$

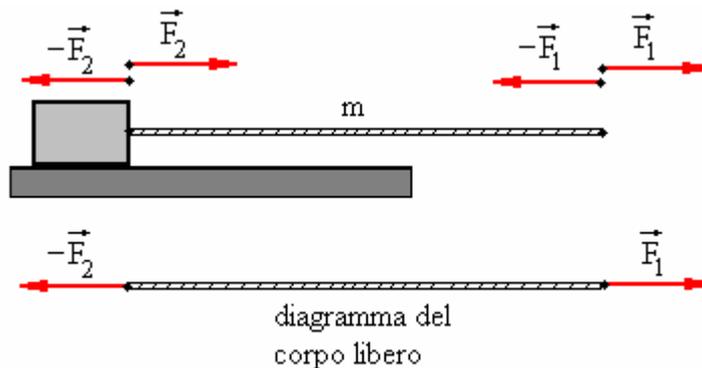
E, sostituendo, si ottiene infine

$$F = \frac{mgh}{\ell} - \mu \frac{mg\sqrt{\ell^2 - h^2}}{\ell} = \frac{mg}{\ell} (h - \mu\sqrt{\ell^2 - h^2})$$

che è la forza che provoca il moto.

### 3-8. Reazioni e tensioni

Consideriamo un corpo poggiato su un piano orizzontale, tirato da una corda (di massa  $m$ ) come nella figura qui sotto.



Applicando una forza  $\vec{F}_1$  sull'estremo a destra, la corda esercita una reazione uguale e contraria  $-\vec{F}_1$ . Questa a sua volta esercita sul blocco una forza  $\vec{F}_2 = -(-\vec{F}_1) = \vec{F}_1$ , ed il blocco a sua volta esercita una reazione  $-\vec{F}_2$  (per la presenza dell'attrito) uguale ed opposta ad  $\vec{F}_2$ .

Si usa spesso semplificare la visualizzazione delle forze agenti ricorrendo al **diagramma del corpo libero**, cioè alla rappresentazione del solo corpo in studio al quale sono applicate tutte le forze agenti sul corpo stesso, ed eventualmente il sistema di riferimento.

Nel nostro caso tutte le forze sono uguali fra loro come lunghezza, e possiamo immaginare che al corpo libero siano applicate solo le forze  $\vec{F}_1$  e  $-\vec{F}_2$  uguali ed opposte.

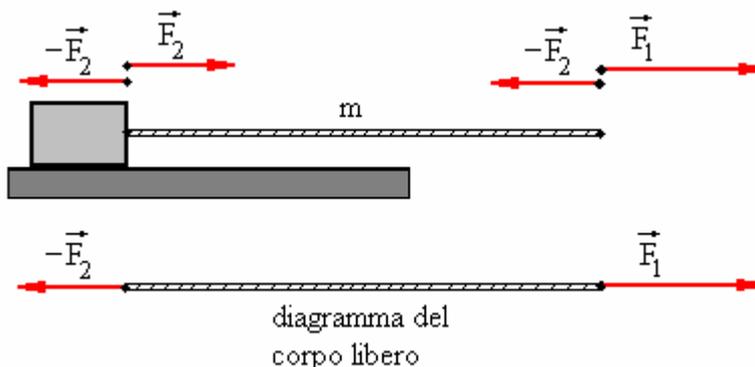
Come risultato il sistema rimane fermo, in equilibrio statico.

Ogni segmento di corda è sottoposto ad una coppia di forze (uguali ed opposte) denominate anche con il termine di **tensione**.

Se la corda (come in questo caso) è in equilibrio, tutti i suoi punti sono sottoposti alla stessa tensione.

La tensione lungo tutti i punti della corda è costante anche se, pur non essendo la corda in equilibrio e il sistema soggetto a spostamento, è trascurabile la massa della corda stessa.

Cosa avviene invece se la forza applicata  $\vec{F}_1$  è superiore alla reazione massima  $-\vec{F}_2$  che l'attrito è in grado di produrre ?



Ogni segmento di corda è ancora sottoposto ad una coppia di forze uguali ed opposte, ma l'estremo destro produce una reazione pari a  $-\vec{F}_2$ .

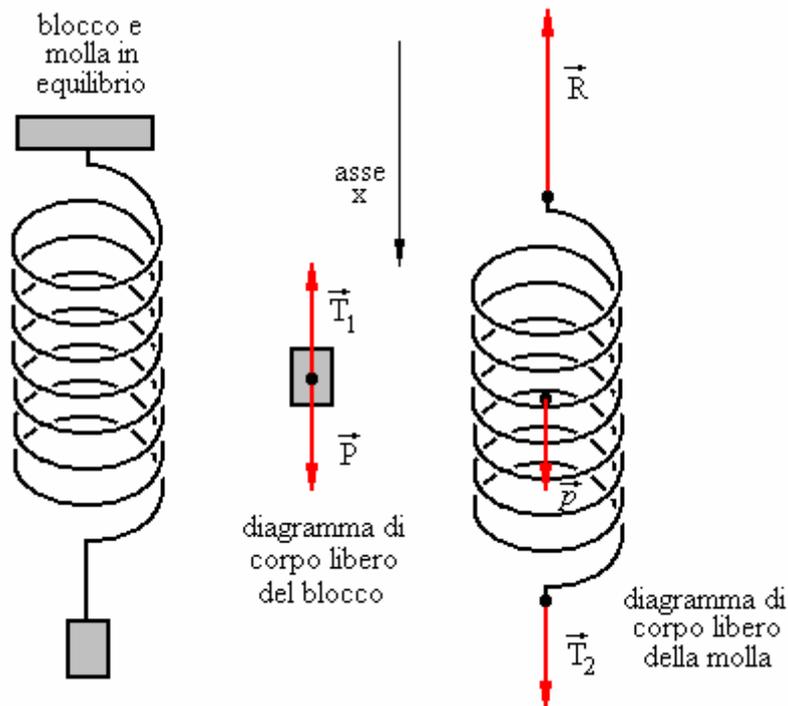
Dal diagramma del corpo libero risulta che il sistema è sottoposto ad una forza risultante rivolta verso destra

$$\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$$

e quindi si muoverà con una accelerazione

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Ora analizziamo un caso diverso: un blocco appeso ad una molla, che a sua volta è fissata al soffitto. La molla si distende fino a quando la reazione non compensa esattamente il peso del blocco.



$\vec{P}$  è il peso del blocco,  $\vec{T}_1$  è la tensione che l'estremità inferiore della molla esplica sul blocco.  $\vec{T}_2$  è la tensione che il blocco esercita sulla molla,  $\vec{p}$  è il peso della molla, ed  $\vec{R}$  è la reazione vincolare esplicata dal soffitto.

Dal diagramma del corpo libero relativo al blocco, poiché le due forze agenti su di esso sono uguali ed opposte, si ricava

$$\vec{P} - \vec{T}_1 = m\vec{a} = 0$$

E dal diagramma del corpo libero relativo alla molla si ricava invece

$$\vec{T}_2 + \vec{p} - \vec{R} = m\vec{a} = 0$$

cioè

$$\vec{T}_2 + \vec{p} = \vec{R}$$

### 3-9. Forza centripeta e centrifuga

Quando un corpo è vincolato a ruotare lungo una circonferenza, abbiamo visto (paragrafo 2-6) che su di esso agisce una accelerazione diretta verso il centro denominata accelerazione centripeta. Questa accelerazione, moltiplicata per la massa del corpo fornisce una forza denominata **forza centripeta**.

Trascurando la notazione vettoriale essa risulta essere

$$(3-6) \quad F = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

cioè

$$(3-7) \quad F = \frac{m}{r} \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{4\pi^2 m r}{T^2}$$

Talvolta però essa viene denominata **forza centrifuga**: si tratta della stessa forza precedente, a seconda dal punto di vista dal quale viene considerata.

Infatti per costringere un corpo a descrivere una traiettoria circolare, per esempio un sasso legato ad una corda, dobbiamo applicare ad esso una forza centripeta, diretta verso il centro.

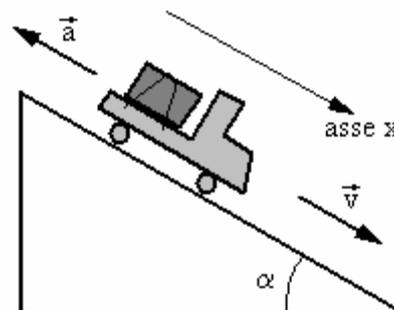
Ma, per esempio, un insetto che si trova sul sasso avvertirà una forza uguale e contraria alla precedente, diretta verso l'esterno.

Talvolta questa forza viene denominata **forza apparente** perché in realtà non è esercitata da una causa visibile: è semplicemente una conseguenza del fatto che il vincolo (la corda) costringe continuamente il sasso a modificare la propria condizione di moto uniforme.

## ESERCIZI DI DINAMICA DEL PUNTO

### Esercizio 7

Un carico di 500 Kg è fissato con una corda su un camion, che procede ad una velocità di 90 Km/h lungo una discesa. Il conducente rallenta (con accelerazione costante) fino a raggiungere un velocità di 60 Km/h in 20 secondi. Quale forza agisce sul carico ?



### Soluzione

Assumiamo come positiva la direzione indicata come “asse x” nella figura.

In questo modo, senza mettere in gioco la natura vettoriale della velocità e dell’accelerazione, possiamo indicare come positiva la direzione della velocità, e negativa la direzione dell’accelerazione. Il carico ha una **massa** di 500 Kg, e la velocità iniziale (che chiameremo  $v_0$ ) è

$$v_0 = \frac{90}{3,6} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocità dopo il rallentamento è

$$v = \frac{60}{3,6} \cong 17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

L’accelerazione (negativa, e quindi una decelerazione) è

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{17 - 25}{20} \cong -0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dunque la forza agente sul carico (e anche sul camion) è

$$F = ma = -500 \cdot 0,4 = -200 \text{ N}$$

La forza ha la stessa direzione dell’accelerazione ed è quindi negativa.

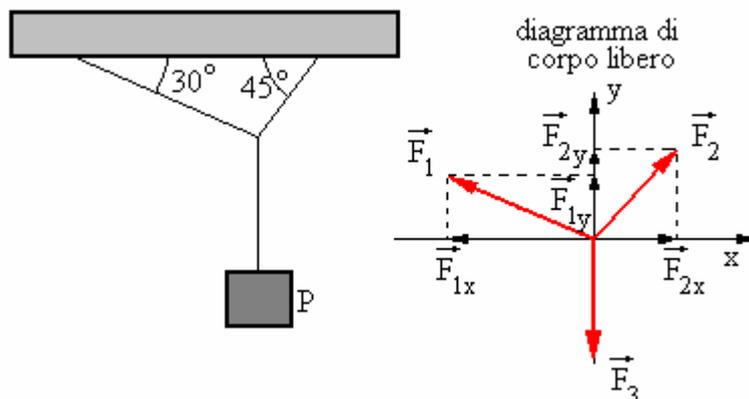
Facciamo una importante precisazione: che succede se durante la frenata ad un certo istante si rompe la corda che tiene immobilizzato il carico ?

Questo sarebbe spinto verso la cabina di guida, a destra, e non a sinistra come sembrerebbe dal segno negativo della forza.

Infatti **per inerzia** il carico tenderebbe a proseguire con velocità costante, ed è proprio la corda che trattiene il carico stesso imprimendogli una forza verso sinistra.

## Esercizio 8

Si abbia un corpo sospeso al soffitto per mezzo di due corde, come in figura.



E' possibile, conoscendo una delle tre forze (e gli angoli indicati), ricavare le altre due forze ?

## Soluzione

Calcoliamo le componenti di ciascuna forza tralasciando la notazione vettoriale

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 30^\circ = F_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 30^\circ = F_1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 45^\circ = F_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin 45^\circ = F_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Osservando il diagramma del corpo libero si ottiene, lungo l'asse x e lungo l'asse y,

$$F_{2x} - F_{1x} = F_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad F_2 \cdot \sqrt{2} = F_1 \cdot \sqrt{3}$$

$$F_{1y} + F_{2y} - F_3 = F_1 \cdot \frac{1}{2} + F_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_3 = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 + F_2 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot F_3$$

Queste due relazioni, messe a sistema, permettono di risolvere il problema.

Per esempio, se  $F_3 = 10$  N, avremo

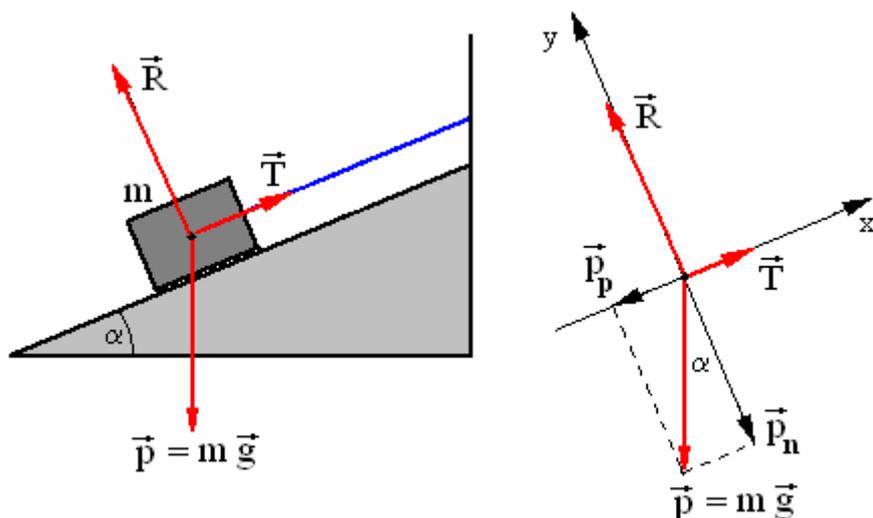
$$\begin{cases} F_2 \cdot \sqrt{2} = F_1 \cdot \sqrt{3} \\ F_1 + F_2 \cdot \sqrt{2} = 20 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} F_2 = 1,23 \cdot 7,33 \\ F_1 = 7,33 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} F_2 \cong 9 \text{ N} \\ F_1 = 7,33 \text{ N} \end{cases}$$

## Esercizio 9

Un blocco di massa  $m$  si trova su un piano inclinato con un angolo  $\alpha$ . L'attrito è nullo, ed il blocco è trattenuto da una corda. Determinare la tensione  $T$  della corda e la reazione  $R$  del piano inclinato.



## Soluzione

Il blocco è fermo, l'accelerazione è nulla, e quindi si ha vettorialmente

$$(3-8) \quad \vec{T} + \vec{R} + m\vec{g} = 0$$

Calcoliamo le componenti  $p_n$  e  $p_p$  del peso rispettivamente normale e parallela al piano inclinato, tralasciando la notazione vettoriale ed osservando a destra il diagramma del corpo libero.

$$\begin{cases} p_p = mg \cdot \sin\alpha \\ p_n = mg \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Quindi, scomponendo la (3-8) lungo gli assi, si ha

$$(3-9) \quad \begin{aligned} \text{asse } x &\rightarrow T - p_p = T - mg \cdot \sin\alpha = 0 \\ \text{asse } y &\rightarrow R - p_n = R - mg \cdot \cos\alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} T = mg \cdot \sin\alpha \\ R = mg \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Si noti che se

$$\alpha = 0^\circ \rightarrow \begin{cases} T = 0 \\ R = mg \end{cases}$$

$$\alpha = 90^\circ \rightarrow \begin{cases} T = mg \\ R = 0 \end{cases}$$

in perfetto accordo con quanto ci si aspetterebbe in questi due casi limite.

Ma che succede se ad un certo istante tagliamo il filo che trattiene il blocco ? Questo comincerà a scendere con accelerazione costante. Quanto vale questa accelerazione ?

La (3-9) in questo caso va modificata nel modo seguente

$$\begin{aligned} \text{asse } x &\rightarrow -p_p = ma_x \\ \text{asse } y &\rightarrow R - p_n = ma_y \end{aligned}$$

Infatti lungo l'asse  $x$  non c'è più la tensione  $T$ , e lungo entrambi gli assi sarà presente invece una accelerazione per il momento incognita.

Semplificando si ottiene

$$\begin{cases} p_p = ma_x \\ a_y = 0 \quad (\text{perché } p_n = R) \end{cases}$$

Quindi il blocco sarà sottoposto ad una accelerazione avente la direzione dell'asse x (parallela al piano inclinato)

$$a_x = \frac{p_n}{m} = -\frac{mg \cdot \text{sen}\alpha}{m} = -g \cdot \text{sen}\alpha$$

e, a causa del segno meno, verso opposto all'asse x.

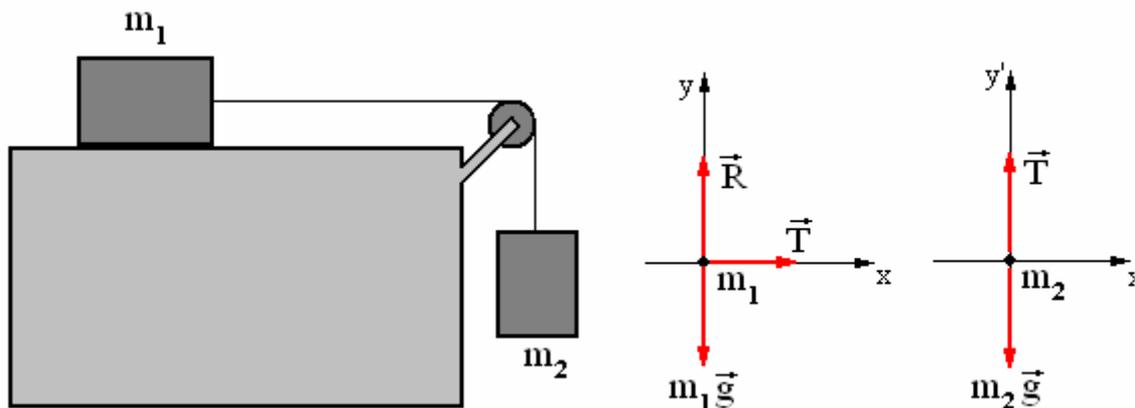
Se al corpo applichiamo, durante la discesa, una forza

$$F_x = mg \cdot \text{sen}\alpha$$

questa bilancerà esattamente la forza che lo spinge verso il basso, ed il blocco seguirà a scendere ma **con velocità costante**.

## Esercizio 10

Un blocco di massa  $m_1$  poggia senza attrito su un piano orizzontale. Per mezzo di una fune (con massa trascurabile) e di una carrucola (senza attrito), un secondo blocco  $m_2$  trascina il precedente. Calcolare la tensione della corda e l'accelerazione del sistema.



## Soluzione

Il sistema è in movimento ma, essendo trascurabile la massa della corda, la tensione rimane invariata per tutti i suoi punti. La presenza della carrucola ha il solo effetto di cambiare la direzione della tensione.

Il diagramma del corpo libero riferito al blocco  $m_1$  fornisce per i due assi cartesiani

$$(3-10) \quad \begin{cases} T = m_1 \cdot a_{1x} \\ R - m_1 g = 0 \end{cases}$$

in quanto il blocco avrà una accelerazione soltanto lungo l'asse x.

Il diagramma del corpo libero riferito al blocco  $m_2$  fornisce invece

$$(3-11) \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ T - m_2 g = -m_2 \cdot a_{2y} \end{cases}$$

Per la presenza della puleggia si ha  $a_{1x} = a_{2y}$  e quindi possiamo indicare l'accelerazione del sistema semplicemente con a.

Dalle prima delle (3-10) e dalla seconda delle (3-11), si ha quindi

$$m_1 \cdot a - m_2 g = -m_2 \cdot a$$

cioè

$$(m_1 + m_2) \cdot a = m_2 g$$

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

Dunque l'accelerazione del sistema è sempre minore dell'accelerazione di gravità. Sostituendo questo risultato nella prima delle (3-10) si ottiene infine

$$T = m_1 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$T = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} g$$

Si noti che la tensione può anche essere scritta sotto le forme

$$T = m_1 \cdot g \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

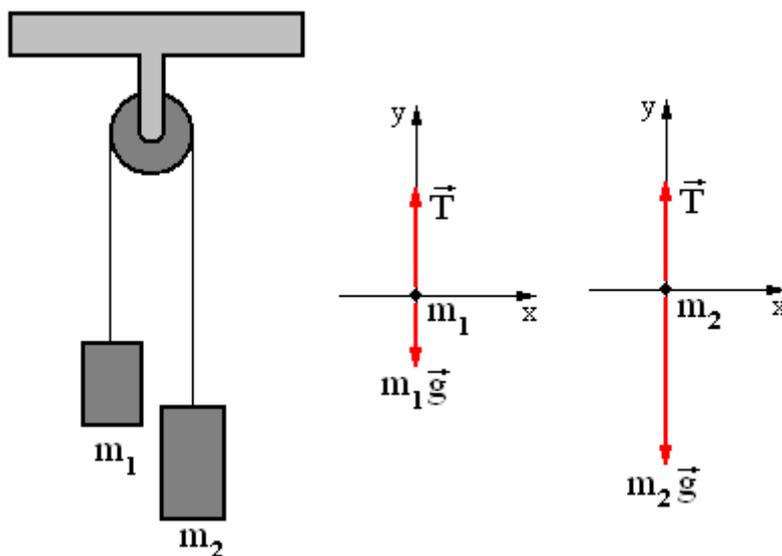
$$T = m_2 \cdot g \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Quindi la tensione  $T$  è uguale al peso del blocco  $m_1$  o al peso del blocco  $m_2$  moltiplicato per una frazione sicuramente minore dell'unità. Cioè la tensione  $T$  è sempre minore del peso di ciascuno dei due blocchi.

## Esercizio 11

Due masse  $m_1$  e  $m_2$  sono legate fra loro da una corda (con massa trascurabile) e sospese al soffitto ad una carrucola (che può ruotare senza attrito).

Determinare la tensione  $T$  della fune e l'accelerazione con cui si muove il sistema.



## Soluzione

Dal diagramma del corpo libero riferito al blocco  $m_1$  si ottiene (trascurando l'asse x perché in tale direzione non ci sono forze o accelerazioni)

$$T - m_1 g = m_1 \cdot a$$

mentre, per il blocco  $m_2$  abbiamo

$$T - m_2 g = -m_2 \cdot a$$

Eliminando la T fra le due relazioni, si ha

$$\begin{cases} T = m_1 \cdot a + m_1 g \\ T = -m_2 \cdot a + m_2 g \end{cases}$$

$$m_1 \cdot a + m_1 g = -m_2 \cdot a + m_2 g$$

$$a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1)$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

Eliminando invece la a fra le due relazioni, si ottiene

$$\begin{cases} a = \frac{T - m_1 g}{m_1} \\ a = \frac{m_2 g - T}{m_2} \end{cases}$$

$$\frac{T - m_1 g}{m_1} = \frac{m_2 g - T}{m_2}$$

$$T m_2 - m_1 m_2 g = m_1 m_2 g - T m_1$$

$$T(m_1 + m_2) = 2m_1 m_2 g$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Se le due masse sono uguali l'accelerazione si annulla ed il sistema è in equilibrio con velocità costante (rimane fermo se tale velocità era nulla, o si muove con velocità costante).

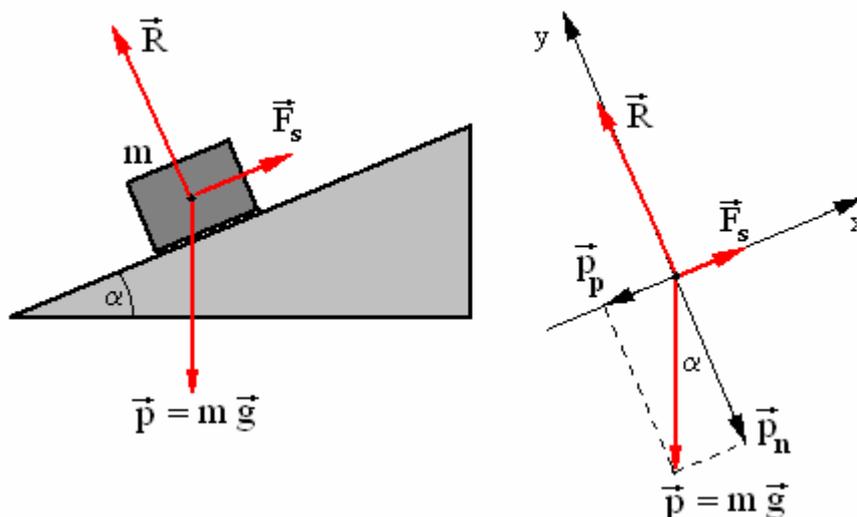
Se invece la massa  $m_1$  è nulla, allora l'accelerazione coincide con g (corpo in caduta libera).

## Esercizio 12

Si abbia di nuovo un blocco di massa  $m$  poggiato su di un piano orizzontale. Solleviamo lentamente il piano aumentando gradatamente l'angolo  $\alpha$ .

A causa dell'attrito, il blocco resterà fermo perché trattenuto da una forza  $\vec{F}$  come mostrato in figura. Ad un certo punto si raggiungerà un opportuno angolo  $\alpha$  in cui il blocco comincerà a muoversi e la forza assumerà un valore  $\vec{F}_s$ .

Qual è il coefficiente di attrito fra il blocco ed il piano inclinato ?



## Soluzione

Il diagramma di corpo libero fornisce (nell'istante immediatamente precedente all'inizio del moto di discesa del corpo)

$$\text{asse } x \rightarrow F_s - p_p = F_s - mg \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\text{asse } y \rightarrow R - p_n = R - mg \cdot \cos \alpha = 0$$

Dalla (3-5) sappiamo che la forza di attrito è proporzionale alla reazione  $R$ , e la costante di proporzionalità è proprio il coefficiente di attrito  $\mu$ . Quindi è  $F_s = \mu R$ .

Sostituendo abbiamo

$$\mu \cdot R = mg \cdot \sin \alpha$$

$$R = mg \cdot \cos \alpha$$

e, dividendo membro a membro,

$$\mu = \tan \alpha$$

Questo risultato è molto importante.

Intanto **l'attrito non dipende dal peso del blocco, ma soltanto dalla natura delle due superfici a contatto.**

Inoltre **l'attrito non dipende neanche dall'estensione della superficie di contatto.**

A questo riguardo viene spesso menzionato l'esempio del mattone:

Eseguendo l'esperimento con un mattone poggiandolo ogni volta su una delle tre superfici differenti da cui è formato, si può constatare che l'angolo  $\alpha$  è sempre lo stesso.

Quindi  $\mu$  dipende soltanto dal tipo di materiali a contatto fra loro.

Per esempio alla coppia legno-cemento corrisponderà un certo valore di  $\mu$ . Alla coppia legno-legno un altro valore di  $\mu$ . E così via.

Occorre precisare che la forza di attrito non andrebbe applicata al baricentro del corpo come è indicato nella figura, ma nel baricentro della superficie di contatto fra i due materiali.

Nella teoria abbiamo anche accennato al fatto che occorre distinguere fra attrito statico ed attrito dinamico.

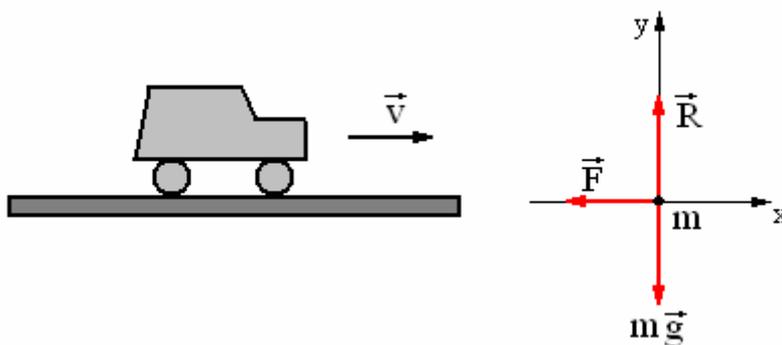
Infatti non appena il blocco comincerà a muoversi, il suo moto sarà uniformemente accelerato.

Occorre diminuire leggermente l'angolo  $\alpha$  perché esso continui a muoversi con velocità costante.

### Esercizio 13

Un'auto procede su una strada in piano, con velocità costante  $v = 100 \text{ Km/h}$ . Ad un certo istante il conducente frena.

Conoscendo il coefficiente di attrito statico  $\mu = 0,6$  qual è la distanza minima entro cui la macchina può essere fermata ?



### Soluzione

Poiché l'auto procede con velocità costante e quindi con accelerazione nulla, la risultante delle forze ad essa applicate è nulla.

Dunque la forza peso  $\vec{F} = m\vec{g}$  sarà bilanciata dalla reazione  $\vec{R}$ , e la forza di attrito  $\vec{A}$  diretta verso sinistra sarà bilanciata da una forza uguale e contraria data dalla spinta del motore (queste ultime due forze non sono rappresentate qui sopra nel diagramma di corpo libero).

Iniziando a frenare la spinta del motore viene annullata dal conducente, e viene applicata una forza frenante  $\vec{F}$  come mostrato nella figura.

Questa forza frenante non deve superare la forza di attrito statico  $\vec{A}$  perché altrimenti l'attrito diventa dinamico con un valore di  $\mu$  inferiore a quello statico, ed i pneumatici cominciano a slittare perdendo aderenza con il terreno.

Dunque deve essere al massimo

$$\vec{F} = \mu \cdot \vec{R} = \mu \cdot m\vec{g}$$

cioè l'accelerazione deve al massimo avere il valore di

$$m\vec{a} = \mu \cdot m\vec{g}$$

$$a = \mu \cdot g$$

Dalla cinematica sappiamo che

$$(\Delta v)^2 = 2a(s - s_0)$$

e nel nostro caso, indicando con  $v$  la variazione di velocità  $\Delta v$  e con  $x$  lo spazio di frenata  $(s - s_0)$ ,

$$v^2 = 2ax$$

$$x = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2\mu g}$$

Si noti nell'ultima formula il coefficiente d'attrito  $\mu$  al denominatore: se il suo valore diminuisce (come quando si passa dal regime di attrito statico a quello dinamico), allora lo spazio di frenata  $x$  aumenta.

Si noti anche che il peso della vettura non compare nella formula.

Facendo i calcoli si ottiene

$$v = 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = \frac{100}{3,6} \cong 28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

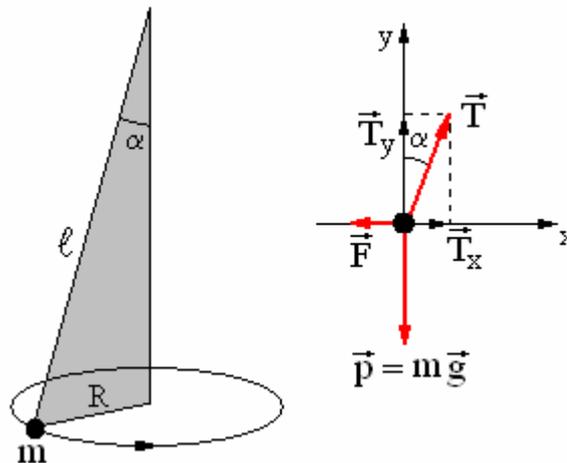
$$x = \frac{28^2}{2 \cdot 0,6 \cdot 10} = \frac{784}{12} \cong 65 \text{ m}$$

## Esercizio 14

Una sferetta di massa  $m$  è sospesa per mezzo di un filo (inestensibile, flessibile e di massa trascurabile) al soffitto.

Imprimendogli un moto rotatorio la massa oscilla ed il filo al quale è sospesa descrive un cono. Questo dispositivo viene anche denominato **pendolo conico**.

Calcolare il periodo del pendolo (indicandolo con  $\tau$  per distinguerlo dalla tensione  $T$  del filo).



## Soluzione

Dal diagramma di corpo libero si vede che le forze agenti sul pendolo sono il peso  $\vec{p}$ , la tensione del filo  $\vec{T}$ , e la forza centrifuga  $\vec{F}$ .

La tensione può essere scomposta in due componenti: una  $\vec{T}_y$  che bilancia esattamente il peso  $\vec{p}$ , ed una  $\vec{T}_x$  che bilancia la forza centrifuga  $\vec{F}$ .

Dalla (3-6) sappiamo che la forza centrifuga è data dalla formula

$$F = m \frac{v^2}{R}$$

Lungo l'asse  $x$  possiamo scrivere

$$(3-12) \quad T \cdot \sin \alpha = \frac{mv^2}{R}$$

e lungo l'asse y,

$$(3-13) \quad T \cdot \cos \alpha = mg$$

Dividendo membro a membro le (3-12) e (3-13) si ha

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{Rg}$$

$$v^2 = Rg \cdot \tan \alpha$$

$$v = \sqrt{Rg \cdot \tan \alpha}$$

Ma è anche  $v = \frac{2\pi R}{\tau} \rightarrow \tau = \frac{2\pi R}{v}$  e perciò

$$\tau = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg \cdot \tan \alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \cdot \tan \alpha}}$$

Osservando il triangolo colorato nella figura a sinistra si ricava

$$R = \ell \cdot \sin \alpha$$

e perciò

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cdot \sin \alpha}{g \cdot \tan \alpha}}$$

(3-14)

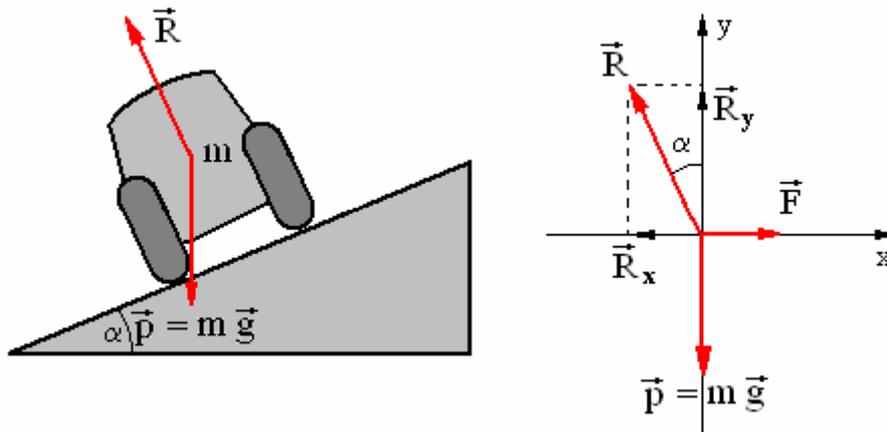
$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cdot \cos \alpha}{g}}$$

Questa formula è molto importante e la riprenderemo in considerazione in seguito quando parleremo del pendolo semplice.

## Esercizio 15

Si abbia un'auto che procede ad una velocità  $\vec{v}$  su di una pista con una curva "bilanciata", cioè inclinata da una parte per compensare l'effetto della forza centrifuga.

Quanto dev'essere l'angolo  $\alpha$  per avere una compensazione esatta ?



## Soluzione

La reazione vincolare  $\vec{R}$  può essere scomposta nelle due componenti  $\vec{R}_x$  e  $\vec{R}_y$ , la prima compensa la forza centrifuga  $\vec{F}$  e la seconda compensa la forza peso  $\vec{p}$ .

Si ha

$$R_x = R \cdot \sin \alpha$$

$$R_y = R \cdot \cos \alpha$$

La forza centrifuga (indicando il raggio di curvatura con  $r$  per distinguerlo dalla reazione  $R$ )

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

Osservando il diagramma di corpo libero, lungo gli assi  $x$  ed  $y$  abbiamo

$$m \frac{v^2}{r} = R \cdot \sin \alpha$$

$$mg = R \cdot \cos \alpha$$

Dividendo membro a membro, otteniamo

$$\frac{v^2}{rg} = \tan \alpha$$

cioè

$$\alpha = \arctan \frac{v^2}{rg}$$

Si vede che l'angolo aumenta al diminuire del raggio di curvatura, in altre parole quanto più stretta è la curva.

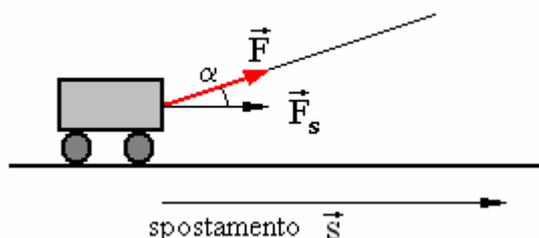
Inoltre l'angolo dipende dalla velocità: la curva è esattamente compensata solo se l'auto viaggia alla velocità  $v$  per cui è stata calcolata.

## CAP. 4 – LAVORO E POTENZA

### 4-1. Lavoro fatto da una forza costante

Supponiamo di spostare un carrello di massa  $m$  tirandolo con una corda, applicando una forza  $\vec{F}$  costante, e di ottenere dopo un certo tempo, uno spostamento  $\vec{s}$ .

Sia la forza che lo spostamento sono due vettori. Intuitivamente si capisce che se tiriamo la corda con un angolo  $\alpha$  piuttosto ampio, si deve eseguire uno sforzo maggiore rispetto a quello che dovremmo fare con un angolo  $\alpha = 0$ .



Al limite, se l'angolo fosse di  $90^\circ$  non riusciremmo affatto a spostare il carrello, ma tutt'al più potremmo sollevarlo.

Quindi il lavoro dipende fortemente dall'angolo esistente fra la direzione della forza e la direzione dello spostamento.

Per calcolare il lavoro occorre proiettare la forza lungo la direzione dello spostamento e la lunghezza di tale componente è

$$F_s = F \cos \alpha.$$

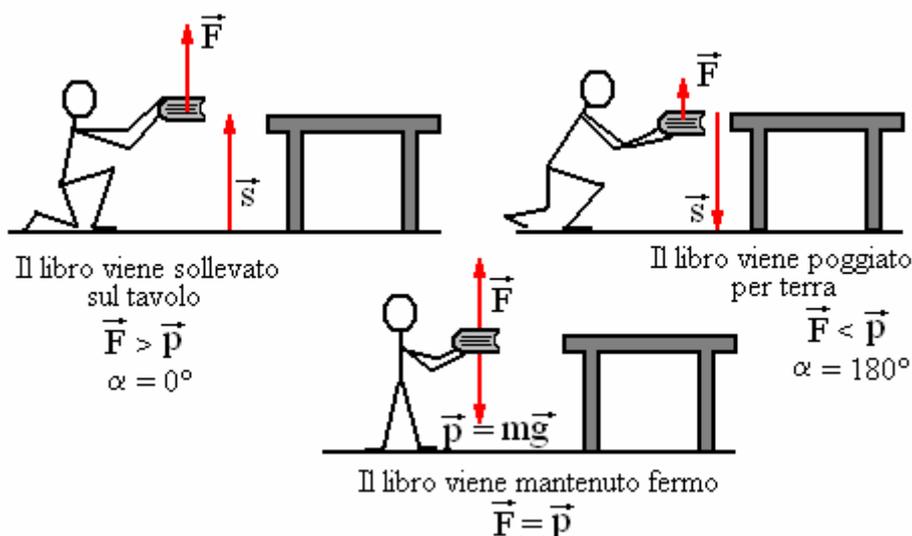
Poiché il lavoro è direttamente proporzionale alla forza applicata e allo spostamento, possiamo definirlo come il prodotto della componente  $F_s$  per lo spostamento

$$(4-1) \quad L = s F_s \cos \alpha$$

Ma questa espressione (ricordando la formula 1-2 del primo capitolo) corrisponde al prodotto scalare fra i vettori  $\vec{F}$  e  $\vec{s}$ . Quindi possiamo scrivere

$$(4-2) \quad L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \alpha$$

**Il lavoro non è un vettore, ma una grandezza scalare.**



Questa definizione di lavoro è abbastanza intuitiva, ma attenzione a non identificare completamente il concetto fisico di lavoro appena definito, con il significato di lavoro adoperato nel linguaggio corrente.

Infatti nella prima delle tre figure precedenti, un libro viene sollevato da terra e deposto su un tavolo: la forza  $\vec{F}$  applicata è leggermente maggiore della forza di gravità  $\vec{p} = m\vec{g}$ , l'angolo fra i due vettori è nullo, il coseno è uguale ad 1, e quindi il lavoro eseguito è

$$L = mg h$$

Nel secondo caso il libro viene posato di nuovo in terra: la forza applicata  $\vec{F}$  è in questo caso leggermente minore della forza di gravità  $\vec{p} = m\vec{g}$ , l'angolo fra i due vettori è di  $180^\circ$ , il coseno è uguale a -1, e quindi il lavoro eseguito è

$$L = - mg h$$

Il lavoro negativo viene anche detto **resistente**.

Mentre l'uomo esegue un lavoro negativo nel poggiare il libro a terra, la forza gravitazionale della terra esegue un lavoro uguale ed opposto, cioè positivo.

Riprenderemo questo aspetto importante nel prossimo capitolo quando parleremo di energia.

Nel terzo caso infine il libro viene mantenuto fermo, si ha  $\vec{F} = m\vec{g}$  ma nessuno spostamento. Dal punto di vista fisico non si compie alcun lavoro, mentre oggettivamente l'uomo compie uno sforzo continuo per tenere sollevato il libro, e nel linguaggio corrente diciamo che viene eseguito un lavoro anche in questo caso.

L'unità di misura per il lavoro è il **Joule** (si compie il lavoro di 1 Joule quando applicando la forza di 1 Newton si ottiene lo spostamento di 1 metro).

Nel sistema cgs l'unità di misura è l'**erg**.

Occorrono 10.000.000 di erg per formare 1 Joule.

Quindi

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$$

Infine, per misurare lavori estremamente piccoli, per esempio quando si prendono in esame le particelle atomiche e subatomiche, si usa una unità di misura ancora più piccola: l'**elettronvolt**.

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Concludiamo con una importante osservazione: applichiamo una forza  $F$  costante, fino ad ottenere uno spostamento dalla posizione  $s_1$  alla posizione  $s_2$ .

Il lavoro impiegato è il prodotto

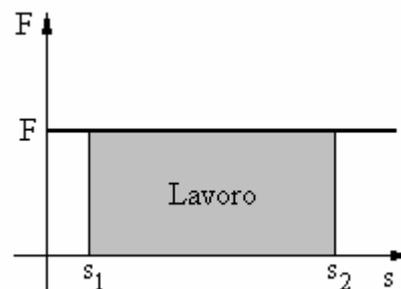
$$L = F \cdot \Delta s = F \cdot (s_2 - s_1)$$

Se costruiamo un grafico mettendo in ascissa le posizioni  $s$  ed in ordinata la forza applicata, si ottiene la figura qui a fianco.

L'area del rettangolo ombreggiato corrisponde proprio (base per altezza) al lavoro eseguito dalla forza.

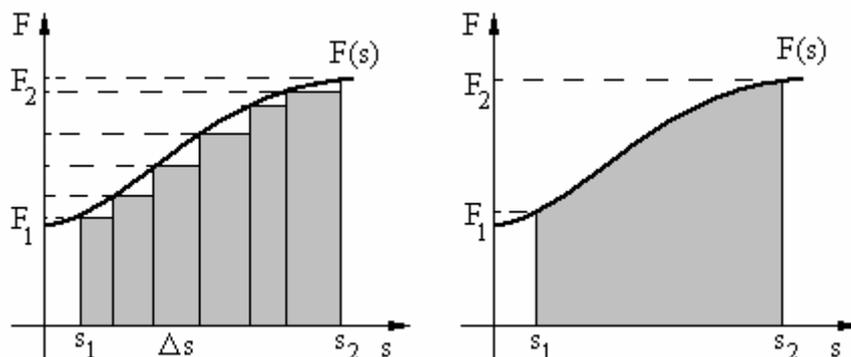
Questo risultato, come vedremo nel paragrafo successivo, è valido anche quando viene applicata una forza variabile: il lavoro è sempre dato dalla superficie compresa fra le posizioni  $s_1$  ed  $s_2$ , l'asse delle ascisse e la linea della forza applicata.

Cioè il lavoro corrisponde sempre all'area della superficie ombreggiata.



## 4-2. Lavoro fatto da una forza variabile

Supponiamo ora di effettuare uno spostamento da  $s_1$  ad  $s_2$ , ma la forza applicata abbia un andamento variabile, cioè una forza  $F(s)$  dipendente dalla posizione  $s$  come quella mostrata in figura.



E' sempre possibile suddividere lo spostamento in tanti piccoli spostamenti  $\Delta s$  (non necessariamente uguali fra loro), ma tali che entro ciascuno di essi la forza  $F$  mantenga un valore ragionevolmente costante.

Il lavoro  $\Delta L$  compiuto dalla forza in ciascuno di questi piccoli intervalli è allora fornito (in base a quanto detto nel paragrafo precedente) dall'area del rettangolo

$$\Delta L = F \cdot \Delta s$$

Il lavoro complessivo eseguito nell'intervallo da  $s_1$  ad  $s_2$  è allora la somma di tutti i lavori  $\Delta L$  compiuti in ciascun piccolo spostamento  $\Delta s$ , cioè la somma dell'area di tutti i rettangolini mostrati nella prima figura

$$(4-1) \quad L = \sum_{s_1}^{s_2} F \cdot \Delta s$$

Il lavoro calcolato in questo modo non è però esatto, perché vengono trascurate le aree di tutti i triangolini bianchi compresi fra i rettangoli ombreggiati e la funzione  $F(s)$  della forza.

Se immaginiamo di suddividere l'intervallo da  $s_1$  ad  $s_2$  in un numero maggiore di intervallini, i singoli spostamenti  $\Delta s$  diventeranno sempre più piccoli, e le aree dei triangoli assumerà un valore minore. Quando, con una operazione di limite, gli intervalli diventeranno infiniti, i triangoli spariranno ed il lavoro corrisponderà esattamente alla superficie mostrata a destra.

La sommatoria della formula (4-1) diventerà allora un integrale definito (risolvibile con i procedimenti studiati nel corso di analisi)

$$(4-2) \quad L = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{s_1}^{s_2} F \cdot \Delta s = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds$$

Nel paragrafo 3-5 abbiamo già accennato ad una applicazione particolare di questa formula, parlando della costante elastica di richiamo di una molla.

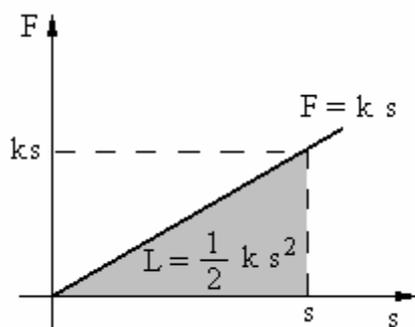
Nel caso di una molla che venga stirata o compressa, purché non si superino certi valori che possano causare deformazioni permanenti alla molla, e purché l'allungamento o la compressione vengano realizzati lentamente (in modo da poter considerare la molla in ogni istante in equilibrio), la forza agente sulla molla è fornita con buona approssimazione dalla legge (detta legge di Hooke)

$$(4-3) \quad F = -k \cdot s$$

Immaginiamo ora di comprimere una molla: poiché la costante  $k$  è negativa, la (4-3) diviene

$$F = k s$$

E riportando su un grafico  $s$  ed  $F$ , si ha



Il lavoro eseguito nella compressione corrisponde all'area del triangolo ombreggiato, e per il suo calcolo non c'è bisogno di ricorrere all'analisi matematica.

La base del triangolo è  $s$ , la sua altezza è  $ks$ : quindi la sua area è

$$(4-4) \quad L = \frac{1}{2} ks^2$$

Si noti che avremmo ottenuto lo stesso risultato anche se avessimo allungato la molla invece di comprimerla.

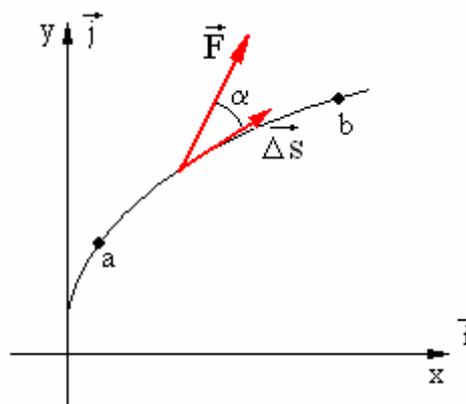
Infatti nel caso dell'allungamento lo spostamento  $s$  sarebbe stato negativo, ma per effetto del quadrato nella (4-4), il risultato

finale sarebbe stato identico.

Infine, nel caso in cui la forza applicata  $\vec{F}$  e lo spostamento  $\vec{\Delta s}$  sono vettori che hanno direzioni diverse, si deve ricorrere al prodotto scalare fra i due vettori.

Lo spostamento  $\vec{\Delta s}$ , con l'operazione di limite diviene il differenziale  $\vec{ds}$ , ed il lavoro compiuto dalla forza da  $a$  a  $b$ , è dato dall'integrale

$$(4-5) \quad L = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_a^b F \cos \alpha ds$$



### 4-3. Teorema dell'energia cinetica

Se la forza applicata produce una accelerazione, qual è il lavoro eseguito dalla forza ?

Supponiamo inizialmente che questa forza sia costante: allora l'accelerazione sarà uniforme ed al corpo in movimento possono essere applicate le formule del moto uniformemente accelerato.

$$(4-6) \quad \begin{cases} s = s_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \\ v = v_0 + a \Delta t \end{cases}$$

Ponendo per semplicità  $s_0 = 0$ , la prima di esse può essere modificata nel modo seguente

$$s = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\Delta v}{\Delta t} (\Delta t)^2$$

$$s = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} (v - v_0) \Delta t$$

$$2s = 2v_0 \Delta t + v \Delta t - v_0 \Delta t$$

$$2s = v_0 \Delta t + v \Delta t$$

$$s = \frac{v + v_0}{2} \Delta t$$

Quindi le (4-6) possono anche essere scritte così

$$(4-7) \quad \begin{cases} s = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \\ a = \frac{v - v_0}{\Delta t} \end{cases}$$

La forza  $F$  applicata ad un corpo di massa  $m$  produce uno spostamento  $s$  ed una accelerazione  $a$ , dunque il lavoro eseguito dalla forza è

$$L = Fs = mas = m \frac{v - v_0}{\Delta t} \frac{v + v_0}{2} \Delta t = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

Chiamando **energia cinetica** (cioè dal greco: energia di movimento) di un corpo la sua massa per il quadrato della velocità, diviso due, ed indicandola con la lettera  $T$ ,

$$(4-8) \quad \text{energia cinetica} \rightarrow T = \frac{1}{2} mv^2$$

possiamo affermare che il lavoro eseguito dalla forza è

$$(4-9) \quad L = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = T - T_0$$

Dunque il lavoro compiuto corrisponde alla **variazione di energia cinetica**.

Questo risultato continua ad essere valido anche quando la forza non è costante (sia in direzione che in modulo) e anche quando lo spostamento è curvilineo.

La (4-9), dove  $L$  è il lavoro fatto dalla **forza risultante** agente su un corpo, prende il nome di **teorema dell'energia cinetica**.

**L'energia può essere definita come la capacità di un corpo di compiere un lavoro.** Esistono molte forme di energia, come vedremo, e quella cinetica è solo il primo tipo.

Poiché l'energia può sempre trasformarsi in lavoro, **tutte le forme di energia si misurano con le stesse unità di misura del lavoro.**

## 4-4. La potenza

Nel calcolo del lavoro non abbiamo preso in considerazione il tempo necessario per compierlo.

Se due macchine eseguono uno stesso lavoro ma una delle due impiega un tempo minore, viene spontaneo definire quest'ultima più potente dell'altra.

In altre parole, a parità di lavoro compiuto, più piccolo è il tempo impiegato e maggiore è la potenza esplicita. Quindi dividendo il lavoro per il tempo impiegato a compierlo si ottiene la potenza.

$$(4-10) \quad P = \frac{L}{t}$$

L'unità di misura della potenza è il **Watt**: si ha la potenza di 1 Watt quando si esegue il lavoro di 1 Joule in 1 secondo.

Si usano anche multipli e sottomultipli (1 KW = 1000 Watt, 1 mW = 0,001 W, ...).

Nel linguaggio comune si usa spesso, per esempio, il chilowattora, che però non è una misura di potenza ma di lavoro. Infatti corrisponde alla potenza di 1 KW erogata per 1 ora, e potenza moltiplicata per un tempo fornisce un lavoro (vedi la 4-10).

Talvolta si usa anche il **cavallo vapore** (o Hp = horse power)

$$(4-11) \quad 1\text{Hp} = 746\text{ W}$$

Per concludere accenniamo anche al fatto che la (4-10) può anche essere espressa nel modo seguente

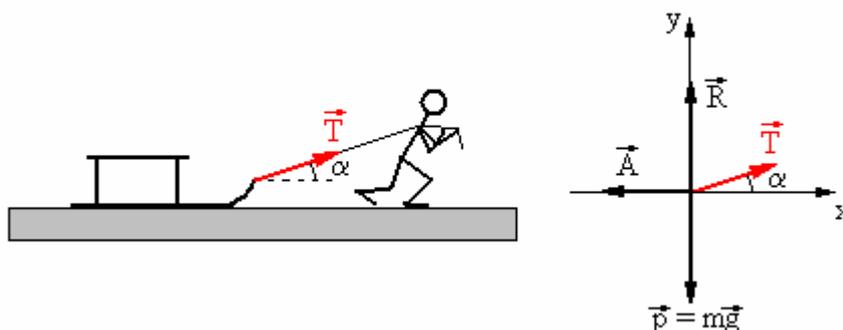
$$(4-12) \quad P = \frac{L}{t} = \frac{Fs}{t} = F \frac{s}{t} = Fv$$

Cioè la potenza di un corpo è anche uguale al prodotto della forza applicata per la velocità che questa le ha impresso.

## ESERCIZI SUL LAVORO E LA POTENZA

### Esercizio 16

Un ragazzo trascina con velocità costante una slitta (con una massa di 10 kg) su un piano orizzontale e con un coefficiente di attrito (dinamico)  $\mu = 0,2$ . La corda con cui il ragazzo trascina la slitta forma un angolo  $\alpha = 30^\circ$  con il piano orizzontale. Calcolare la tensione  $\vec{T}$  della corda.



Ricordando che il ragazzo procede con velocità costante, dopo aver camminato per 20 m, qual è il lavoro compiuto dalla tensione della fune (cioè dal ragazzo) ?  
 E il lavoro fatto dalla forza d'attrito A ?  
 E il lavoro complessivo di tutte le forze che agiscono sulla slitta ?

### Soluzione

Cominciamo a calcolare il valore della tensione  $\vec{T}$ . La velocità è costante e quindi l'accelerazione è nulla.

Il diagramma di corpo libero fornisce

$$(4-13) \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 & \rightarrow & T \cos \alpha - A = 0 \\ \sum F_y = 0 & \rightarrow & T \sin \alpha + R - mg = 0 \end{cases}$$

ma è anche

$$(4-14) \quad A = \mu R$$

Le tre equazioni (4-13) e (4-14) contengono tre incognite (T, A, R). Eliminiamo A ed R ed esplicitiamo la T

$$\begin{cases} T \cos \alpha = \mu R \\ T \sin \alpha + R = mg \\ R = \frac{T \cos \alpha}{\mu} \\ T \sin \alpha + \frac{T \cos \alpha}{\mu} = mg \\ T \mu \sin \alpha + T \cos \alpha = mg \mu \\ T = \frac{mg \mu}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} \end{cases}$$

Cioè, sostituendo i valori numerici,

$$T = \frac{10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20}{0,1 + 0,866} = \frac{20}{0,966} \cong 20,7 \text{ N}$$

Ora passiamo alle altre domande, al calcolo dei lavori.

Il lavoro compiuto dal ragazzo è

$$L_T = \vec{T} \cdot \vec{s} = Ts \cos \alpha = 20,7 \cdot 20 \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 359 \text{ J}$$

Il lavoro della forza d'attrito è

$$L_A = \vec{A} \cdot \vec{s} = -As$$

ma ricordando la prima delle (4-13) si può scrivere anche

$$L_A = -Ts \cos \alpha = -20,7 \cdot 20 \frac{\sqrt{3}}{2} \cong -359 \text{ J}$$

I due lavori  $L_T$  ed  $L_A$  sono quindi uguali e contrari.

I lavori compiuti dalle forze  $\vec{R}$  e  $\vec{p}$  sono invece entrambi nulli perché i vettori sono perpendicolari allo spostamento.

Quindi il lavoro complessivo eseguito da tutte le forze che agiscono sul corpo è

$$L_{\text{totale}} = L_T + L_A + L_R + L_p = 359 - 359 + 0 + 0 = 0 \text{ J}$$

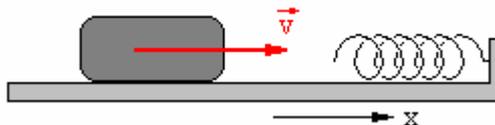
Infatti la slitta si muove con velocità costante (accelerazione nulla), la forza risultante è nulla e quindi non può compiere un lavoro.

## Esercizio 17

Un blocco di 10 kg scorre su un piano orizzontale privo di attrito, alla velocità di 2,5 m/s.

Viene fermato da una molla che si comprime.

Sapendo che la costante elastica della molla è pari a 2000 N/m, di quanto si comprime la molla ?



## Soluzione

Applichiamo al blocco il teorema dell'energia cinetica.

Il lavoro scaricato dal blocco in movimento sulla molla durante la compressione è (vedi la 4-4)

$$L = \frac{1}{2} kx^2. \text{ L'energia cinetica accumulata dalla molla durante la compressione è } T = \frac{1}{2} mv^2.$$

Per il teorema suddetto queste due espressioni devono essere uguali, quindi

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv^2$$

$$kx^2 = mv^2$$

$$x = v \sqrt{\frac{m}{k}} = 2,5 \sqrt{\frac{10}{2000}} = 2,5 \sqrt{0,005} \cong 0,177 \text{ m} = 17,7 \text{ cm}$$

## Esercizio 18

Da quale altezza dovrebbe cadere un'auto per toccare il suolo con la velocità di 72 Km/h ?

### Soluzione

Un problema analogo è stato affrontato nell'esercizio n. 3, ed è stato risolto utilizzando la cinematica.

Dalla formula  $v^2 = 2gh$  si ottiene  $h = \frac{v^2}{2g}$

Ora trattiamolo con il teorema dell'energia cinetica: il lavoro fatto dalla forza di gravità è uguale all'energia cinetica acquistata dall'auto

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Le due formule ottenute sono identiche.

Facendo i calcoli si trova

$$h = \frac{\left(\frac{72}{3,6}\right)^2}{2 \cdot 10} = \frac{20^2}{20} = 20 \text{ m}$$

Per cui quando viaggiamo in auto ad una velocità (che ci sembra tranquilla) di 72 km/h, se disgraziatamente andassimo a sbattere contro un albero, saremmo sottoposti ad un urto uguale a quello che avremmo se una gru ci sollevasse fino a 20 m di altezza (circa come un palazzo di 5 piani) e poi ci lasciasse cadere !

## CAP. 5 – L'ENERGIA

### 5-1. Le forze conservative

Quando su un corpo agiscono contemporaneamente più forze, è possibile distinguere il lavoro eseguito da ciascuna di esse.

Il teorema dell'energia cinetica può allora essere scritto anche così

$$(5-1) \quad L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n = \Delta T$$

Le forze possono essere suddivise in due grandi categorie: quelle **conservative** e quelle **non conservative**.

Si abbia un blocco di massa  $m$  che scivola senza attrito su un piano orizzontale, fissato ad una molla.

Se imprimiamo al blocco una velocità  $\vec{v}$

La molla lo farà oscillare avanti ed indietro.

Immaginiamo l'attrito nullo, la molla con massa trascurabile e con costante elastica di richiamo uguale a  $k$ .

Indichiamo questo dispositivo con il nome di **oscillatore armonico**.

Poiché gli attriti sono nulli l'energia cinetica che gli abbiamo impresso inizialmente, viene gradualmente trasformata in un lavoro di compressione della molla. Quando la trasformazione è completa la molla restituisce l'energia meccanica accumulata spingendo indietro il blocco e facendogli riacquistare la stessa velocità iniziale ma con verso opposto. Quando il blocco torna nella posizione di riposo iniziale, tutta l'energia meccanica immagazzinata dalla molla si è trasformata nuovamente in energia cinetica (che però non è negativa per via del fatto che nella formula dell'energia cinetica la velocità è elevata al quadrato).

Successivamente il blocco prosegue la sua corsa distendendo la molla e trasformando la sua energia cinetica in lavoro meccanico per l'allungamento della molla. Quando la trasformazione è completa l'energia meccanica della molla viene nuovamente trasformata in energia cinetica ed il procedimento prosegue all'infinito perché abbiamo immaginato nulli tutti gli attriti.

L'energia cinetica trasmessa inizialmente al blocco si conserva nel tempo e la forza con cui abbiamo impresso inizialmente la velocità  $\vec{v}$ , è **una forza conservativa**.

Anche se facessimo rimbalzare una palla sul pavimento e tutti i tipi di attrito fossero nulli, potremmo constatare che la palla ritornerebbe sempre alla stessa altezza da cui è stata lanciata e rimbalzerebbe all'infinito senza fermarsi mai.

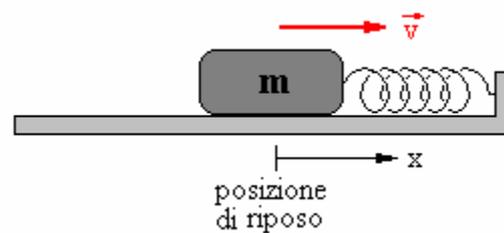
Anche la forza di gravità è quindi **una forza conservativa**.

Ovviamente entrambi gli esempi rappresentano astrazioni impossibili perché gli attriti non sono mai completamente nulli.

In definitiva **definiamo forze conservative quelle per le quali lungo un percorso chiuso o ciclico, la capacità di compiere un lavoro (e quindi la sua energia) rimane invariata nel tempo (anche se l'energia si trasforma ciclicamente da una forma all'altra)**.

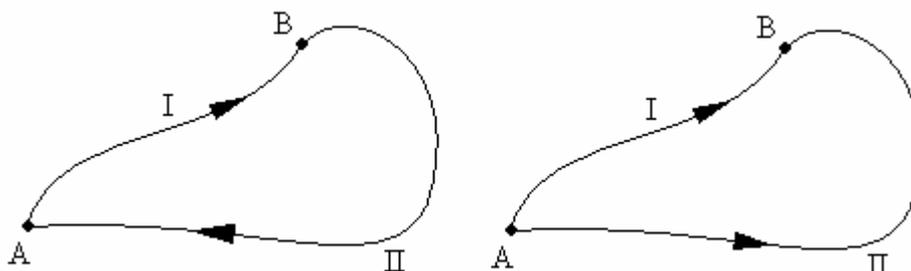
Se ora supponiamo che nell'oscillatore armonico sia presente un attrito fra il blocco ed il piano orizzontale, potremo constatare che il blocco torna ogni volta nella posizione di riposo con una energia cinetica minore di quella che aveva in precedenza.

La nuova forza che agisce, rispetto al caso precedente, è la forza di attrito. Per questa ragione la forza d'attrito viene definita **non conservativa**.



Possiamo allora riassumere dicendo che **una forza viene definita conservativa se l'energia cinetica di un corpo su cui essa agisce torna ciclicamente a riassumere il suo valore iniziale dopo un qualsiasi percorso chiuso.**

Possiamo elaborare una diversa definizione, più significativa, di forza conservativa. Consideriamo un generico percorso chiuso e due punti A e B arbitrari su di esso.



Il lavoro fatto da una forza conservativa per spostare una generica massa  $m$  lungo l'intero percorso (figura a sinistra) è nullo perché l'energia cinetica in un ciclo riassume il valore iniziale, quindi  $\Delta T = 0$ . Ma allora per il teorema dell'energia cinetica anche il lavoro svolto in un ciclo deve essere nullo. Quindi in un ciclo

$$\begin{aligned} L_{TOT} &= 0 \\ L_{AB,I} + L_{BA,II} &= 0 \\ L_{AB,I} &= -L_{BA,II} \end{aligned}$$

(dove  $L_{AB,I}$  significa lavoro speso per andare da A a B lungo il percorso I, e  $L_{BA,II}$  significa invece lavoro speso per andare da B ad A lungo il percorso II).

Ne deriva una considerazione importante (figura a destra): se spostassi la massa  $m$  in verso opposto (da A a B) lungo il percorso II, sarebbe necessario un lavoro di segno opposto, e si avrebbe

$$L_{AB,I} = L_{AB,II}$$

Cioè sarebbe necessario lo stesso lavoro per spostare la massa  $m$  da A a B lungo il percorso I e lungo il percorso II.

Ma la forma del percorso chiuso era arbitraria, ed anche la scelta dei punti A e B era arbitraria.

Quindi, tralasciando il percorso che ci è servito solo per la dimostrazione, **dati due punti qualsiasi A e B una forza conservativa compie sempre lo stesso lavoro per spostare una massa  $m$  dal primo punto al secondo lungo un percorso qualsiasi.**

Questo criterio per definire una forza conservativa è estremamente importante.

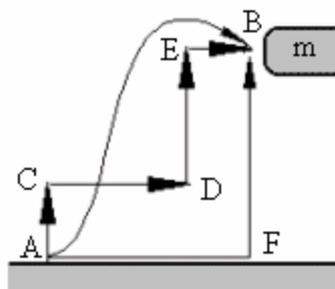
Riepilogando, **una forza è conservativa se il lavoro compiuto per spostare una massa generica lungo un percorso chiuso qualsiasi è nullo, oppure se il lavoro per spostare la massa da un punto ad un altro non dipende dal percorso seguito.**

Per esclusione **una forza non è conservativa se questo criterio non è sempre soddisfatto.**

Chiariamo ulteriormente questi ultimi concetti riferendoci alla forza gravitazionale: spostiamo un corpo di massa  $m$  dal punto A al punto B.

Possiamo spostarlo seguendo infiniti percorsi diversi.

Per esempio possiamo spostarlo da A ad F e poi da F a B: nel primo tratto orizzontale non si compie alcun lavoro (supponiamo che non ci sia attrito con il terreno) perché lo spostamento e la forza peso sono perpendicolari fra loro, mentre nel tratto verticale lo spostamento e la forza peso sono paralleli e quindi il lavoro è semplicemente



$$(5-3) \quad L = mgh$$

dove  $h$  è la distanza BF.

Precisiamo che questo è il lavoro compiuto per sollevare il corpo; il lavoro fatto dalla forza gravitazionale è uguale ma di segno opposto (perché forza di gravità e spostamento hanno verso opposto e formano un angolo di  $180^\circ$ ).

Questo è anche il **lavoro totale** nello spostamento da A a B.

Ora immaginiamo di effettuare lo stesso spostamento, ma seguendo un percorso diverso: una serie di spostamenti orizzontali e verticali: AC+CD+DE+EB.

Per le stesse considerazioni precedenti il lavoro negli spostamenti orizzontali (CD ed EB) è nullo, mentre i lavori nei due spostamenti verticali (AC e DE) sarà

$$L = mgh_1 + mgh_2$$

Dove  $h_1 = AC$  ed  $h_2 = DE$ . Ma allora si ottiene ancora

$$L = mg(h_1 + h_2) = mgh$$

Cioè lo stesso lavoro dello spostamento precedente.

Infine, se spostiamo il corpo lungo un percorso curvilineo arbitrario, possiamo sempre immaginare questo spostamento come costituito da infiniti spostamenti infinitesimi orizzontali e verticali.

La somma dei lavori compiuti negli spostamenti orizzontali sarà sempre nulla, mentre la somma dei lavori compiuti negli spostamenti verticali avrà sempre valore uguale a  $mgh$ .

Possiamo anzi affermare che se, come in figura, lo spostamento supera l'altezza di B e poi scende, nel percorso in salita si esegue un lavoro maggiore di  $mgh$ , ma nella discesa tale lavoro viene restituito (in quanto si ha un lavoro negativo) ed alla fine il bilancio sarà identico a quello calcolato nei due casi precedenti.

**Dunque per spostare un corpo da A a B nel campo gravitazionale, si compie sempre lo stesso lavoro indipendentemente dal percorso seguito.**

## 5-2. L'energia potenziale

Quando è in gioco una forza conservativa, come nel caso del blocco e della molla (con attrito nullo), possiamo parlare di energia cinetica della molla, ma anche (prendendo in considerazione tutto il sistema molla + blocco) di **configurazione d'insieme che cambia durante la compressione e la dilatazione della molla**.

Man mano che il blocco perde la sua energia cinetica comprimendo la molla, il sistema la acquista trasformandola in energia di configurazione (che chiameremo **energia potenziale** e indicheremo con il simbolo **U**) e che misureremo avvalendoci della stessa variabile  $x$  legata alla posizione dell'estremità della molla.

Durante il ciclo di andata e ritorno la somma delle due energie è costante

$$(5-4) \quad \Delta T + \Delta U = 0$$

Quando l'energia cinetica diminuisce, quella potenziale del sistema aumenta della stessa quantità, e viceversa.

L'energia potenziale di un sistema costituisce quindi una forma di energia che viene immagazzinata e che può essere sempre recuperata e ritrasformata in energia cinetica.

**Non è possibile però associare una energia cinetica ad una forza non conservativa** perché dopo ogni ciclo l'energia cinetica non riassume il valore che aveva in precedenza. Infatti, se è presente l'attrito, dopo un certo numero di oscillazioni l'energia viene completamente dissipata ed il blocco si ferma. Quindi in presenza di una forza non conservativa la somma espressa dalla (5-4) non si mantiene costante.

Per le forze non conservative il lavoro necessario per spostare un corpo da un punto ad un altro dipende generalmente dal percorso.

Basta pensare allo spostamento di un mobile da una parete all'altra di una stanza: ha molta importanza il percorso seguito.

Per effetto dell'attrito con il pavimento la via più breve è generalmente quella alla quale corrisponde un lavoro minore. Tutti gli altri percorsi richiedono un lavoro maggiore.

Come si calcola l'energia potenziale  $U$  di un sistema ?

Nel caso unidimensionale del blocco e della molla, dal teorema dell'energia cinetica e dalla (5-4) si ha

$$L = \Delta T = -\Delta U$$

Il lavoro, come già detto, dipende solo dal punto iniziale e quello finale, ma non dal percorso.

La forza  $F$  che agisce dipende solo dalla posizione del corpo, cioè è del tipo  $F(x)$ . Ma il lavoro è dato dal prodotto forza per spostamento, e per uno spostamento infinitesimo il lavoro è

$$dL = F(x)dx$$

Integrando fra la posizione iniziale  $x_1$  e la posizione finale  $x_2$  si ottiene

$$(5-5) \quad \Delta U = -L = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

o, anche, (attenzione al segno meno !)

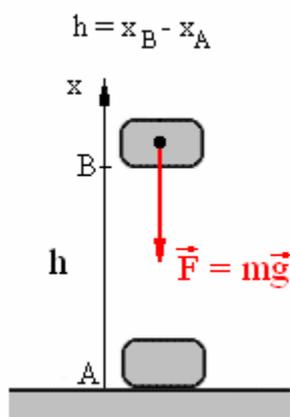
$$(5-6) \quad \Delta U = U(x_1) - U(x_2)$$

L'energia potenziale del sistema in un generico punto  $x$  è allora

$$(5-7) \quad U(x) = -\int F(x)dx + C$$

cioè un integrale indefinito con una costante di integrazione  $C$ .

L'energia potenziale che un sistema possiede in un punto, dipende allora da una costante  $C$  arbitraria.



La cosa non provoca inconvenienti perché in ogni fenomeno fisico dobbiamo sempre prendere in considerazione la differenza  $\Delta U$  di potenziale fra due punti e quindi la costante  $C$  si elimina in ogni caso. Per esempio, quando solleviamo un corpo di massa  $m$  da  $A$  a  $B$ , la forza agente è  $F(x) = -mg$  perché ha direzione opposta a quella dell'asse  $x$ , e le energie potenziali nei due punti sono

$$(5-8) \quad \begin{cases} U(x_A) = -\int (-mg)dx = mgx_A + C \\ U(x_B) = -\int (-mg)dx = mgx_B + C \end{cases}$$

ma la differenza di energia potenziale fra i due punti è

$$\Delta U = U(x_B) - U(x_A) = mg(x_B - x_A) = mgh$$

Lo stesso risultato si otteneva comunque applicando la (5-5)

$$\Delta U = -\int_A^B (-mg)dx = -[-mgx]_A^B = -[-mgx_B + mgx_A] = mg(x_B - x_A) = mgh$$

Una conseguenza del fatto che normalmente si ha sempre a che fare con differenze di energia potenziale, comporta la possibilità di stabilire in modo arbitrario il punto in cui considerare nulla l'energia potenziale.

Per esempio se nell'esempio precedente consideriamo nulla l'energia potenziale nel punto  $A$ , si ha  $x_A = 0$  e  $x_B = h$ , e le (5-8) divengono

$$(5-9) \quad \begin{cases} U(x_A) = mgx_A = 0 \\ U(x_B) = mgx_B = mgh \end{cases}$$

Questo tipo di energia potenziale viene anche denominata **energia potenziale gravitazionale**.

## 5-3. Teorema della conservazione dell'energia meccanica

Nell'esempio del paragrafo precedente possiamo allora esprimere la (5-4) anche nel modo seguente

$$(T_B - T_A) + (U_B - U_A) = 0$$

$$T_B + U_B = T_A + U_A$$

Se ora definiamo l'energia meccanica di un corpo in un certo punto come la somma dell'energia cinetica  $T$  e dell'energia potenziale  $U$  in quel punto, avremo

$$\text{Energia meccanica nel punto B} \rightarrow T_B + U_B$$

$$\text{Energia meccanica nel punto A} \rightarrow T_A + U_A$$

cioè

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgx_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgx_A$$

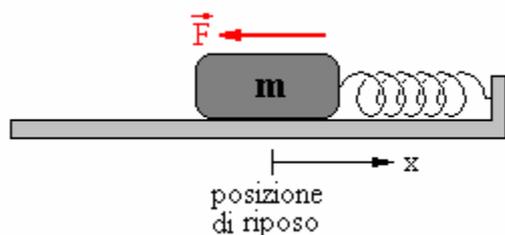
In ogni generico punto  $x$  si ha quindi

$$(5-10) \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgx = \text{costante}$$

e questa formula rappresenta il principio di conservazione dell'energia meccanica. Vale solo se la forza agente è conservativa (come la forza di gravità) e se sono nulli gli attriti (cioè se non agiscono anche forze non conservative).

E' un principio estremamente importante ed utile per affrontare e risolvere molti problemi.

La (5-10) può essere applicata anche nel caso del blocco e della molla (in assenza di attrito).



La forza agente sul blocco è  $F(x) = -kx$  perché ha direzione opposta a quella dell'asse  $x$ , e quindi la sua energia potenziale in un generico punto  $x$  è

$$U(x) = -\int (-kx) dx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

che si riduce a

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

se stabiliamo di considerare nulla l'energia potenziale nella posizione di riposo.

La (5-10) diviene allora nel nostro caso

$$(5-11) \quad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{costante}$$

cioè

$$(5-12) \quad mv^2 + kx^2 = \text{costante}$$

Questo tipo di energia potenziale viene anche denominata **energia potenziale elastica** della molla.

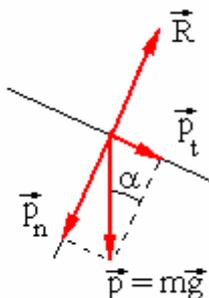
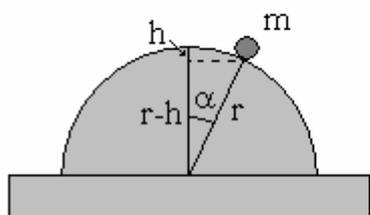
Nel caso dei moti in due o tre dimensioni, la generalizzazione porta a definire

$$(5-13) \quad \Delta U = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}$$

$$(5-14) \quad \vec{F}(r) = -\vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}$$

## ESERCIZI SULLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

### Esercizio 19



Una sferetta di massa  $m$  è poggiata in equilibrio su una semisfera di raggio  $r$ . Ad un certo istante comincia a cadere senza attrito.

A quale angolo  $\alpha$  la sferetta si stacca dalla semisfera ?

### Soluzione

La sferetta comincerà a staccarsi quando la forza centrifuga (dovuta alla semicirconferenza che è costretta a percorrere, supera la componente  $p_n$ ).

Cominciamo calcolando la lunghezza  $h$ . Dal triangolo rettangolo indicato nella figura a sinistra si ha

$$\cos \alpha = \frac{r-h}{r}$$

$$r \cos \alpha = r - h$$

(5-15)

$$h = r(1 - \cos \alpha)$$

La velocità che la sferetta raggiunge dopo essere discesa di una quota  $h$  (la forza gravitazionale è conservativa, e quindi non importa se la sferetta scende in caduta libera o percorrendo l'arco di circonferenza), è stato già calcolato nelle pagine dedicate alla cinematica (seconda parte dell'esercizio n. 3), ottenendo  $v = \sqrt{2gh}$ .

Ma lo stesso risultato si può ottenere anche applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica.

Si abbia un corpo di massa  $m$  che cade da un'altezza  $h$ . Stabiliamo per comodità che l'energia potenziale sia nulla nel punto B.

Nel punto A la sua energia cinetica è nulla (il corpo è fermo) e la sua energia potenziale è  $mgh$ .

Nel punto B invece l'energia potenziale è nulla perché si è tutta trasformata in energia cinetica.

Quindi avremo

$$\text{Energia meccanica nel punto A} \quad mgh + 0$$

$$\text{Energia meccanica nel punto B} \quad 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

Le due energie meccaniche devono essere uguali, perciò

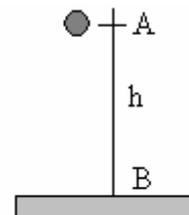
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

semplificando, si riottiene appunto

(5-16)

$$v^2 = 2gh$$

Sostituendo la (5-15) nella (5-16) abbiamo



$$(5-17) \quad v^2 = 2gr(1 - \cos \alpha)$$

Calcoliamo ora la forza centrifuga  $F_c$  della sferetta a tale velocità

$$(5-18) \quad F_c = m \frac{v^2}{r} = \frac{m}{r} 2gr(1 - \cos \alpha) = 2mg(1 - \cos \alpha)$$

Ma la forza ad essa opposta (vedi diagramma del corpo libero) è

$$(5-19) \quad p_n = p \cos \alpha = mg \cos \alpha = R$$

Il distacco della sferetta si ha quando la (5-18) raggiunge la (5-19), cioè quando

$$F_c = p_n$$

$$2mg(1 - \cos \alpha) = mg \cos \alpha$$

$$2 - 2 \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = \arccos \frac{2}{3}$$

o meglio quando

$$h = r(1 - \cos \alpha) = r\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}r$$

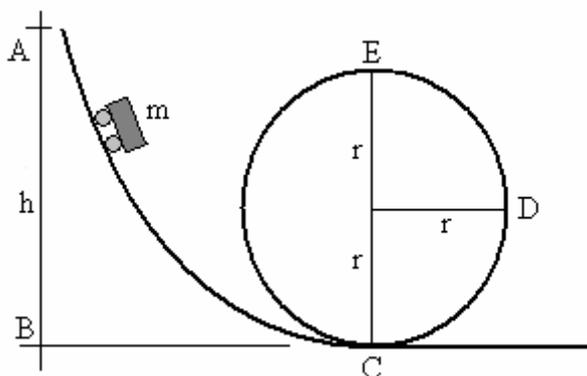
Si noti che il risultato non dipende dalla massa  $m$  della sferetta.

## Esercizio 20

Un carrello di un ottovolante deve effettuare un “giro della morte” come è indicato nella figura. Supponiamo nullo l’attrito.

Da quale altezza  $h$  deve iniziare a cadere il carrello perché il giro possa essere eseguito completamente senza che il carrello si stacchi mai dai propri binari ?

Se  $h = 5r$  quale sarà la forza complessiva che agisce sul carrello (e sui suoi occupanti) quando esso si trova nel punto D ?



## Soluzione

Cominciamo a rispondere alla prima domanda. Il punto critico che occorre superare è il punto E.

In cui il carrello è sottoposto alla forza peso rivolta verso il basso ed alla forza centrifuga rivolta verso l’alto: quest’ultima deve essere almeno uguale (o superiore) alla prima.

Si ha (ponendo uguale a zero l’energia potenziale nel punto B)

$$\text{Energia meccanica nel punto A} \quad mgh + 0$$

$$\text{Energia meccanica nel punto E} \quad mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2$$

Uguagliando fra loro le due energie, otteniamo

$$2mgr + \frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$2gr + \frac{1}{2}v^2 = gh$$

$$4gr + v^2 = 2gh$$

$$v^2 = 2gh - 4gr = 2g(h - 2r)$$

Che è la velocità del carrello nel punto E. Ora imponiamo che la forza centrifuga in questo punto sia almeno uguale alla forza peso

$$F_c = p$$

$$m \frac{v^2}{r} = mg$$

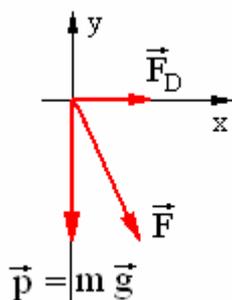
$$m \frac{2g(h - 2r)}{r} = mg$$

$$2gh - 4gr = gr$$

cioè

$$(5-20) \quad h = \frac{5}{2}r$$

Ora rispondiamo alla seconda domanda.



Nel punto D il diagramma di corpo libero è quello indicato a fianco. Cominciamo a calcolare la velocità del carrello nel punto D in modo analogo a quello usato precedentemente.

$$\text{Energia meccanica nel punto A} \quad mg(5r) + 0$$

$$\text{Energia meccanica nel punto D} \quad mgr + \frac{1}{2}mv^2$$

Uguagliando fra loro le due energie, otteniamo

$$mgr + \frac{1}{2}mv^2 = 5mgr$$

$$gr + \frac{1}{2}v^2 = 5gr$$

$$2gr + v^2 = 10gr$$

$$v^2 = 8gr$$

La forza centrifuga nel punto D è allora

$$F_D = m \frac{v^2}{r} = \frac{m}{r} 8gr = 8mg$$

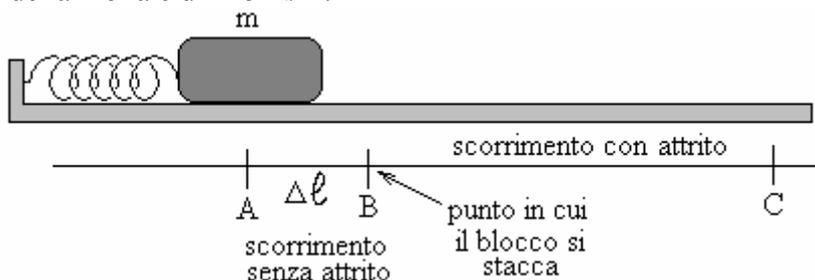
Dal diagramma di corpo libero risulta quindi

$$F = \sqrt{F_D^2 + p^2} = \sqrt{64m^2g^2 + m^2g^2} = mg\sqrt{65}$$

## Esercizio 21

Un blocco avente una massa di 5 Kg viene messo in movimento (senza attrito) su un piano orizzontale da una molla compressa.

La costante elastica della molla è di 125 N/m.



Nel punto B in cui il blocco si stacca dalla molla, il piano su cui poggia comincia a presentare un attrito (con  $\mu = 0,25$ ), e il blocco prosegue rallentando e si ferma nel punto C dopo aver percorso 9 metri.

Qual è l'energia cinetica del blocco nel punto B ?

Di quanto era compressa la molla inizialmente ?

## Soluzione

Dal momento in cui il blocco abbandona la molla (punto B), la forza d'attrito esegue un lavoro frenante.

La forza d'attrito è

$$A = \mu R = \mu mg$$

dove, al solito, R è la reazione vincolare ed mg la forza peso.

Il lavoro eseguito dalla forza d'attrito A deve essere uguale alla energia cinetica iniziale T acquistata dal blocco a spese della energia meccanica della molla compressa.

$$L = \text{forza} \cdot \text{spostamento} = \mu mg \cdot \Delta s$$

Dove  $\Delta s = BC = 9$  metri.

Quindi l'energia cinetica nel punto B è

$$T = L = 0,25 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 9 \cong 112,5 \text{ J}$$

Per rispondiamo ora alla seconda domanda.

Nel punto A l'energia potenziale elastica è massima e l'energia cinetica è nulla. Nel punto B è invece nulla l'energia potenziale elastica mentre è massima l'energia cinetica. Si ha

$$\text{Energia meccanica nel punto A} \quad \frac{1}{2} K (\Delta \ell)^2 + 0$$

$$\text{Energia meccanica nel punto B} \quad 0 + T$$

(in cui  $\Delta \ell$  è la lunghezza della compressione della molla).

Le due energie debbono essere uguali (perché le forze agenti nel tratto AB sono conservative) e quindi

$$\frac{1}{2} K (\Delta \ell)^2 = T$$

$$(\Delta \ell)^2 = \frac{2T}{K}$$

$$\Delta \ell = \sqrt{\frac{2T}{K}}$$

e, facendo i calcoli, si ottiene

$$\Delta \ell = \sqrt{\frac{2 \cdot 112,5}{125}} \cong 1,34 \text{ m}$$

## CAP. 6 – DINAMICA DEI SISTEMI DI PARTICELLE

### 6-1. Il baricentro

Finora abbiamo sempre immaginato di avere a che fare con corpi aventi una massa  $m$ , che potevamo essere schematizzati come ridotti ad un singolo punto.

E' sempre possibile applicare una tale schematizzazione ?

Se abbiamo un corpo rigido che è soggetto ad una semplice traslazione, la risposta è certamente positiva.

Ma se il corpo non è rigido, oppure se è sottoposto a rotazioni o vibrazioni, occorre fare delle precisazioni e delle modifiche.

In ogni caso è possibile individuare **un unico punto del corpo in cui possiamo immaginare condensata tutta la massa** (e che chiameremo per questo **centro di massa** del corpo).



Qui sopra è rappresentata una chiave inglese (un corpo rigido) fatto scivolare su un piano orizzontale senza attrito, con velocità costante, e fotografato ad intervalli di tempo regolari.

La chiave si muove verso destra con un movimento complesso ruotando su se stessa.

Però possiamo notare che **un singolo punto della chiave percorre spazi uguali in tempi uguali descrivendo esattamente una retta.**

Quel punto è proprio il centro di massa (detto anche **baricentro**) della chiave. Tutta la massa della chiave si può immaginare concentrata in quel punto.

Ora la domanda che ci poniamo è: come si può calcolare la posizione di questo punto ?

Procediamo per gradi e cominciamo a prendere in considerazione due singole particelle (non necessariamente uguali) rispettivamente di massa  $m_1$  e  $m_2$ .

Consideriamo anche un sistema di riferimento come quello indicato in figura.

Vogliamo trovare la posizione  $C$  in cui possiamo immaginare concentrata tutta la massa ( $M = m_1 + m_2$ ) del sistema costituito dalle due particelle.

Per quanto detto nel paragrafo 1-1 (somma di vettori paralleli e concordi), deve risultare

$$m_1 g : m_2 g = \overline{BC} : \overline{AC}$$

$$m_1 g : m_2 g = (x_2 - x_C) : (x_C - x_1)$$

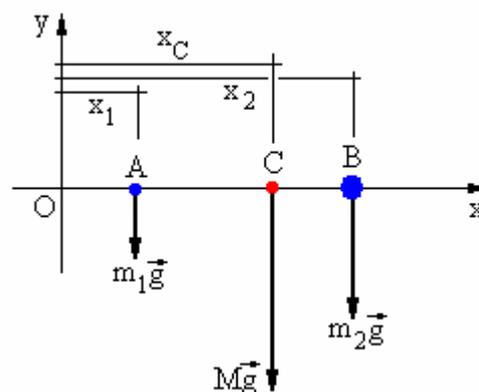
cioè (il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi)

$$m_1 g (x_C - x_1) = m_2 g (x_2 - x_C)$$

$$m_1 (x_C - x_1) = m_2 (x_2 - x_C)$$

$$m_1 x_C - m_1 x_1 = m_2 x_2 - m_2 x_C$$

$$x_C (m_1 + m_2) = m_1 x_1 + m_2 x_2$$



Quindi finalmente

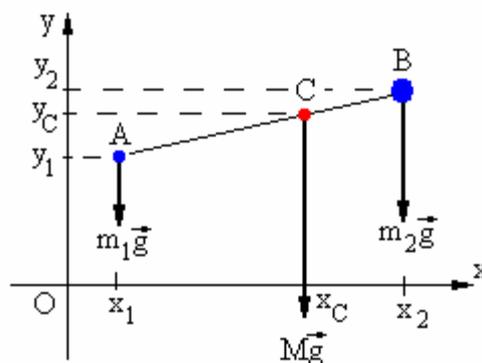
$$(6-1) \quad x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Se le particelle sono posizionate in modo diverso rispetto agli assi, è facile dimostrare che nel piano si ha

$$(6-2) \quad \begin{cases} x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

e nello spazio

$$(6-3) \quad \begin{cases} x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \\ z_C = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$



Se invece le particelle fossero tre, basterebbe trovare il punto C in cui può essere concentrata la massa delle prime due le particelle, e riapplicare il procedimento per trovare il baricentro del sistema formato dalla massa  $m_1 + m_2$  concentrata in C e la terza particella.

E così via se le particelle sono in numero superiore.

Generalizzando la (6-3), per n particelle si ha

$$(6-4) \quad \begin{cases} x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \\ y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \\ z_C = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M} \end{cases}$$

Immaginando poi le masse infinitamente piccole (cioè gli atomi o molecole che formano il corpo) ed in numero infinito, possiamo sostituire il segno di integrale alle sommatorie ed ottenere

$$(6-5) \quad \begin{cases} x_C = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x dm \\ y_C = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y dm \\ z_C = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z dm \end{cases}$$

o anche, con la notazione vettoriale,

$$(6-6) \quad \vec{r}_C = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad \text{con} \quad \begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{r}_C = x_C\vec{i} + y_C\vec{j} + z_C\vec{k} \end{cases}$$

## 6-2. Il moto del baricentro

Dato un sistema di  $n$  particelle (quindi un numero finito, non più infinito), la (6-6) può essere anche scritta nella forma

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$

cioè

$$(6-7) \quad M\vec{r}_c = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots m_n \vec{r}_n$$

in cui  $\vec{r}_c$  è il vettore posizione che individua il baricentro del sistema di particelle.

Derivando rispetto al tempo ambo i membri della (6-7) si ottiene

$$(6-8) \quad M\vec{v}_c = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots m_n \vec{v}_n$$

in cui  $\vec{v}_c$  è la velocità del baricentro. Derivando ancora, si ha

$$(6-9) \quad M\vec{a}_c = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \dots m_n \vec{a}_n$$

Dalla seconda legge della dinamica si ha

$$(6-10) \quad M\vec{a}_c = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots \vec{F}_n = \vec{F}$$

Dove  $\vec{F}$  è la forza totale che agisce sul sistema.

**Quindi possiamo affermare che il prodotto della massa  $M$  di un corpo per l'accelerazione del suo baricentro, è uguale alla somma vettoriale di tutte le forze che agiscono sulle particelle del corpo.**

Occorre notare che fra le forze che agiscono sulle singole particelle ci saranno anche le forze che le particelle esercitano le une sulle altre (elettiche o nucleari per esempio). Ma per il terzo principio della dinamica queste forze sono due a due uguali e contrarie, e la loro risultante deve in ogni caso essere nulla.

Dunque anche per un sistema di particelle (non importa se rigido o fluido) vale la seconda legge della dinamica sotto la forma

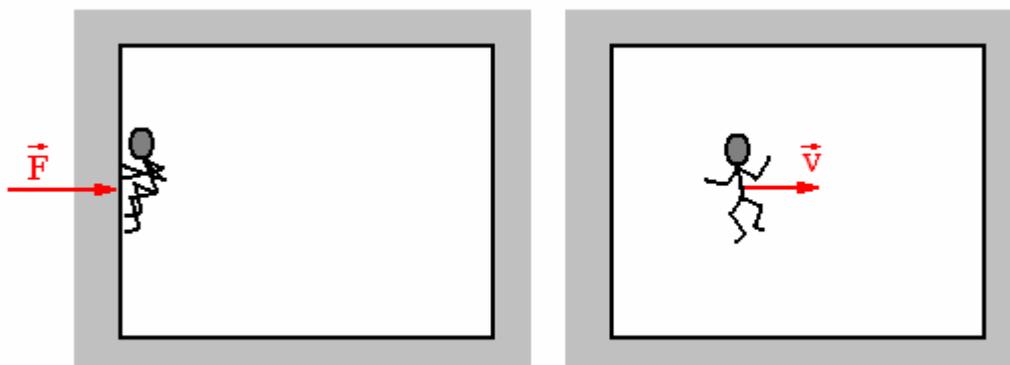
$$(6-11) \quad \vec{F} = M\vec{a}_c$$

## 6-3. Il lavoro interno

Nel paragrafo 4-3 abbiamo definito il teorema dell'energia cinetica, che afferma che il lavoro  $L$  compiuto su una particella dalla risultante delle forze applicate è uguale alla variazione di energia cinetica.

$$(6-12) \quad L = \Delta T = T_2 - T_1$$

Nel caso dei sistemi di particelle occorre però fare una precisazione.



Si abbia un astronauta che poggia su una parete interna di astronave, in assenza di gravità. Ad un certo istante si dà una spinta ed acquista una certa velocità (costante) di allontanamento dalla parete.

Quando si dà la spinta, la parete esercita su di lui una forza  $\vec{F}$  di reazione.

Questa forza non compie alcun lavoro: basta osservare che il suo punto di applicazione è fermo. Però l'astronauta ha acquistato una certa velocità e quindi una energia cinetica.

La (6-12) sembra contraddetta perché pur essendoci stato un lavoro nullo c'è stata una variazione di energia cinetica.

Come mai ?

La ragione risiede nel fatto che se consideriamo il sistema costituito dal solo astronauta, allora il lavoro è stato fatto dall'astronauta stesso. E' cioè un **lavoro interno**. E' stato questo lavoro a generare la variazione di energia cinetica.

Se consideriamo invece il sistema costituito sia dall'astronauta che dall'astronave, allora ci accorgeremo che anche l'astronave ha avuto una variazione di energia cinetica uguale e contraria (magari inavvertibile, per una ragione che chiariremo nel paragrafo successivo)), per cui la (6-12) continua ad essere valida.

In altre parole il teorema dell'energia interna è valido se non sono presenti forze esterne al sistema.

Infatti per il sistema costituito dal solo astronauta (vedi immagine a sinistra), la forza  $\vec{F}$  di reazione è **una forza esterna**.

Comunque possiamo affermare che in ogni caso, sia nel sistema costituito dal solo astronauta, sia nel caso del sistema costituito dall'astronauta e dalla sua astronave, vale la formula

$$(6-13) \quad L_{\text{baricentro}} = \Delta T_{\text{baricentro}}$$

La presenza del lavoro interno al sistema può risultare molto importante.

Un altro esempio è costituito da un'auto che accelera o frena: la sua variazione di energia cinetica da quale lavoro è provocata ? Dal lavoro interno fornito dal motore.

Esistono infatti delle forze esterne all'auto costituite dall'attrito fra le ruote e la strada.

Il teorema dell'energia cinetica non è contraddetto se consideriamo il sistema formato sia dall'auto che dalla strada.

## 6-4. La quantità di moto

Conoscere la velocità di un corpo rappresenta un dato importante sul moto del corpo. Ma per far raggiungere una data velocità a due corpi aventi massa molto diversa, occorre eseguire un lavoro molto diverso.

Si pensi alla differente difficoltà per smuovere (o per fermare) un uomo in bici o un'auto.

E' molto utile spesso associare la velocità di un corpo alla massa del corpo stesso.

Si definisce così una nuova grandezza fisica, detta **quantità di moto**, che corrisponde al prodotto fra la velocità di un corpo e la sua massa.

$$(6-14) \quad \vec{q} = m\vec{v}$$

La quantità di moto è una grandezza vettoriale diretta come la velocità (ed avente anche lo stesso verso perché la massa è sempre positiva).

L'unità di misura per la quantità di moto (talvolta viene abbreviata con q.d.m.) è kgm/s

Derivando rispetto al tempo la (6-14), si ottiene

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

cioè

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$(6-15) \quad \vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

Questa rappresenta una espressione differente (ma equivalente) della **seconda legge della dinamica**: **La variazione della quantità di moto nel tempo corrisponde sempre alla risultante delle forze applicate ad un corpo.**

Per quanto detto nel paragrafo precedente occorre però distinguere fra sistema schematizzabile in un punto e sistema di n particelle.

In quest'ultimo caso la (6-14) e la (6-15) divengono rispettivamente

$$(6-16) \quad \sum m\vec{v}_i = m\vec{v}_{\text{baricentro}}$$

$$(6-17) \quad \vec{F}_{\text{esterna}} = \frac{d(\sum m\vec{v}_i)}{dt}$$

## 6-5. Conservazione della quantità di moto

Si abbia un sistema di particelle sulle quali non agiscano forze esterne, o comunque con forze esterne la cui risultante sia nulla.

La (6-17) diviene

$$\frac{d\left(\sum m\vec{v}_i\right)}{dt} = 0$$

cioè

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = 0$$

dove  $\vec{q}$  è la risultante della somma delle singole quantità di moto delle particelle.

Deve quindi risultare

$$(6-18) \quad \vec{q} = \text{costante}$$

**In assenza di forze esterne quindi la quantità di moto del sistema rimane costante, si conserva.**

Questo risultato è importantissimo e va sotto il nome di **principio di conservazione della quantità di moto**.

Se il sistema in movimento viene osservato da diversi sistemi di riferimento (in moto con velocità costante fra di loro), rispetto a ciascuno di essi la quantità di moto del sistema avrà un valore generalmente diverso dagli altri, ma in ciascuno di essi tale valore si manterrà costante.

La quantità di moto del sistema può essere variata solo dall'azione di forze esterne (con risultante non nulla).

Le forze interne sono sempre uguali ed opposte due a due (per il terzo principio della dinamica), e quindi si annullano tutte fra di loro senza poter mai modificare la quantità di moto del sistema.

Una osservazione importante sui due principi di conservazione finora descritti: quello di conservazione dell'energia meccanica e quello di conservazione della quantità di moto.

L'energia è una grandezza scalare ed il suo principio di conservazione si traduce in una singola condizione per il moto del sistema.

La quantità di moto è invece una grandezza vettoriale e può essere proiettata lungo gli assi coordinati del sistema di riferimento.

Quindi il suo principio di conservazione si trasforma in due o tre distinte condizioni (a seconda che si lavori nel piano o nello spazio) per il moto del sistema.

## ESERCIZI SUI SISTEMI DI PARTICELLE

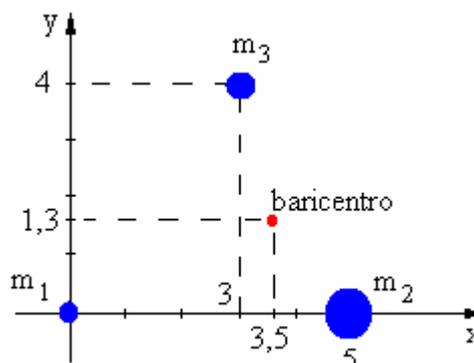
### Esercizio 22

Si considerino tre particelle aventi rispettivamente massa pari a

$$\begin{cases} m_1 = 5 \text{ kg} \\ m_2 = 15 \text{ kg} \\ m_3 = 10 \text{ kg} \end{cases}$$

e disposte come in figura.

Individuare la posizione del baricentro del sistema formato dalle tre masse.



### Soluzione

Applicando le (6-2) si ottiene

$$\begin{cases} x_B = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{5 \cdot 0 + 15 \cdot 5 + 10 \cdot 3}{5 + 15 + 10} = \frac{105}{30} = 3,5 \\ y_B = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{5 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 10 \cdot 4}{5 + 15 + 10} = \frac{40}{30} \cong 1,3 \end{cases}$$

Quindi il baricentro ha coordinate

$$B \equiv (3,5; 1,3)$$

Se le tre masse sono rigidamente collegate fra loro nella posizione indicata in figura (per esempio per mezzo di sottili barre metalliche aventi massa trascurabile), allora il sistema può essere schematizzato come consistente in un solo punto avente massa  $M = 30 \text{ kg}$ , posto nelle coordinate sopra indicate.

Si noti come tale punto non coincida con il baricentro del triangolo avente come vertici le tre masse. Ciò è dovuto al fatto che le tre masse hanno valori diversi.

Se avessero lo stesso valore (o se il triangolo fosse realizzato con una lastra di materiale omogeneo), allora la posizione del baricentro potrebbe essere calcolata anche ricorrendo a criteri geometrici (nel triangolo, come è noto, il baricentro coincide con il punto d'incontro delle mediane).

### Esercizio 23

Si abbiano tre particelle, posizionate come nella figura.

Le rispettive masse sono:

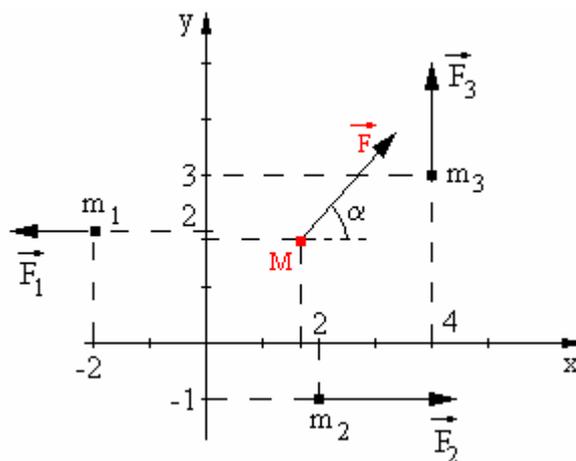
$$m_1 = 6 \text{ kg} \quad m_2 = 4 \text{ kg} \quad m_3 = 10 \text{ kg}$$

A queste particelle sono applicate rispettivamente le forze

$$\vec{F}_1 = 2 \text{ N} \quad \vec{F}_2 = 6 \text{ N} \quad \vec{F}_3 = 5 \text{ N}$$

orientate come in figura.

Determinare la posizione del baricentro del sistema da esse formato e la sua accelerazione.



### Soluzione

Calcoliamo la posizione del baricentro come nell'esercizio precedente

$$\begin{cases} x_B = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{6 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 + 10 \cdot 4}{6 + 4 + 10} = \frac{36}{20} = 1,8 \\ y_B = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{6 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 10 \cdot 3}{6 + 4 + 10} = \frac{38}{20} = 1,9 \end{cases}$$

La forza risultante ha come componenti

$$\begin{cases} F_x = -2 + 6 + 0 = 4 \\ F_y = 5 \end{cases}$$

Quindi il suo modulo è

$$\vec{F} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{16 + 25} \cong 6,4 \text{ N}$$

Per l'angolo  $\alpha$  si ha

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{5}{4} = 1,25 \quad \rightarrow \quad \alpha = \arctan 1,25 \cong 51^\circ 21'$$

Conoscendo la forza agente sul baricentro e la massa del sistema (in esso concentrata), possiamo applicare la seconda legge della dinamica per ottenere l'accelerazione del sistema (e quindi del baricentro)

$$a = \frac{F}{M} = \frac{6,4}{20} = 0,32 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Tale accelerazione sarà diretta nella stessa direzione della forza  $\vec{F}$ .

## Esercizio 24

Un'auto con una massa  $m = 1000 \text{ Kg}$  viaggia a  $72 \text{ Km/h}$ . Se il guidatore frena fermandosi in un tempo  $t = 10 \text{ sec}$ , quali sono la forza (costante) applicata durante la frenata, l'accelerazione (costante) cui è sottoposta, e lo spazio di frenata ?

## Soluzione

La velocità iniziale corrisponde a  $72/3,6 = 20 \text{ m/sec}$ .

Dalla  $F = ma$  si ricava

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$F = 1000 \frac{20}{10} = 2000 \text{ Newton}$$

Per l'accelerazione, si ha

$$F = ma$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2000}{1000} = 2 \text{ m/sec}^2$$

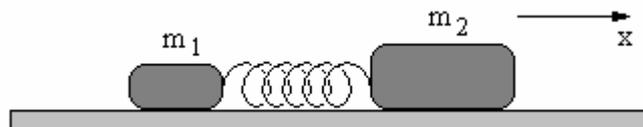
Infine, per lo spazio percorso (il moto è uniformemente decelerato)

$$s = vt - \frac{1}{2}at^2$$

$$s = 20 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 = 200 - 100 = 100 \text{ m}$$

## Esercizio 25

Due blocchi di massa  $m_1$  e  $m_2$  sono poggiati su un piano orizzontale, privo di attrito.



Sono tenuti insieme da una molla compressa e bloccati in quella posizione per mezzo di un filo.

Ad un certo istante il filo viene bruciato e la molla è libera di distendersi allontanando i due blocchi fra loro.

Descrivere il moto dei due blocchi.

## Soluzione

Non ci sono forze esterne (in realtà esiste la forza peso che però è sempre bilanciata dalla reazione del piano di appoggio, e quindi la sua risultante è nulla) e perciò la quantità di moto si deve conservare. Poiché la quantità di moto del sistema un istante prima che venga bruciato il filo è nulla, tale deve rimanere anche dopo che il filo viene bruciato.

Avendo fissato come direzione positiva per gli spostamenti (vedi figura) quella rivolta verso destra, il blocco di destra acquisterà un quantità di moto positiva, mentre il blocco di sinistra acquisterà una quantità di moto negativa.

Queste due quantità di moto devono essere uguali ed opposte, in modo che la quantità di moto di tutto il sistema continui a rimanere nulla.

Si ha

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$

Se per esempio le due masse hanno valori  $m_1 = 50 \text{ g}$ ,  $m_2 = 200 \text{ g}$  e la velocità del blocco di destra è  $v_2 = 20 \text{ m/s}$ , allora

$$v_1 = -\frac{200}{50} 20 = -80 \text{ m/s}$$

cioè il blocco di sinistra si muove in direzione opposta con velocità quattro volte maggiore.

Poiché non c'è attrito i due blocchi continueranno a muoversi con tali velocità con moto uniforme.

Si noti che il baricentro del sistema rimane fermo in ogni caso.

## CAP. 7 – GLI URTI

### 7-1. L'impulso e la quantità di moto

Quando due oggetti collidono fra loro, su ciascuno di essi agisce una forza relativamente grande per un intervallo di tempo generalmente molto breve rispetto alla durata del fenomeno che stiamo osservando.

Dalla seconda legge della dinamica si può ricavare

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F}dt = m d\vec{v}$$

Quindi possiamo scrivere

$$(7-1) \quad \vec{F}dt = d\vec{q}$$

La quantità nel primo membro prende il nome di **impulso della forza**, e corrisponde al prodotto della forza stessa per l'intervallo di tempo durante il quale essa agisce.

Questa forza è in genere variabile nel tempo, ma nelle applicazioni converremo spesso di considerarla costante.

L'impulso (che denoteremo con la lettera I) è un vettore avente la stessa direzione della forza e della quantità di moto, e sarà misurato in  $N \cdot sec$ .

Integrando ambo i membri della (7-1) si ha

$$(7-2) \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \vec{I} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1$$

Quando una particella dotata di una certa velocità ne urta un'altra (per esempio ferma), la quantità di moto della prima si trasforma, nell'intervallo di tempo dell'urto, in un impulso che trasmette la sua energia cinetica alla seconda particella.

Se le due particelle sono uguali (come vedremo nel paragrafo seguente) addirittura la prima di esse si ferma e la seconda acquista, attraverso l'impulso, tutta l'energia cinetica della prima.

Anche se l'energia cinetica in gioco ha un valore modesto, a causa del brevissimo intervallo di tempo dell'urto, la forza impulsiva che causa il trasferimento di energia può assumere valori molto elevati.

Si tenga infine presente che spesso in fisica si attribuisce al termine **urto** un significato molto più generico di quello che solitamente esso riveste nel linguaggio corrente.

Infatti si considera urto anche la situazione nella quale una particella elettricamente carica passa vicino ad un'altra (con carica uguale od opposta) e senza toccarla (come normalmente accade) l'interazione fra le cariche elettriche modificano le loro traiettorie.

Si considerano urti anche gli scontri fra galassie, in cui la miriade di corpi celesti che costituiscono una delle due, viene influenzata dalla vicinanza della miriade di corpi celesti che costituiscono la seconda. Anche se fisicamente non c'è alcun contatto fra i vari corpi celesti.

Per il momento comunque non ci occuperemo di queste situazioni estreme.

## 7-2. Urti elastici in una dimensione

Gli urto possono essere classificati in due tipi fondamentali: quelli **elastici** e quelli **anelastici**.

Quando una palla rimbalza in terra, si ha un urto elastico: una piccola parte dell'energia in ogni urto si trasforma in calore e quindi ad ogni rimbalzo si ha una piccola perdita di energia meccanica, e la palla pian piano diminuisce l'altezza massima che raggiunge.

Se l'urto fosse **perfettamente elastico** ogni volta tornerebbe alla stessa altezza continuando a rimbalzare all'infinito.

Al contrario se cade in terra un blocchetto di argilla, questo non rimbalza affatto e si ha l'urto **perfettamente anelastico**: l'energia meccanica si trasforma tutta in calore e in alterazione delle distanze fra le particelle e quindi della forma del blocchetto.

Fra questi due casi estremi ce ne sono infiniti altri intermedi, che rappresentano le situazioni reali nei fenomeni osservabili in natura.

**In ciascuna delle due forme di urto si ha la conservazione della quantità di moto**: se non intervengono forze esterne, la quantità di moto prima dell'urto è sempre uguale alla quantità di moto dopo l'urto.

Nell'urto elastico inoltre si ha anche la conservazione dell'energia meccanica.

Nell'urto anelastico invece, come abbiamo già detto in precedenza, l'energia meccanica non si conserva.

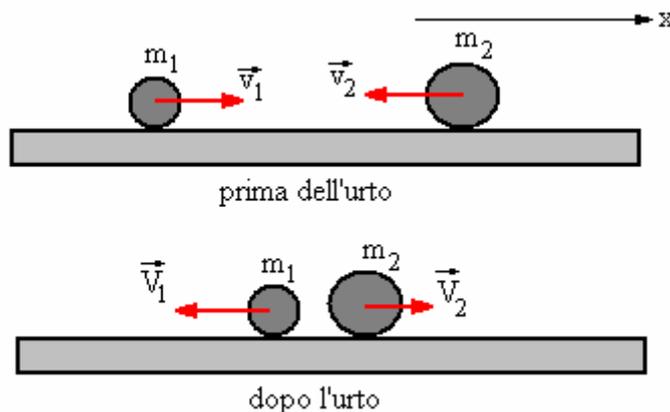
**La conservazione dell'energia meccanica si ha quindi solo per gli urti elastici.**

Cominciamo a studiare il comportamento di due particelle che si muovono senza attrito su un piano orizzontale, per esempio due sferette che si scontrano frontalmente.

Possiamo limitarci ad analizzare ciò che accade in una sola direzione: la retta che passa per i due punti di contatto delle sferette con il piano orizzontale.

Siano  $m_1$  e  $m_2$  le loro masse e  $v_1$  e  $v_2$  la loro velocità iniziali.

Quali saranno le loro velocità  $V_1$  e  $V_2$  dopo l'urto se tale urto è elastico ?



L'urto è elastico e quindi si devono conservare sia la quantità di moto che l'energia cinetica (per quanto riguarda l'energia potenziale, essa è costante perché le sferette si muovono su un piano orizzontale).

Possiamo scrivere allora che

$$(7-3) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \end{cases}$$

Semplifichiamo la prima equazione dividendo per  $1/2$  e raccogliamo a fattor comune nel modo seguente

$$\begin{cases} m_1(v_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2) \\ m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2) \end{cases}$$

Ora dividiamo membro a membro le due equazioni. Si ha

$$\frac{v_1^2 - V_1^2}{v_1 - V_1} = \frac{V_2^2 - v_2^2}{V_2 - v_2}$$

cioè

$$v_1 + V_1 = V_2 + v_2$$

$$(7-4) \quad V_2 = v_1 - v_2 + V_1$$

Sostituendo  $V_2$  nella seconda equazione delle (7-3), si ottiene

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 V_1 + m_2 (v_1 - v_2 + V_1) \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 V_1 + m_2 v_1 - m_2 v_2 + m_2 V_1 \\ m_1 v_1 + 2m_2 v_2 &= m_1 V_1 + m_2 v_1 + m_2 V_1 \\ V_1 (m_1 + m_2) &= (m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2 \end{aligned}$$

$$(7-5) \quad V_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

infine, sostituendo nella (7-4), si ha

$$(7-6) \quad V_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Ed abbiamo così determinato le velocità delle due sferette dopo l'urto.

Esaminiamo ora alcuni casi particolari:

1. Le sferette hanno massa uguale:  $m_1 = m_2$ . Le (7-5) e (7-6) forniscono  $\begin{cases} V_1 = v_2 \\ V_2 = v_1 \end{cases}$

Cioè le due sferette si scambiano le rispettive velocità.

2. Le sferette sono uguali ed una (la seconda per esempio) è inizialmente ferma ( $v_2 = 0$ ).  
In base al caso precedente, la prima sferetta dopo l'urto si ferma completamente, mentre la seconda acquista la velocità  $v_1$ .
3. Una singola sferetta urta contro una parete fissa (e non contro un'altra sferetta).  
In questo caso  $m_2 = \infty$  e il rapporto  $m_1/m_2 = 0$   
Allora dividendo numeratore e denominatore di  $V_1$  e  $V_2$  per  $m_2$ , le (7-5) e (7-6) forniscono

$$\begin{cases} V_1 = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) v_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = -v_1 \\ V_2 = \frac{2 \frac{m_1}{m_2} v_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = 0 \end{cases}$$

Cioè la sferetta rimbalza e torna indietro con velocità uguale e contraria.

E' infatti ciò che accade quando una palla rimbalza per terra o contro un muro.

4. Infine esaminiamo un ultimo caso interessante: supponiamo che sia  $m_2 \ll m_1$  (in modo che si abbia  $\frac{m_2}{m_1} \cong 0$ ).

Sostituendo nelle (7-5) e (7-6) si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \frac{\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)v_1 + 2\frac{m_2}{m_1}v_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \\ V_2 = \frac{\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)v_2 + 2v_1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \end{array} \right. \quad \text{cioè} \rightarrow \begin{cases} V_1 = v_1 \\ V_2 = 2v_1 \end{cases}$$

Cioè mentre la sferetta molto più grande prosegue indisturbata con velocità invariata, quella molto più piccola schizza via con velocità doppia di quella della sferetta grande.

In altre parole se per esempio un pallone da calcio colpisce frontalmente un TIR che avanza in direzione contraria con velocità di 30 Km/h, il pallone (qualunque fosse la sua velocità iniziale) rimbalza indietro con velocità di 60 Km/h.

### 7-3. Urti anelastici

Se l'urto è anelastico allora, come già detto, non si può applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica.

Continua però a valere il principio di conservazione della quantità di moto.

Se l'urto è completamente anelastico, dopo il contatto le due particelle rimangono a contatto fra di loro formando una massa unica.

Così, se prima dell'urto il sistema aveva una quantità di moto data dalla somma delle due singole quantità di moto, cioè

$$(7-7) \quad Q_{\text{iniziale}} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Dopo l'urto il sistema ha un'unica massa  $(m_1 + m_2)$  ed una nuova velocità  $V$

$$(7-8) \quad Q_{\text{finale}} = (m_1 + m_2)V$$

Uguagliando fra loro le (7-7) e (7-8) si ottiene

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V$$

$$(7-9) \quad V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

E' bene precisare che nel caso degli urti anelastici non ha alcuna importanza precisare se esso avviene in una o più dimensioni. E' sufficiente applicare la (7-9) e determinare la direzione di  $\vec{V}$  applicando la regola del parallelogramma alle due velocità  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .

## 7-4. Urti elastici in due dimensioni

Se le due sfere si urtano **non frontalmente** su di un piano orizzontale, il fenomeno si può studiare con lo stesso tipo di ragionamento, ma un po' più complicato algebricamente.

In una sola dimensione, la conoscenza delle due masse e delle due velocità iniziali erano sufficienti per determinare le due velocità dopo l'urto.

Quando le dimensioni sono due le incognite relative alle velocità sono quattro (una componente lungo l'asse x ed una lungo l'asse y, per ciascuna delle due velocità finali  $V_1$  e  $V_2$ ) mentre le equazioni disponibili sono tre (una derivante dall'applicazione della conservazione dell'energia, e due derivanti dall'applicazione della conservazione della quantità di moto che, essendo un vettore, può essere proiettata lungo gli assi coordinati).

Quindi tre equazioni e quattro incognite: il problema non può essere risolto.

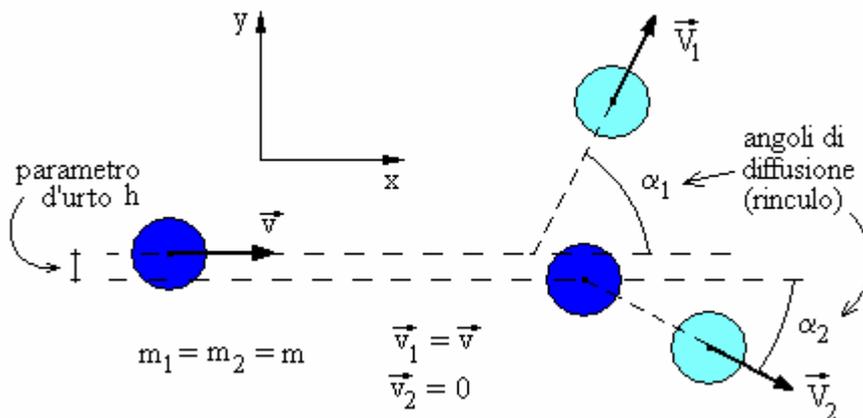
A meno che non si conosca anche un altro dato, per esempio l'angolo di rinculo  $\alpha$  di una delle due particelle che si urtano.

Risolviamo un problema tipico degli urti elastici, con alcune semplificazioni per non rendere la trattazione troppo pesante nei calcoli.

Supponiamo di avere due sferette aventi la stessa massa  $m$ , la prima con velocità  $\vec{v}_1$ , e la seconda ferma.

Supponiamo che **l'urto sia elastico ma non sia frontale**, ma (vedi figura nella pagina seguente) ci sia una distanza  $h$  fra la retta individuata dalla velocità  $\vec{v}_1$ , e la retta parallela passante per il centro della seconda sferetta.

Cioè in altre parole supponiamo che la seconda sfera sia "spizzata" dalla prima.



In blu sono indicate le sfere prima dell'urto, ed in celeste la posizione delle sfere dopo l'urto.

Indichiamo con  $\alpha_1$  e con  $\alpha_2$  gli angoli di rinculo, cioè gli angoli con cui le sfere vengono deviate rispetto alla direzione iniziale (e che vengono anche detti angoli di diffusione).

Cominciamo ad applicare la conservazione della quantità di moto.

Lungo l'asse x le componenti prima e dopo l'urto debbono essere uguali.

Avendo fissato gli assi coordinati come in figura, si ha

$$(7-10) \quad mv + 0 = mV_1 \cos \alpha_1 + mV_2 \cos \alpha_2$$

Analogamente lungo l'asse y, si ha

$$(7-11) \quad 0 + 0 = mV_1 \sin \alpha_1 - mV_2 \sin \alpha_2$$

Poiché l'urto è elastico si deve conservare anche l'energia cinetica. Quindi

$$(7-12) \quad \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}mV_2^2$$

Ora **supponiamo di conoscere anche l'angolo di diffusione  $\alpha_1$**  (oltre ad  $m$  e  $v$ ).

Restano incognite  $V_1$ ,  $V_2$  ed  $\alpha_2$ . Ma avendo tre equazioni e tre incognite, il sistema formato dalle (7-10), (7-11) e (7-12) può essere risolto.

Facendo i calcoli si ottiene

$$(7-13) \quad \begin{cases} v = V_1 \cos \alpha_1 + V_2 \cos \alpha_2 \\ V_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - V_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = 0 \\ v^2 = V_1^2 + V_2^2 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda delle (7-13) rispetto a  $V_1$

$$(7-14) \quad V_1 = V_2 \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_1}$$

sostituiamo questo risultato nella prima delle (7-13)

$$(7-15) \quad v = V_2 \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_1} \cos \alpha_1 + V_2 \cos \alpha_2$$

Infine sostituiamo le (7-14) e (7-15) nella terza equazione delle (7-13)

$$\left( V_2 \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_1} \cos \alpha_1 + V_2 \cos \alpha_2 \right)^2 = \left( V_2 \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_1} \right)^2 + V_2^2$$

semplifichiamo dividendo per  $V_2^2$

$$\left( \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_1} \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \right)^2 = \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_1} \right)^2 + 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_2}{\operatorname{sen}^2 \alpha_1} \cos^2 \alpha_1 + 2 \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_1} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_2}{\operatorname{sen}^2 \alpha_1} + 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_1 + 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \operatorname{sen}^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 = \operatorname{sen}^2 \alpha_2 + \operatorname{sen}^2 \alpha_1$$

Moltiplichiamo l'ultimo termine per  $\operatorname{sen}^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 = 1$

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen}^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_1 + 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \operatorname{sen}^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 = \\ & = \operatorname{sen}^2 \alpha_2 + \operatorname{sen}^2 \alpha_1 \operatorname{sen}^2 \alpha_2 + \operatorname{sen}^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 \end{aligned}$$

Dividiamo ambo i membri per  $\cos^2 \alpha_2$

$$\begin{aligned} & \tan^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_1 + 2 \cdot \tan \alpha_2 \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_1 + \operatorname{sen}^2 \alpha_1 = \\ & = \tan^2 \alpha_2 + \operatorname{sen}^2 \alpha_1 \tan^2 \alpha_2 + \operatorname{sen}^2 \alpha_1 \end{aligned}$$

Questa è un'equazione di secondo grado nell'unica incognita  $\tan \alpha_2$ .

Continuiamo a semplificare

$$\begin{aligned} & \tan^2 \alpha_2 (\cos^2 \alpha_1 - \operatorname{sen}^2 \alpha_1 - 1) + 2 \cdot \tan \alpha_2 \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_1 = 0 \\ & \begin{cases} \tan \alpha_2 = 0 \\ \tan \alpha_2 (\cos^2 \alpha_1 - \operatorname{sen}^2 \alpha_1 - 1) + 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La prima equazione fornisce la soluzione  $\alpha_2 = 90^\circ$ , mentre la seconda

$$\begin{aligned} \tan \alpha_2 &= \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_1}{1 - \cos^2 \alpha_1 + \operatorname{sen}^2 \alpha_1} \\ \tan \alpha_2 &= \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_1}{2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha_1} = \frac{\cos \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_1} = \operatorname{ctg} \alpha_1 \end{aligned}$$

Risulta quindi

$$(7-16) \quad \tan \alpha_2 = \operatorname{ctg} \alpha_1$$

Questo risultato è molto importante perché implica il fatto che **i due angoli  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono complementari**, cioè è sempre  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$ .

Questo risultato è stato ottenuto supponendo uguali le masse delle due sfere, di cui una ferma.

Questa particolare proprietà permise fra l'altro di verificare la teoria della relatività di Einstein.

Infatti se una particella "proiettile" ne colpisce un'altra ferma e la sua velocità è sufficientemente alta, per la teoria di Einstein la sua massa aumenta.

Ne deriva che l'angolo formato dalle due velocità dopo l'urto non è più di  $90^\circ$ . Il nuovo angolo (più piccolo) era correttamente interpretato e calcolato dalle formule della teoria della relatività.

## ESERCIZI SUGLI URTI

### Esercizio 26

Una stecca colpisce una palla di biliardo (nella parte centrale) avente una massa di 0,15 kg, esercitando una forza media di 40 N per un tempo di 10 msec. Qual è la velocità della palla dopo l'urto con la stecca ?

### Soluzione

Dalla (7-1) si ha

$$m\Delta v = F\Delta t$$

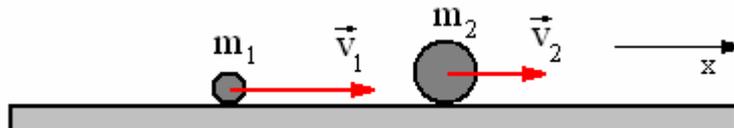
$$\Delta v = F \frac{\Delta t}{m}$$

cioè

$$\Delta v = 40 \frac{0,01}{0,15} = 40 \frac{1}{15} \cong 2,7 \text{ m/s}$$

### Esercizio 27

Una sfera avente una massa  $m_1 = 5 \text{ kg}$  ed una velocità  $v_1 = 3 \text{ m/s}$ , urta una seconda sfera avente una massa  $m_2 = 10 \text{ kg}$  e una velocità  $v_2 = 2 \text{ m/s}$ .



Dopo l'urto la seconda sfera viaggia nello stesso verso iniziale, con una velocità  $V_2 = 4 \text{ m/s}$ . Qual è la velocità  $V_1$  della prima sfera dopo l'urto ? Di quanto varia l'energia totale del sistema per effetto dell'urto ?

### Soluzione

Le quantità di moto del sistema prima e dopo l'urto sono

$$\begin{cases} q_{\text{iniziale}} = 5 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 35 \\ q_{\text{finale}} = 5 \cdot V_1 + 10 \cdot 4 = 5 \cdot V_1 + 40 \end{cases}$$

Esse devono essere uguali e quindi risulta

$$5 \cdot V_1 + 40 = 35$$

$$V_1 = -1 \text{ m/s}$$

Dunque la sfera  $m_1$  torna indietro rispetto alla propria velocità iniziale.

Ora rispondiamo alla seconda domanda.

Le energie cinetiche del sistema prima e dopo l'urto, sono

$$\begin{cases} T_{\text{iniziale}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = \frac{1}{2} 5 \cdot 9 + \frac{1}{2} 10 \cdot 4 = \frac{85}{2} \text{ J} \\ T_{\text{finale}} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_1 V_2^2 = \frac{1}{2} 5 \cdot 1 + \frac{1}{2} 10 \cdot 16 = \frac{165}{2} \text{ J} \end{cases}$$

La variazione di energia cinetica è allora

$$\Delta T = \frac{165}{2} - \frac{85}{2} = 40 \text{ J}$$

Poiché questo valore non è nullo, evidentemente l'urto non era elastico.

Infatti, ignorando la velocità  $V_2$  data dal problema ed utilizzando le formule (7-5) e (7-6) si ottengono come velocità finali dopo l'urto

$$\begin{cases} V_1 = \frac{5}{3} \cong 1,7 \text{ m/s} \\ V_2 = \frac{8}{3} \cong 2,7 \text{ m/s} \end{cases}$$

ben diverse dalle precedenti.

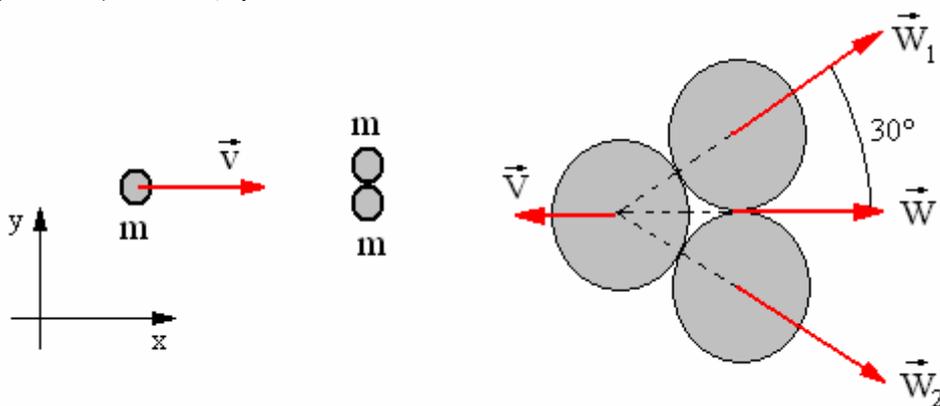
## Esercizio 28

Sono date tre sfere con uguale massa  $m$ , su di un piano orizzontale senza attrito.

La prima sfera viaggia verso destra (vedi figura) con velocità  $\vec{v} = 10 \text{ m/s}$ , mentre le altre due sono ferme, a contatto fra di loro.

La velocità della prima sfera è diretta verso il punto di contatto delle altre due.

Dopo l'urto (elastico) fra loro, quali sono le velocità di ciascuna sfera ?



## Soluzione

L'urto è elastico e quindi devono conservarsi sia la quantità di moto (lungo l'asse  $x$ ) che l'energia cinetica del sistema..

Osservando la figura ingrandita a destra, si nota che il vettore  $\vec{w}$  dovrebbe avere lunghezza doppia rispetto a quella disegnata, perché va riferito sia alla sfera superiore che a quella inferiore, ma è stato disegnato così per rendere evidente che possiamo scrivere

$$(7-17) \quad \frac{w}{w_1} = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad w_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} w$$

Ora applichiamo le leggi di conservazione

$$\begin{cases} mv + 0 + 0 = mV + mw + mw & (\text{lungo l'asse } x) \\ \frac{1}{2}mv^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mw^2 + \frac{1}{2}mw^2 \end{cases}$$

Cioè, semplificando,

$$\begin{cases} v = V + 2w \\ v^2 = V^2 + 2w^2 \end{cases}$$

Ricaviamo V dalla prima equazione

(7-18)

$$V = v - 2w$$

e sostituiamo nella seconda equazione

$$v^2 = (v - 2w)^2 + 2w^2$$

$$v^2 = v^2 - 4vw + 4w^2 + 2w^2$$

$$w = \frac{2}{3}v = \frac{20}{3}$$

Sostituendo nella (7-17) si ha

$$w_1 = w_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}w = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{20}{3} \cong \frac{40}{5,2} \cong 7,6 \text{ m/s}$$

e sono inclinate di  $30^\circ$  rispetto all'asse x. Per la  $\vec{V}$  si ha invece, sostituendo nella (7-18)

$$V = 10 - 15,2 = -5,2 \text{ m/s}$$

Ed infatti la sfera di sinistra dopo l'urto rimbalza indietro lungo l'asse x.

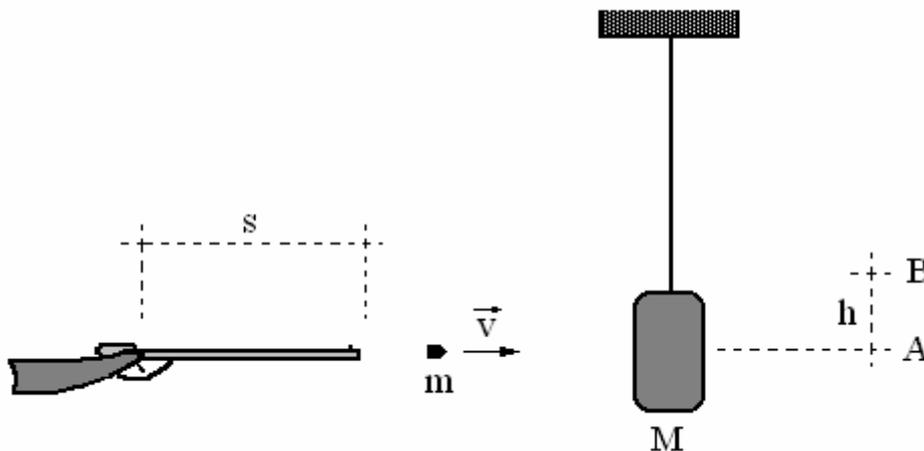
## Esercizio 29

Sia dato un fucile con una canna lunga  $s = 80$  cm che spara un proiettile con massa  $m = 30$  grammi.

Il colpo viene diretto contro un sacco di sabbia avente massa  $M = 40$  Kg.

Il proiettile ha con il sacco un urto anelastico. In seguito all'urto il sacco si sposta a raggiunga il punto B sollevandosi di 2 mm.

Si vuole sapere: la velocità  $v$  del proiettile, e la forza  $f$  che la carica imprime al proiettile.



## Soluzione

Un dispositivo del genere viene comunemente impiegato per calcolare le velocità dei proiettili e si chiama **pendolo balistico**.

Applichiamo il principio della conservazione della quantità di moto.

Indichiamo con  $v$  la velocità del proiettile e con  $V$  la velocità del sacco (con dentro il proiettile) dopo l'urto.

Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica.

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 + 0 = 0 + (M + m)gh$$

Nel primo membro c'è la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale del sistema costituito da pallottola e sacco (abbiamo considerato nulla l'energia potenziale nel punto A).

Nel secondo membro c'è invece la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale nel punto B (il sacco dopo l'impatto con il proiettile viene sollevato fino all'altezza B).

Misurando il dislivello  $h$  si può calcolare la velocità  $V$ , ricorrendo ad una nota formula di cinematica (vedi esempio 19, formula 5-16).

Risulta,

$$V^2 = 2gh$$

$$V = \sqrt{2gh}$$

Ora applichiamo il principio della conservazione della quantità di moto

$$mv + 0 = (M + m)V$$

$$v = \frac{M + m}{m} V = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}$$

andando a sostituire i valori numerici, otteniamo

$$v = \frac{40 + 0,03}{0,03} \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,002} = 1334 \cdot 0,2 = 267 \text{ m/s} = 961 \text{ Km/h}$$

Per rispondere alla seconda domanda osserviamo che all'interno della canna del fucile il proiettile si muove con moto uniformemente accelerato (possiamo considerare costante la forza  $\vec{F}$ ), e che l'impulso dato dalla forza corrisponde alla quantità di moto acquistata dal proiettile.

$$F\Delta t = m\Delta v$$

Per calcolare  $F$  occorre conoscere  $\Delta t$ , cioè quanto tempo impiega il proiettile ad uscire dalla canna.

Ricordando che il moto è uniformemente accelerato, valgono le formule

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}at^2 \\ v = at \end{cases}$$

da cui si ricava (eliminando la  $t$ ) e ricordando che la canna è lunga 80 cm,

$$v^2 = 2as$$

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{267^2}{2 \cdot 0,8} = 44556 \text{ m/s}^2$$

Infine si ha

$$\Delta t = \frac{v}{a} = \frac{267}{44556} = 0,006 \text{ sec}$$

cioè 6 millesimi di secondo.

E finalmente

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,03 \cdot 267}{0,006} = 1335 \text{ Newton}$$

Vale la pena notare che a parità di forza impressa al proiettile, usando una canna più lunga aumenta l'impulso e quindi anche la quantità di moto acquistata dal proiettile.

E' infatti noto che una stessa pallottola (avente quindi una carica esplosiva fissa), va molto più lontano (ha una gittata maggiore) se è sparata da un fucile piuttosto che da una pistola.

## CAP. 8 – SISTEMI RUOTANTI

### 8-1. Cinematica rotazionale

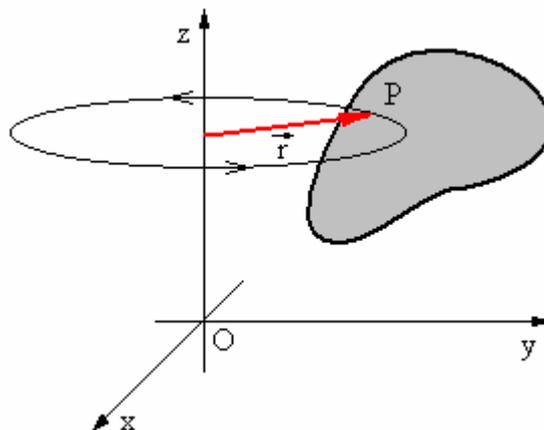
Prendiamo in considerazione un corpo rigido, cioè formato da particelle che hanno una distanza fissa fra di loro.

Finora abbiamo studiato cosa avviene nelle traslazioni del corpo: la sua massa può essere idealmente concentrata nel suo baricentro, ed in questo modo i suoi movimenti di traslazione possono essere analizzati facilmente.

Ma cosa avviene se il corpo rigido compie delle rotazioni attorno ad un'asse ?

Nella prima figura il corpo ruota attorno all'asse z ed il punto generico P del corpo descrive una circonferenza di raggio r.

Nella seconda figura è rappresentato solo il piano



parallelo al piano xy, che contiene il punto P.

Misurando l'angolo  $\theta$  in radianti, si ha

$$\theta = \frac{s}{r}$$

in cui s è la lunghezza dell'arco descritto dal punto P.

La velocità angolare fra due istanti  $t_1$  e  $t_2$  è

$$(8-1) \quad \omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

E rappresenta la velocità angolare media.

Come già fatto in cinematica (vedi formule 2-1 e 2-2), portando il ragionamento al limite, si ha la velocità angolare istantanea

$$(8-2) \quad \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Allo stesso modo (vedi formule 2-3 e 2-4), se la velocità angolare non è costante, si ha una

accelerazione angolare  $\alpha$  fra due istanti generici  $t_1$  e  $t_2$

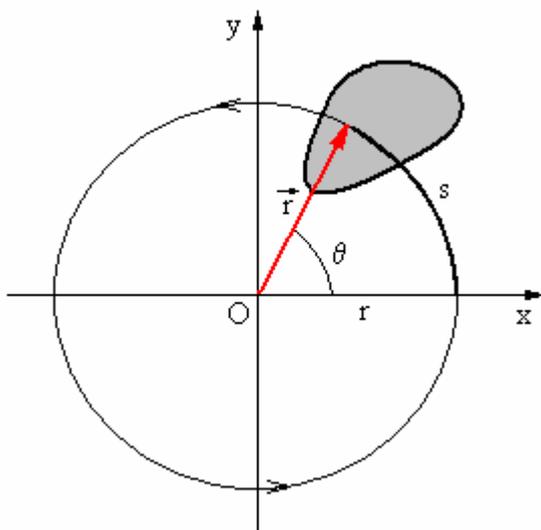
$$(8-3) \quad \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

e portando ancora il ragionamento al limite, si ha l'accelerazione angolare istantanea

$$(8-4) \quad \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Si noti che **la velocità angolare e l'accelerazione angolare del punto generico P del corpo, non dipendono dal raggio r, e quindi hanno lo stesso valore per tutti i punti del corpo.**

La velocità angolare si misura in rad/sec, mentre l'accelerazione angolare si misura in rad/sec<sup>2</sup>.



Notiamo infine la stretta corrispondenza che esiste fra le traslazioni e le rotazioni.

Nelle traslazioni	Nelle rotazioni
Alle lunghezze $l$	Corrispondono gli angoli $\theta$
Ai tempi $t$	Corrispondono i tempi $t$
Alle velocità $v$	Corrispondono le velocità angolari $\omega$
Alle accelerazioni $a$	Corrispondono le accelerazioni angolari $\alpha$
Alla formula $s = s_0 + vt$	Corrisponde la formula $\theta = \theta_0 + \omega t$
Alla formula $v = v_0 + at$	Corrisponde $\omega = \omega_0 + \alpha t$
Alla formula $s = s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$	Corrisponde $\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
Alla formula $v^2 = 2as$	Corrisponde $\omega^2 = 2\alpha\theta$

## 8-2. Momento di un vettore

Nel paragrafo precedente abbiamo visto molte corrispondenze fra le grandezze fisiche associate alle traslazioni e le grandezze fisiche associate alle rotazioni.

Vediamo ora quale grandezza fisica può essere associata ad una forza quando un corpo è vincolato a ruotare attorno ad un'asse.

Sia dato un vettore  $\vec{F}$  ed un'asse di rotazione.

Il piano  $\pi$  è normale all'asse di rotazione.

Il vettore  $\vec{r}$  va dal punto in cui l'asse di rotazione taglia il piano  $\pi$  al punto di applicazione di  $\vec{F}$ .

La distanza  $r_{\perp}$  si chiama

**braccio della forza.**

Definiamo **momento**  $\vec{M}$  della forza, il vettore associato (vedi paragrafo 1-3) al prodotto vettoriale

$$(8-5) \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Il vettore  $\vec{M}$  personificato deve vedere la forza  $\vec{F}$  ruotare in verso antiorario.

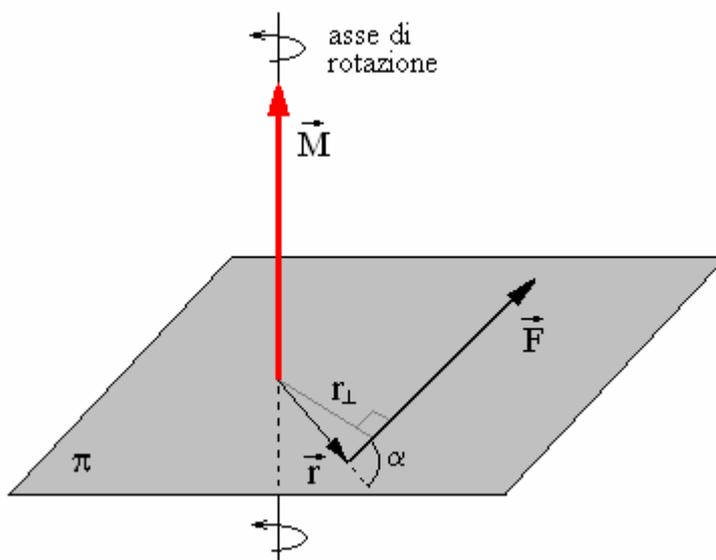
La lunghezza del vettore  $\vec{M}$  è

$$(8-6) \quad M = rF \sin\alpha = r_{\perp} F$$

Perché abbiamo introdotto questa nuova grandezza vettoriale: il momento di una forza?

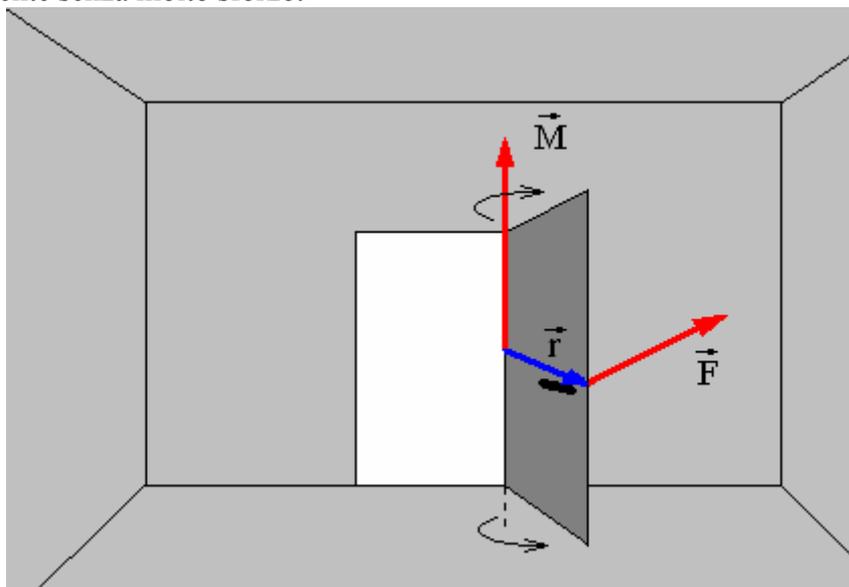
Perché quando un corpo è vincolato a ruotare intorno ad un'asse, non basta sapere se una forza agisce sul corpo. Ha molta importanza anche la conoscenza di quale sia il punto in cui questa forza è applicata.

Più precisamente è molto importante sapere a quale distanza dall'asse di rotazione si trovi il punto di applicazione della forza.



Facciamo un esempio concreto.

Si abbia una porta ed applichiamo una forza sulla maniglia della porta per aprirla. L'operazione riuscirà agevolmente senza molto sforzo.



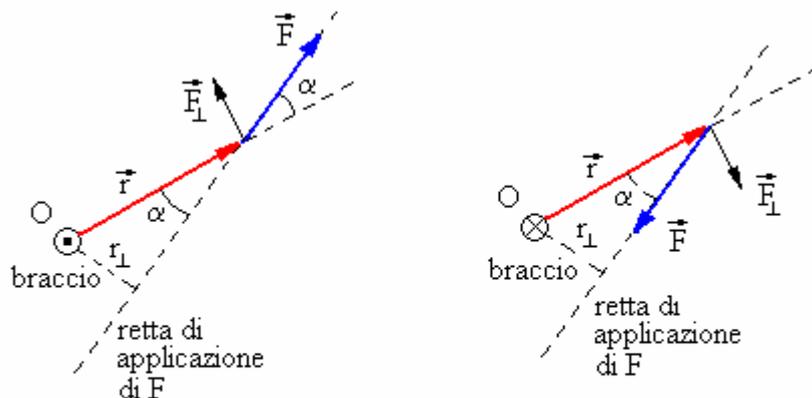
Ma se tentiamo di aprire la porta spingendola in un punto molto vicino all'asse di rotazione, ci accorgeremo che occorre applicare una forza molto maggiore per raggiungere lo stesso effetto precedente.

Il momento che abbiamo definito con la (8-5) è una grandezza che tiene conto appunto delle due diverse situazioni.

Al limite, se spingiamo la porta applicando una forza sull'asse di rotazione, non riusciremo mai ad aprirla. In questo caso il momento è nullo perché è nullo il braccio della forza.

**Il momento di una forza è la grandezza fisica che occorre associare alla forza nelle rotazioni.**

Nella rappresentazione grafica (vedi figura seguente) adottiamo la convenzione di rappresentare i vettori normali al foglio in due modi diversi a seconda che entrino nel foglio o che ne escano.



⊗ vettore  $\vec{M}$  che entra nel foglio

⊙ vettore  $\vec{M}$  che esce dal foglio

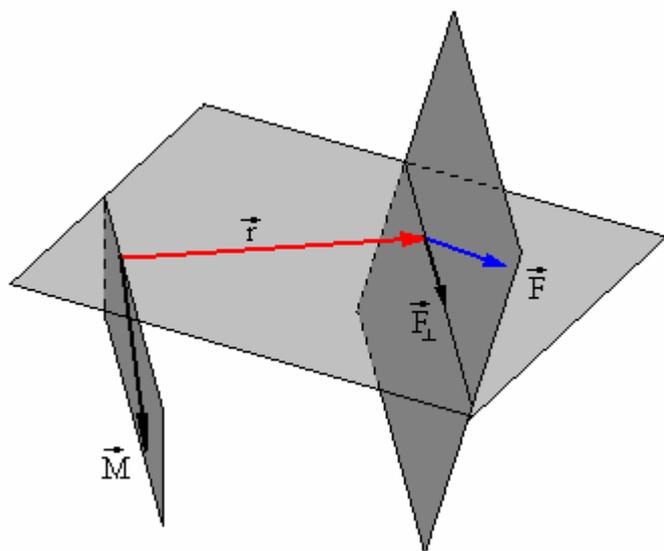
In entrambi i casi il momento è dato da

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{cioè} \quad M = r_{\perp} F = r F \sin \alpha$$

Ma mentre nella figura a sinistra il vettore  $\vec{M}$  esce dal foglio, nella figura a destra  $\vec{M}$  ha verso contrario ed entra nel foglio.

Un tondino con un punto centrale simboleggia il vettore che esce dal foglio, mentre un tondino con una crocetta simboleggia il vettore che entra nel foglio.

Anche in seguito adotteremo questa comoda convenzione per rappresentare vettori normali al piano del foglio.



Si noti che nei due esempi precedenti il vettore  $\vec{r}$ , la forza  $\vec{F}$  ed il punto O giacciono su uno stesso piano: il piano del foglio.

Però potrebbe anche avvenire che il punto O non appartenga al piano individuato da  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ .

In questo caso, senza alcuna modifica, basta proiettare per esempio la forza  $\vec{F}$  sul piano individuato da O ed  $\vec{r}$ , ottenendo  $\vec{F}_\perp$  giacente su quel piano e normale a  $\vec{F}$ .

Cerchiamo altre corrispondenze fra moti traslatori e moti rotatori.

Un corpo libero non è soggetto ad

accelerazioni se la risultante delle forze applicate su di esso è nulla.

Allo stesso modo un corpo vincolato a ruotare attorno ad un'asse non è soggetto ad accelerazioni angolari se la risultante dei momenti delle forze applicate è nulla.

Infatti nella figura a fianco la forza  $\vec{F}_1$  risulta minore di

$\vec{F}_2$ , ma ciononostante le azioni delle due forze si equilibrano esattamente perché i loro due momenti sono uguali ed opposti.

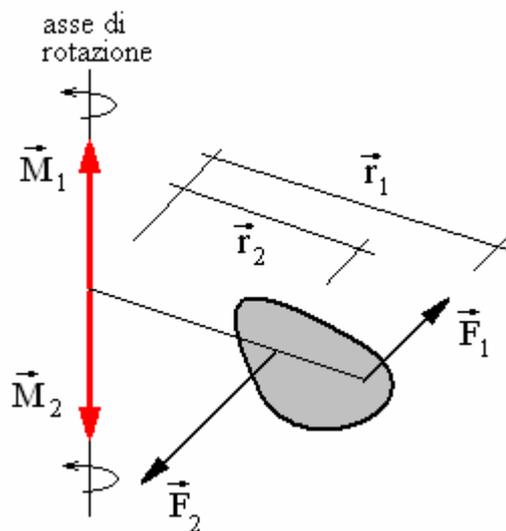
Il vettore  $\vec{R}_1$  è maggiore di  $\vec{R}_2$  e risulta

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 0$$

Quindi

$$\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$$

I due momenti hanno segno opposto ed infatti mentre la forza  $\vec{F}_1$  tende a far ruotare il corpo in verso orario, la forza  $\vec{F}_2$  tende a farlo ruotare in verso antiorario e perciò il vettore  $\vec{M}_2$  è rivolto verso il basso.



### 8-3. Momento di una coppia

Resta da fare una precisazione.

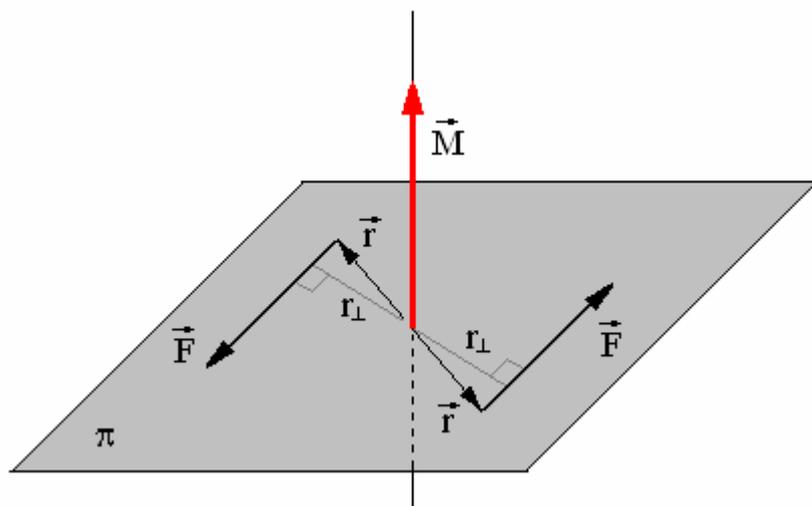
Se ad un corpo è associata **una coppia di forze uguali ed opposte**, si dice semplicemente che al corpo è applicata **una coppia**.

Una coppia di forze ha come effetto quello di far ruotare il corpo.

Il momento prodotto da una coppia è esattamente il doppio di quello prodotto da una di esse.

Infatti entrambe le forze tendono a far ruotare il corpo nello stesso verso, e quindi i due momenti si sommano e non si annullano.

E' facile convincersi (basta osservare la figura a fianco), che il momento della coppia è



dato dal prodotto del braccio  $d$  (dove  $d$  è la distanza fra le due rette di applicazione delle due forze) per una delle due forze. Cioè

$$(8-7) \quad \vec{M} = 2(\vec{r} \times \vec{F}) \quad \text{cioè} \quad M = 2(r_{\perp} F) = dF$$

Il concetto di coppia è per esempio spesso impiegato per descrivere l'efficacia di un motore (che è costituito da un'asse rotante) o di un dispositivo di demoltiplica in un ingranaggio.

### 8-4. Il momento angolare e momento d'inerzia

Dunque nelle rotazioni ad una **forza** corrisponde il **momento della forza**.

Anche la **quantità di moto** ha una grandezza corrispondente nelle rotazioni. E' il **momento della quantità di moto**, detta anche **momento angolare**.

E' anch'essa un vettore e viene indicata con il simbolo  $\vec{p}$ .

$$(8-8) \quad \vec{p} = \vec{r} \times \vec{q}$$

Si può anche scrivere

$$\vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

cioè (se  $\vec{r}$  è perpendicolare a  $\vec{v}$ , tralasciando la notazione vettoriale, e ricordando che  $v = \omega r$ )

$$(8-9) \quad p = mr^2\omega$$

La grandezza

$$(8-10) \quad I = mr^2$$

prende il nome di **momento d'inerzia**. Si può scrivere allora

$$(8-11) \quad p = mr^2\omega = I\omega$$

Se il corpo non è costituito da una singola particella, le (8-10) e (8-11) diventano rispettivamente

$$(8-12) \quad I = \sum mr^2$$

$$(8-13) \quad p = \sum mr^2\omega = I\omega$$

Inoltre dalla (7-1) sappiamo che la seconda legge della dinamica comporta che sia

$$\vec{F}dt = d\vec{q}$$

Allo stesso modo, per le rotazioni, si ha la formula corrispondente

$$(8-14) \quad \vec{M}dt = d\vec{p} \quad \text{o anche} \quad \vec{M} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Quindi la derivata del momento angolare corrisponde al momento delle forze applicate.

Il momento angolare risultante di tutte le forze esterne agenti su un sistema (rigido o no) può essere calcolato rispetto al baricentro.

Quindi possiamo affermare che, se  $\vec{F}$  è la risultante di tutte le forze esterne applicate ad un sistema, ed  $\vec{M}$  è la risultante di tutti i momenti delle forze esterne, allora rispetto al baricentro deve risultare

$$(8-15) \quad \begin{cases} \vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \\ \vec{M} = \frac{d\vec{p}}{dt} \end{cases}$$

## 8-5. Energia cinetica di rotazione

Si abbia un corpo **rigido**, in cui le singole particelle mantengono fisse le proprie posizioni reciproche. Quando il corpo ruota attorno ad un'asse, tutte le sue particelle hanno la stessa velocità angolare  $\omega$ . L'energia cinetica totale del corpo è allora (ricordando la 8-12)

$$(8-16) \quad T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Questa energia cinetica è dovuta alla sola rotazione e viene appunto detta **energia cinetica rotazionale**.

Facendo un confronto fra l'energia cinetica dovuta alle traslazioni (vedi formula 4-8) e quella dovuta alle rotazioni (la 8-16)

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

si può notare che **nelle rotazioni alla massa corrisponde il momento d'inerzia**.

La cosa è anche intuitivamente interpretabile immediatamente: se tentiamo di mettere in rotazione un oggetto molto pesante, per esempio una ruota di automobile (libera di girare), ci accorgiamo che occorre compiere una certa fatica, ed altrettanta ne serve per fermarla una volta messa in rotazione. Questo effetto è tanto più marcato quanto più alto è il momento d'inerzia della ruota.

In altre parole, **mentre la massa è una grandezza legata all'inerzia traslazionale, il momento d'inerzia è una grandezza legata alla inerzia rotazionale**.

Possiamo aggiungere una ulteriore importante corrispondenza fra le traslazioni e le rotazioni.

Alla seconda legge della dinamica

$$(8-17) \quad F = m a \quad \text{corrisponde la formula} \quad \tau = I \alpha$$

dove  $\tau$  è il **momento torcente** della forza  $F$  ed  $\alpha$  l'accelerazione angolare.

## 8-6. Momenti d'inerzia di alcuni corpi

Nel caso di corpi costituiti da una distribuzione continua di materia (e non da un insieme di masse puntiformi distinte), l'operazione di somma che compare nella (8-12) si trasforma in una integrazione.

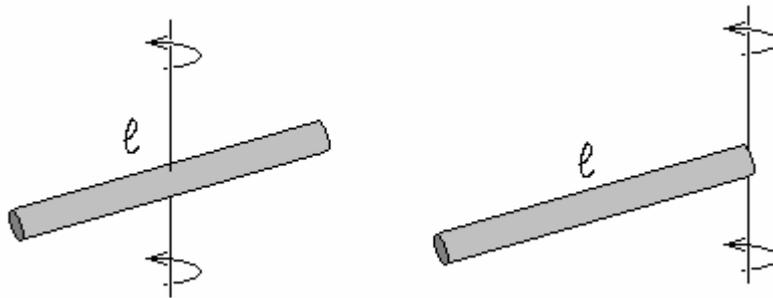
Il corpo viene suddiviso in masse infinitesime  $dm$ , la distanza della generica massa infinitesima dall'asse di rotazione è  $r$ , e l'integrale esteso all'intero corpo è

$$(8-18) \quad I = \int r^2 dm$$

Tale calcolo è in genere molto laborioso. Ma se il corpo preso in considerazione ha una forma regolare e possiede delle simmetrie, il calcolo del momento d'inerzia risulta leggermente più semplice.

Forniamo qui di seguito il momento d'inerzia di alcuni corpi aventi varie forme abbastanza comuni.

### Sbarretta sottile di lunghezza $l$



1. Attorno ad un asse passante per il baricentro e normale alla sbarretta

$$I = \frac{1}{12} M l^2$$

2. Attorno ad un asse passante per un estremo della sbarretta e normale alla stessa

$$I = \frac{1}{3} M l^2$$

### Cilindro circolare di lunghezza $l$ e raggio $R$

1. Attorno all'asse passante per il baricentro e normale all'asse del cilindro

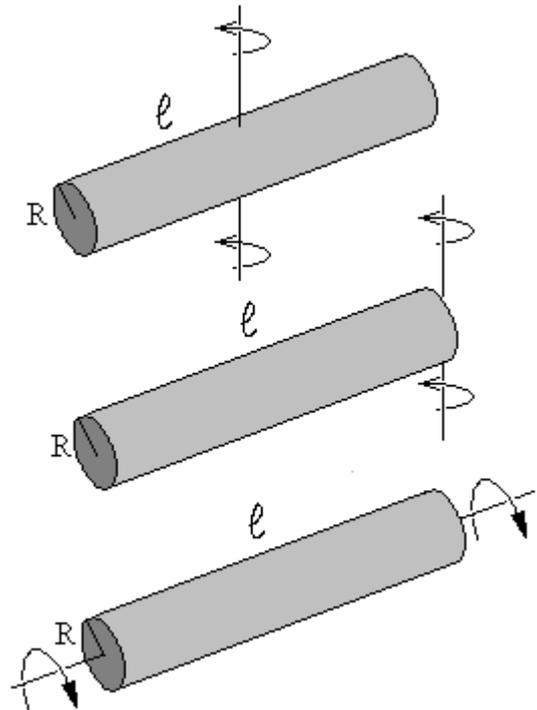
$$I = \frac{1}{12} M (\ell^2 + 3R^2)$$

2. Attorno ad un asse passante per il centro di una base e normale all'asse del cilindro

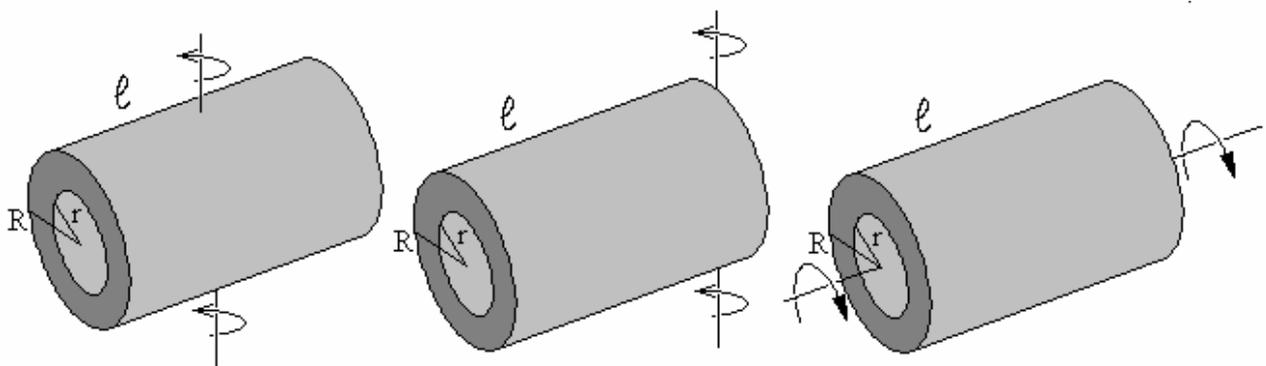
$$I = \frac{1}{12} M (4\ell^2 + 3R^2)$$

3. Attorno ad un asse del cilindro

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



### Cilindro circolare vuoto di raggi $R$ ed $r$



1. Attorno all'asse passante per il baricentro e normale all'asse del cilindro

$$I = \frac{1}{12} M (\ell^2 + 3R^2 + 3r^2)$$

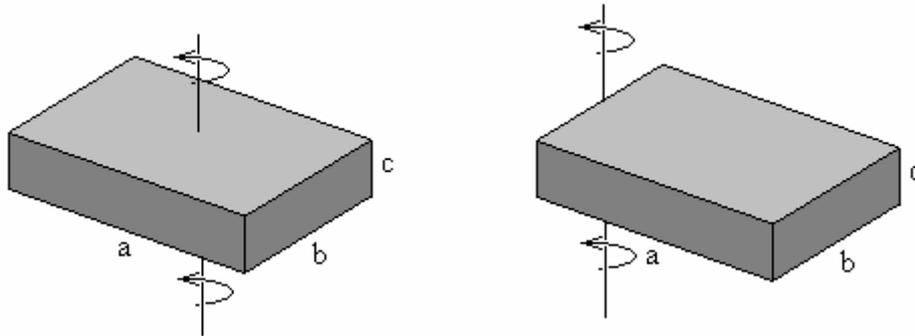
2. Attorno ad un asse passante per il centro di una base e normale all'asse del cilindro

$$I = \frac{1}{12} M (4\ell^2 + 3R^2 + 3r^2)$$

3. Attorno ad un asse del cilindro

$$I = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2)$$

## Parallelepipedo di lati a, b, c



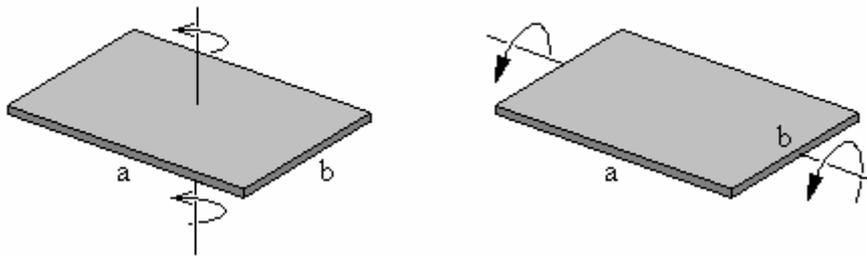
1. Attorno ad un asse passante per il baricentro della faccia ab e normale ad essa

$$I = \frac{1}{2} M(a^2 + b^2)$$

2. Attorno ad un asse passante per il baricentro della faccia bc e normale agli spigoli a e b

$$I = \frac{1}{2} M(a^2 + 4b^2)$$

## Lastra sottile rettangolare di lati a e b



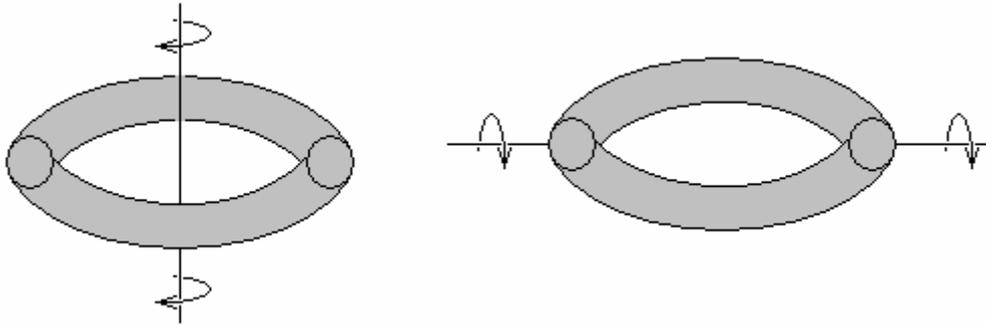
1. Attorno ad un asse passante per il baricentro della faccia ab e normale ad essa

$$I = \frac{1}{2} M(a^2 + b^2)$$

2. Attorno ad un asse passante per il baricentro della faccia bc e parallelo allo spigolo a

$$I = \frac{1}{12} Mb^2$$

### Toro con raggio interno $r$ ed esterno $R$



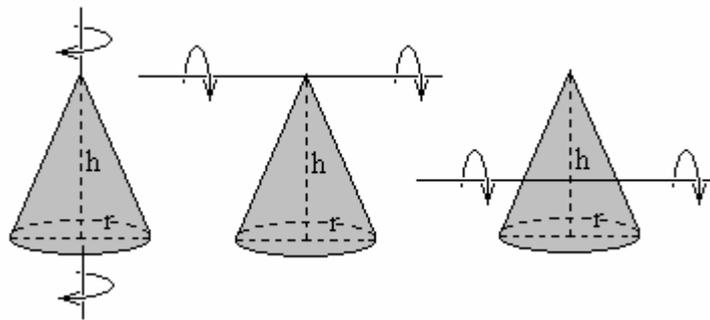
1. Attorno ad un asse passante per il baricentro e normale al piano del toro

$$I = \frac{1}{4} M (7R^2 - 6Rr + 3r^2)$$

2. Attorno ad un asse passante per il baricentro ed appartenente al piano del toro

$$I = \frac{1}{4} M (9R^2 - 10Rr + 5r^2)$$

### Cono circolare con raggio di base $r$ ed altezza $h$



1. Attorno all'asse del cono

$$I = \frac{3}{10} Mr^2$$

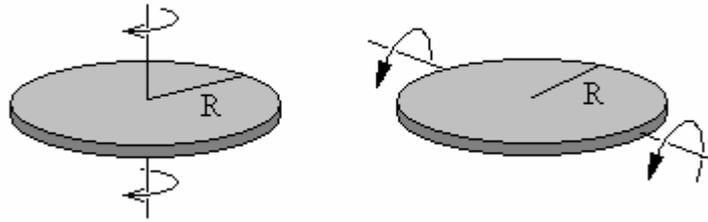
2. Attorno all'asse passante per il vertice e normale all'asse del cono

$$I = \frac{3}{20} M (r^2 + 4h^2)$$

3. Attorno all'asse passante per il baricentro e normale all'asse del cono

$$I = \frac{3}{80} M (4r^2 + h^2)$$

## Lastra circolare di raggio R



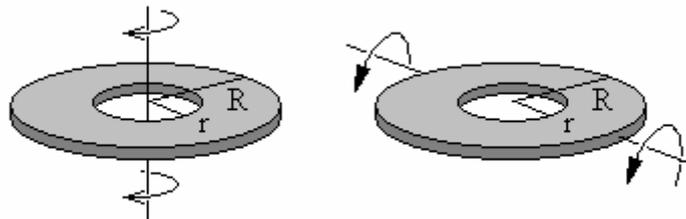
1. Attorno ad un asse passante per il centro e normale alla lastra

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

2. Attorno ad un asse coincidente con un diametro

$$I = \frac{1}{4} MR^2$$

## Lastra circolare forata con raggio interno r ed esterno R



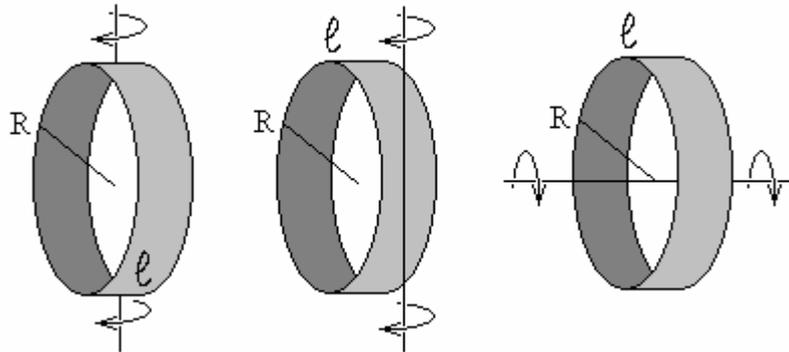
1. Attorno ad un asse passante per il centro e normale alla lastra

$$I = \frac{1}{2} M(R^2 + r^2)$$

2. Attorno ad un asse coincidente con un diametro

$$I = \frac{1}{4} M(R^2 + r^2)$$

## Nastro circolare sottile di raggio R



1. Attorno all'asse passante per il centro e normale all'asse di simmetria

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

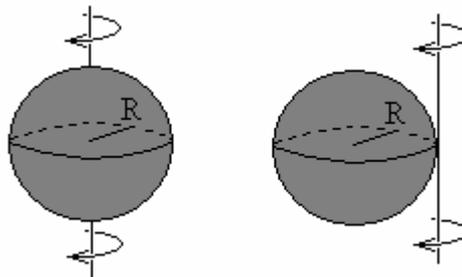
2. Attorno all'asse tangente ad un punto mediano del nastro e normale all'asse di simmetria

$$I = \frac{3}{2} MR^2$$

3. Attorno all'asse di simmetria

$$I = MR^2$$

## Sfera piena di raggio R



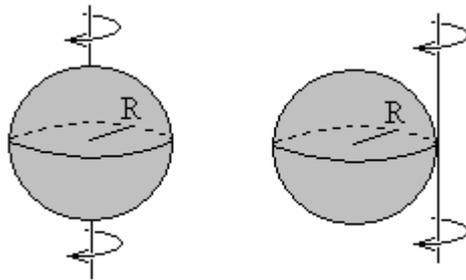
1. Attorno ad un asse passante per il centro

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

2. Attorno ad un asse tangente alla superficie

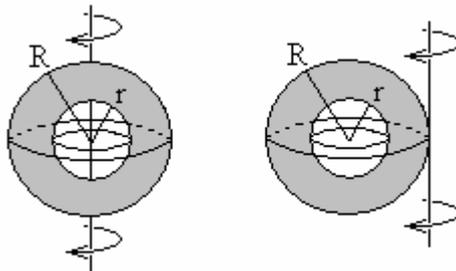
$$I = \frac{7}{5} MR^2$$

## Sfera vuota di raggio R



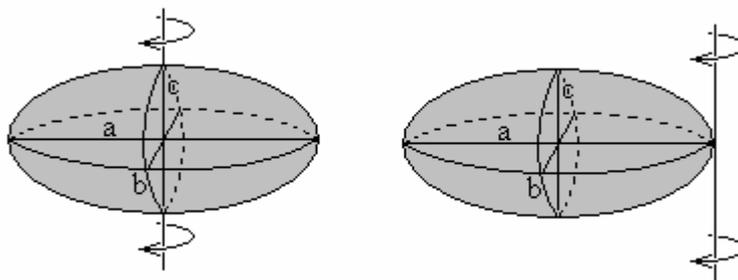
1. Attorno ad un asse passante per il centro  
 $I = MR^2$
2. Attorno ad un asse tangente alla superficie  
 $I = 2MR^2$

## Sfera scavata con raggi interno r ed esterno R



1. Attorno ad un asse passante per il centro  
$$I = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$$
2. Attorno ad un asse tangente alla superficie esterna  
$$I = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} + MR^2$$

## Ellissoide con semiassi a, b, c



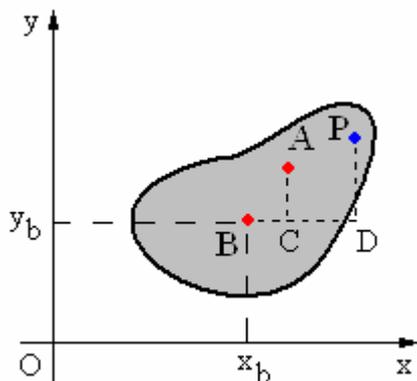
1. Attorno ad un asse coincidente con il semiasse c

$$I = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2)$$

2. Attorno ad un asse tangente alla superficie, parallelo al semiasse c, a distanza a dal centro

$$I = \frac{1}{5} M (6a^2 + b^2)$$

## 8-7. Teorema degli assi paralleli per i momenti d'inerzia



Si abbia un corpo di massa  $M$  che ruota attorno ad un asse che passa per il proprio baricentro: ad esso è associato un opportuno momento d'inerzia  $I_B$ .

Ci proponiamo di trovare una formula che ci fornisca il momento d'inerzia rispetto ad un altro asse qualsiasi parallelo all'asse precedente.

La figura a fianco rappresenta la sezione di un piano che passa per il baricentro ed è normale ad entrambi gli assi.

Il punto  $B$  è la traccia dell'asse di rotazione che passa per il baricentro, mentre il punto  $A$  è la traccia di un secondo asse di rotazione generico, parallelo al precedente.

Il punto  $P$  è invece una particella generica del corpo, di massa  $m$ .

Sia

$$BC = a$$

$$AC = b$$

$$BD = x_i$$

$$PD = y_i$$

Risulta essere

$$\overline{AB}^2 = h^2 = a^2 + b^2$$

$$\overline{PB}^2 = (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2$$

Il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione passante per  $A$  è

$$I = \sum m_i \overline{AP}^2 = \sum m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

Sviluppando si ottiene

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i (x_i^2 - 2ax_i + a^2 + y_i^2 - 2by_i + b^2) = \\ &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum m_i x_i - 2b \sum m_i y_i + (a^2 + b^2) \sum m_i = \\ &= I_B + 0 + 0 + h^2 M \end{aligned}$$

I due termini intermedi sono nulli perché la media delle distanze di ciascuna particella rispetto al baricentro è nulla, ed allora si ha  $\sum m_i x_i = \sum m_i y_i = 0$ . Mentre il primo termine non è altro che il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse passante per il baricentro B.

Quindi risulta

$$(8-19) \quad I = I_B + Mh^2$$

Questa formula, molto semplice, permette di ottenere rapidamente molti momenti d'inerzia. Del resto essa (come si può constatare) è già stata applicata più volte nel formulario fornito nel paragrafo precedente.

## 8-8. Rotolamento di un corpo rigido

Se un corpo rigido oltre ad una rotazione è sottoposto anche ad una traslazione, per esempio una ruota che rotola su un piano, allora occorre integrare i concetti precedenti nel modo seguente.

Nella figura a fianco si ha un cilindro pieno che rotola appunto su un piano orizzontale.

In ogni istante la regione di contatto con il piano è ferma perché non vi è slittamento, e tutto il cilindro nell'istante considerato ruota attorno al punto A.

La retta passante per A e normale al foglio viene chiamata **asse istantaneo di rotazione**.

La velocità del punto B attorno ad A coincide (a parte il segno) con la velocità del punto A attorno a B. Quindi anche la velocità angolare  $\omega$  del punto B attorno ad A è coincidente con quella di A attorno a B.

Ora, per quanto detto nel capitolo 8-5 l'energia cinetica di rotazione rispetto all'asse istantaneo è

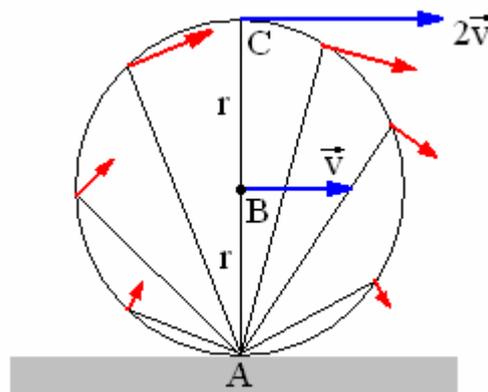
$$(8-20) \quad T = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

dove  $I_A$  è il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse istantaneo passante per A.

Essendo  $I = \frac{1}{2} MR^2$  il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse passante per B, ricordando il teorema degli assi paralleli (8-19), si ha

$$(8-21) \quad T = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2} (I + MR^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2$$

In cui il primo termine è l'energia cinetica di rotazione del cilindro intorno al proprio baricentro B, mentre il secondo termine è l'energia cinetica di traslazione del baricentro.



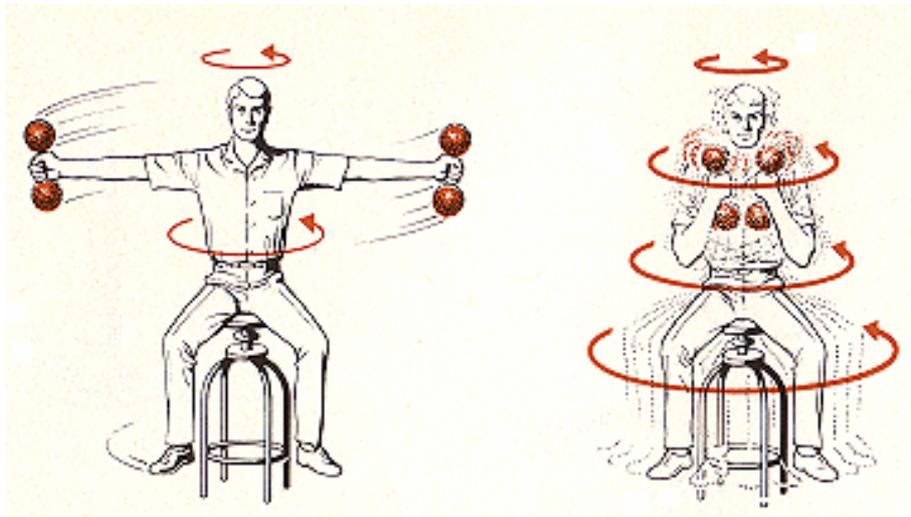
Quindi la rotazione attorno al baricentro **B**, più una rotazione attorno a **B**, equivalgono ad una semplice rotazione attorno all'asse istantaneo di rotazione **A**.

E' questa un'altra importante caratteristica del baricentro di un corpo.

## 8-9. Conservazione del momento angolare

Si abbia un corpo in semplice rotazione intorno a se stesso, come per esempio il ragazzo seduto su uno sgabello girevole, che ruota dopo essersi dato una piccola spinta, reggendo nelle mani due manubri pesanti.

Se trascuriamo gli attriti, il ragazzo costituisce un corpo in rotazione sul quale non agiscono forze esterne (la forza di gravità è bilanciata dalla reazione vincolare dello sgabello), e quindi non ci sono momenti dovuti a forze esterne.



Dalla seconda delle (8-15) sappiamo che  $\vec{M} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  e nel nostro caso, essendo  $\vec{M} = 0$ , risulta che

$\vec{p} = \text{cost}$  e cioè (vedi 8-13)

$$(8-22) \quad p = I\omega = \text{cost}$$

Ora, supponiamo che il ragazzo, come mostrato nelle due figure, modifichi il proprio momento d'inerzia distendendo le braccia in fuori o raccogliendole vicino al corpo. Con le braccia distese in fuori **il momento d'inerzia  $I_1$  è grande**, mentre con le braccia raccolte vicino al corpo **il momento d'inerzia  $I_2$  è più piccolo** (i due manubri pesanti servono appunto a rendere più evidente la variazione del momento d'inerzia)

Ciò significa che modificando la  $I$  nella (8-22), il prodotto deve rimanere costante, e si deve modificare in conseguenza anche la velocità angolare  $\omega$ .

E precisamente in corrispondenza **dell'aumento di  $I$**  si avrà una **diminuzione di  $\omega$** , mentre in corrispondenza di della diminuzione di  $I$  si avrà un aumento di  $\omega$ .

Cioè

$$(8-23) \quad I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = \text{cost}$$

In altre parole quando il ragazzo accosta le mani al proprio corpo, comincia a girare più rapidamente intorno a se stesso. Al contrario quando le distende in fuori la sua velocità angolare rallenta.

Questo effetto viene per esempio sfruttato anche dai tuffatori che eseguono delle capriole in aria: durante il tuffo stanno raggomitolati su se stessi e ruotano velocemente, ma qualche istante prima di toccare la superficie dell'acqua si distendono e la loro velocità angolare rallenta rapidamente consentendo loro di attraversare la superficie del liquido in posizione perfettamente verticale.

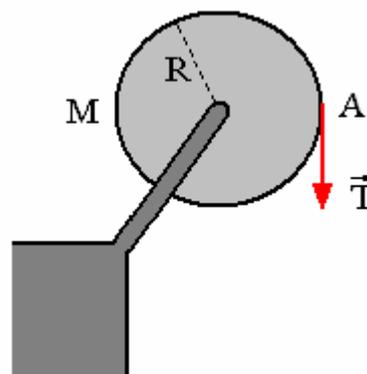
## ESERCIZI SUI SISTEMI RUOTANTI

### Corrispondenze da ricordare:

Nelle traslazioni	Nelle rotazioni
Alle lunghezze $l$	Corrispondono gli angoli $\theta$
Alle velocità $v = \frac{dx}{dt}$	Corrispondono le velocità angolari $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Alle accelerazioni $a = \frac{dv}{dt}$	Corrispondono le accelerazioni angolari $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Alla formula $s = s_0 + vt$	Corrisponde la formula $\theta = \theta_0 + \omega t$
Alla formula $v = v_0 + at$	Corrisponde $\omega = \omega_0 + \alpha t$
Alla formula $s = s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$	Corrisponde $\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
Alla formula $v^2 = 2as$	Corrisponde $\omega^2 = 2\alpha\theta$
Alla massa $m$	Corrisponde il momento d'inerzia $I$
Alla forza $F=ma$	Corrisponde il momento meccanico $\tau = I\alpha$
Al lavoro $L = \int Fdx$	Corrisponde il lavoro $L = \int \tau d\theta$
All'energia cinetica $T = \frac{1}{2}Mv^2$	Corrisponde l'energia cinetica $T = \frac{1}{2}I\omega^2$
Alla potenza $P = Fv$	Corrisponde la potenza $P = \tau\omega$
Alla quantità di moto $q = Mv$	Corrisponde il momento angolare $p = I\omega$

### Esercizio 30

Intorno a un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$ , è avvolta una cordicella di massa trascurabile. Se a tale corda, nel punto  $A$ , viene applicata una forza costante  $T$  rivolta verso il basso, quali sono le accelerazioni angolare e lineare ?



### Soluzione

Il momento d'inerzia del disco è

$$(8-24) \quad I = \frac{1}{2}MR^2$$

Il momento torcente, per la (8-17), è

$$(8-25) \quad \tau = I\alpha$$

Mentre il momento della forza  $T$ , per la (8-5), è

$$(8-26) \quad M = TR$$

Questi due momenti costituiscono due aspetti diversi per una stessa grandezza fisica, quindi devono essere uguali fra loro. Si ha quindi

$$I\alpha = TR$$

e, sostituendo la (8-24),

$$\frac{1}{2}MR^2\alpha = TR$$

$$MR^2\alpha = 2TR$$

$$MR\alpha = 2T$$

$$\alpha = \frac{2T}{MR}$$

che ci fornisce appunto l'accelerazione angolare cercata.

Per l'accelerazione lineare si ha

$$a = R\alpha = R \frac{2T}{MR} = \frac{2T}{M}$$

### Esercizio 31

Nell'esercizio precedente si abbia un blocco di massa  $m$  appeso al filo, e libero di cadere. Determinare in questo caso le nuove accelerazioni angolare e lineare nel punto A.

### Soluzione

Stabiliamo come verso positivo delle forze quello diretto verso il basso (vedi figura).

Esiste una accelerazione rivolta verso il basso e quindi il diagramma di corpo libero applicato al blocco, per la seconda legge della dinamica, fornisce

$$p - T = F$$

$$mg - T = ma$$

Dall'ultima formula ricavata nell'esercizio precedente, si ha

$$(8-27) \quad T = \frac{Ma}{2}$$

e perciò

$$mg - \frac{Ma}{2} = ma$$

Sviluppando e semplificando si ottiene l'accelerazione lineare nel punto A

$$2mg - Ma = 2ma$$

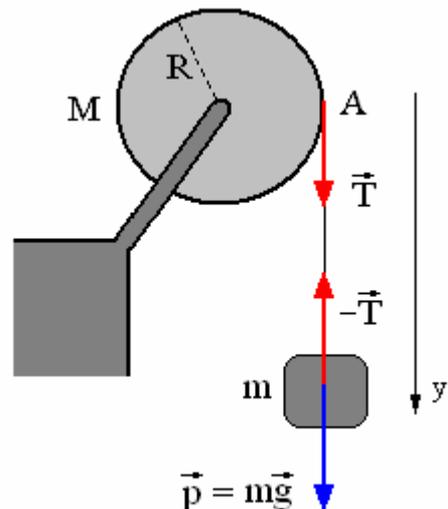
$$a(2m + M) = 2mg$$

$$(8-28) \quad a = \frac{2mg}{2m + M}$$

Quella angolare è allora

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

Sostituendo la (8-28) nella (8-27) si ottiene



$$T = \frac{M}{2} \frac{2mg}{2m + M}$$

$$T = \frac{Mmg}{2m + M}$$

cioè

$$T = \frac{M}{2m + M} p$$

La frazione è minore di uno, e questo ci permette di notare come la tensione T risulti sempre minore del peso p del blocco.

Ciò è dovuto al fatto che il sistema ha una accelerazione rivolta verso il basso. Se non ci fosse accelerazione la tensione sarebbe esattamente uguale al peso.

### Esercizio 32

Sempre facendo riferimento all'esercizio precedente, se il disco parte da fermo, dopo un intervallo di tempo  $\Delta t$ , qual è il lavoro eseguito dalla gravità terrestre, e qual è l'energia cinetica rotazionale acquistata dal disco ?

### Soluzione

Il moto del sistema è uniformemente accelerato, e quindi per la rotazione del disco possiamo scrivere

$$\theta = \theta_0 + \omega \Delta t + \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2$$

ma, essendo  $\omega = 0$ , avremo

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2$$

Il lavoro eseguito dalla gravità dopo un tempo  $\Delta t$  è

$$L = \int \tau d\theta = \tau (\theta - \theta_0)$$

in cui  $\tau = TR$  (dove la tensione T è quella calcolata nell'esercizio precedente).

E dunque il lavoro cercato è

$$(8-29) \quad L = TR (\theta - \theta_0)$$

Occupiamoci ora del calcolo dell'energia cinetica rotazionale acquistata dal disco.

Il disco parte da fermo e dopo un tempo  $\Delta t$  ha una velocità angolare data dalla formula

$$\omega = \alpha t \quad (\text{essendo } \omega_0 = 0)$$

L'energia cinetica rotazionale è

$$(8-30) \quad T = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} MR^2 \right) (\alpha \cdot \Delta t)^2$$

Le (8-29) e (8-30) pur avendo forma diversa devono sempre essere uguali fra loro perché il lavoro eseguito dalla gravità si trasforma integralmente in energia cinetica rotazionale.

### Esercizio 33

Sempre facendo riferimento all'esercizio 31, verificare il rispetto del principio di conservazione dell'energia meccanica, durante la discesa del blocco nel tempo  $\Delta t$ .

### Soluzione

Supponiamo che il blocco discenda dal punto A al punto B (vedi figura), partendo da fermo e percorrendo una lunghezza  $h$ .

Prendiamo la quota B come livello di energia potenziale nulla.

L'energia cinetica in A è nulla, ed il blocco in quella posizione avrà solo energia potenziale.

La sua energia meccanica in A è quindi

$$(8-31) \quad E_A = mgh + 0$$

Che corrisponde all'energia di tutto il sistema perché il disco è inizialmente fermo.

Quando il blocco raggiunge il livello B, il blocco ha perduto tutta la sua energia potenziale, ed ha acquistato una energia cinetica. Ma contemporaneamente il disco messo in rotazione ha acquistato anche una energia cinetica rotazionale.

L'energia del sistema è allora

$$(8-32) \quad E_B = 0 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Per verificare il rispetto del principio di conservazione dell'energia meccanica, dobbiamo dimostrare che le (8-31) e (8-32) sono uguali fra loro.

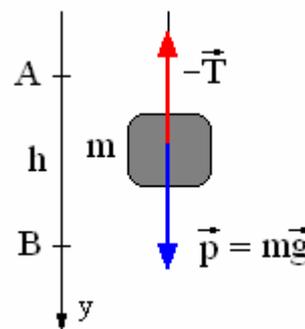
Ricordando la (8-28), e che nel moto uniformemente accelerato vale la formula  $v^2 = 2ah$ , la (8-31) diviene

$$(8-33) \quad E_A = mgh = mg \frac{v^2}{2a} = mg \frac{v^2}{2} \frac{M+2m}{2mg} = \frac{M+2m}{4} v^2$$

mentre la (8-32), ricordando che  $v = \omega R$ , diventa a sua volta

$$(8-34) \quad E_B = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}MR^2 \right) \left( \frac{v}{R} \right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4} \frac{MR^2 v^2}{R^2} = \\ = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2 = \frac{2m+M}{4} v^2$$

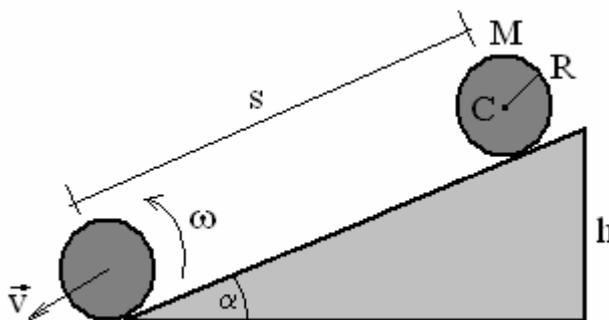
Ed infatti le (8-33) e (8-34) sono uguali fra loro.



### Esercizio 34

Un cilindro pieno di raggio  $R$  e massa  $M$  rotola su un piano inclinato percorrendo una lunghezza  $s$  e un dislivello  $h$ .

Calcolare la velocità finale  $v$  del cilindro.



## Soluzione

La perdita di energia potenziale dovuta alla discesa ( $Mgh$ ) si trasforma un energia cinetica ( $\frac{1}{2}Mv^2$ )

ed in energia cinetica rotazionale ( $\frac{1}{2}I\omega^2$ ). Si ha quindi

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

cioè

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 \omega^2$$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^2 = \frac{3}{4}v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \cong 1,15\sqrt{gh}$$

Si noti che la rotazione del cilindro è dovuta all'attrito esistente fra il piano inclinato e il cilindro stesso: se tale attrito non ci fosse, il cilindro scenderebbe scivolando ma senza ruotare.

In tale caso la velocità che avrebbe alla fine della discesa sarebbe

$$v = \sqrt{2gh} \cong 1,41\sqrt{gh}$$

Questo valore è maggiore del precedente perché parte dell'energia cinetica si trasforma in energia cinetica di rotazione.

Quando il cilindro rotola a causa dell'attrito impiega un tempo leggermente maggiore, ma l'energia finale totale è identica in entrambi i casi.

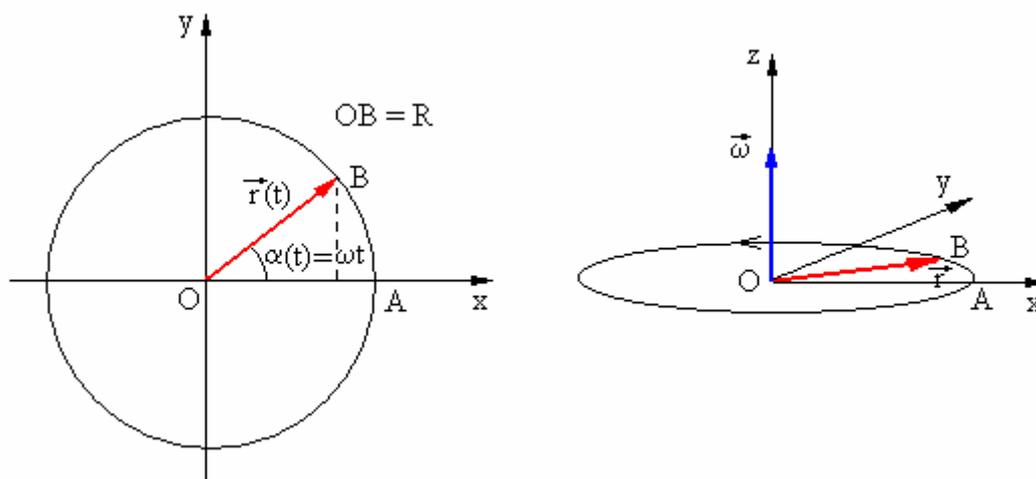
## CAP. 9 – APPROFONDIMENTI

### 9-1. Sul moto circolare uniforme

Riprendiamo in considerazione il **moto circolare uniforme** e trattiamolo con un maggiore rigore formale rispetto a quello usato nel sesto paragrafo del secondo capitolo.

Si abbia quindi un punto A che ruota attorno ad un punto O con velocità angolare  $\omega$  e raggio  $\overline{OA}$ . L'angolo  $\alpha$  varia nel tempo, è misurato in radianti, e corrisponde al prodotto  $\omega t$ .

La velocità angolare  $\vec{\omega}$  è un vettore normale al piano xy (vedi figura a destra) e tale che, personificato, veda il vettore  $\vec{r}$  ruotare in verso antiorario.



La velocità angolare, per la formula (8-5) vista nell'ottavo capitolo al secondo paragrafo, può essere considerata come un vettore normale al piano di rotazione e con intensità data dal **prodotto vettoriale**

$$(9-1) \quad \vec{\omega} = \vec{r} \times \frac{d}{dt} \overline{OP} \quad \rightarrow \quad \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$

o anche, applicando lo scorrimento dei vettori,

$$(9-2) \quad \frac{d}{dt} \overline{OP} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Le componenti di  $\vec{r}$  secondo gli assi coordinati (vedi figura a sinistra) sono

$$\begin{cases} r_x(t) = R \cos \alpha \\ r_y(t) = R \sin \alpha \end{cases}$$

Notiamo che il **modulo**, cioè la lunghezza, del vettore  $\vec{r}$  (che varia il suo orientamento in funzione del tempo), è **costante**.

Si ha infatti

$$(9-3) \quad |\vec{r}(t)| = \sqrt{R^2 \sin^2 \alpha + R^2 \cos^2 \alpha} = R$$

Per determinare il vettore  $\vec{v}$  prendiamo in considerazione due posizioni successive B e C, e calcoliamo il limite del rapporto incrementale.

$$(9-4) \quad \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Dalla figura a fianco risulta evidente che il vettore  $\Delta \vec{r}$  tende al limite a divenire il vettore  $d\vec{r}$  normale ad  $\vec{r}$  (e quindi tangente alla circonferenza).

Dunque anche il vettore  $\vec{v}$  risulta tangente alla circonferenza.

Le componenti di  $\vec{v}(t)$  corrispondono alle derivate (scalari) delle componenti di  $\vec{r}(t)$ .

Cioè

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dr_x(t)}{dt} = \omega R \sin \alpha \\ v_y(t) = \frac{dr_y(t)}{dt} = \omega R \cos \alpha \end{cases}$$

Quindi il modulo di  $\vec{v}(t)$  è

$$(9-5) \quad |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(\omega R \sin \alpha)^2 + (\omega R \cos \alpha)^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 \sin^2 \alpha + \omega^2 R^2 \cos^2 \alpha} = \omega R$$

e allora anche il vettore  $\vec{v}(t)$  pur avendo orientamento variabile, è costante come modulo.

Inoltre il vettore  $\vec{v}(t)$  risulta sempre **normale** al vettore  $\vec{r}(t)$ , infatti il loro **prodotto scalare** è **nullo**.

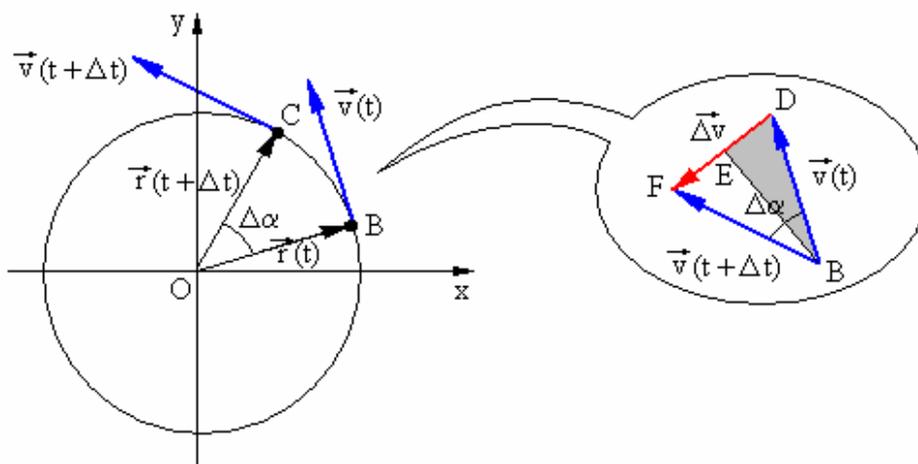
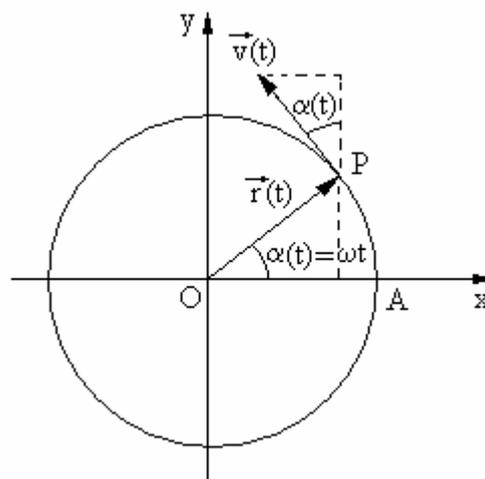
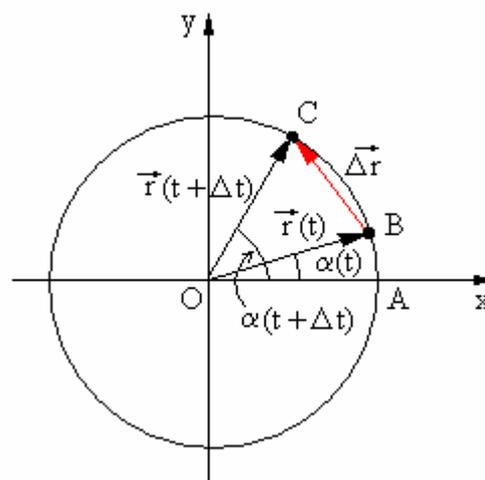
Per la (1-5) del primo capitolo, si ha

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) &= x v_x + y v_y = \\ &= (R \cos \alpha)(-\omega R \sin \alpha) + (R \sin \alpha)(\omega R \cos \alpha) = \\ &= -\omega R^2 \sin \alpha \cos \alpha + \omega R^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

E dunque il vettore  $\vec{v}(t)$  risulta sempre tangente alla circonferenza.

Calcoliamo ora l'accelerazione  $\vec{a}(t)$ .

Prendiamo in considerazione due istanti successivi, per esempio quando il corpo in rotazione si muove dal punto B al punto C.



I due vettori velocità (uguali in modulo ma orientati diversamente) possono essere applicati in uno stesso punto formando così un triangolo isoscele con angolo al vertice di ampiezza  $\Delta\alpha$ . Nel triangolo rettangolo colorato si ha

$$\overline{DE} = \overline{DB} \operatorname{sen} \frac{\Delta\alpha}{2} = v \operatorname{sen} \frac{\Delta\alpha}{2}$$

e perciò si ha

$$\overline{DF} = 2 \overline{DE} = 2 v \operatorname{sen} \frac{\Delta\alpha}{2}$$

Risulta quindi

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 v \operatorname{sen} \frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t}$$

cioè, moltiplicando numeratore e denominatore per  $\Delta\alpha$ ,

$$(9-6) \quad |\vec{a}(t)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 v \Delta\alpha \operatorname{sen} \frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta\alpha \Delta t} = v \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = v \cdot 1 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = v \omega$$

che è anch'esso un vettore con modulo costante in quanto hanno modulo costante sia  $v$  che  $\omega$ . La direzione invece va da D ad F e quindi è sempre diretta verso il centro O.

## 9-2. Formula di Poisson

Nel nono paragrafo del secondo capitolo, per ricavare la (2-17) abbiamo derivato **dei vettori costanti** applicando le regole tradizionali dell'analisi, senza alcuna precauzione particolare, come se fossero grandezze scalari.

Per esempio

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \rightarrow \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{c}}{dt} \rightarrow \vec{a}' = \vec{b}' + \vec{c}'$$

Il procedimento era corretto in quanto l'espressione è una somma di vettori costanti.

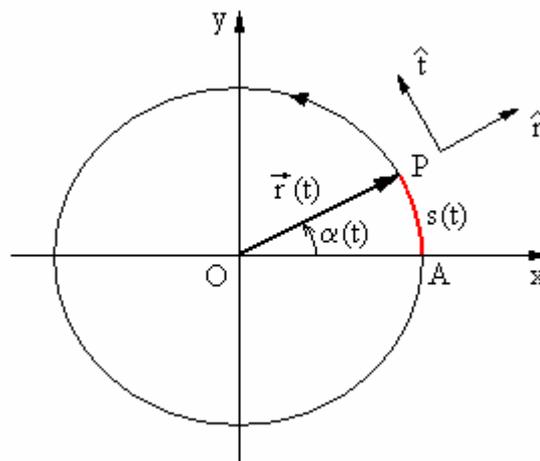
Ma come ci si deve comportare se **i vettori da derivare non sono costanti**, ma variano nel tempo ?

A questo punto conviene adottare **due versori** (vettori unitari) **variabili come orientamento e diretti** (vedi figura) **in ogni istante come il raggio OP e come la tangente, nel verso di rotazione.**

Indichiamo questi due versori rispettivamente con le notazioni  $\hat{r}$  e  $\hat{t}$  (iniziali di raggio e tangente).

L'accelerazione, espressa come vettore, essendo sempre diretta verso il centro, si può indicare allora nel modo seguente

$$(9-7) \quad \vec{a}(t) = -v\omega \hat{r}$$



Se ora generalizziamo e prendiamo in considerazione **un moto generico**, e non più un moto circolare uniforme, possiamo indicare il vettore  $\vec{v}(t)$  come il prodotto del suo modulo istantaneo  $v(t)$  per il versore  $\hat{v}(t)$  (diretto istante per istante nella direzione della velocità), e scrivere

$$(9-8) \quad \vec{v} = v \hat{v}.$$

A questo punto l'accelerazione istantanea di un moto generico si può ottenere applicando la regola di derivazione di un prodotto

$$(9-10) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \hat{v}) = \frac{dv}{dt} \hat{v} + v \frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + v \omega \hat{t}$$

Ma osservando la figura a fianco, in cui sono rappresentati il vettore  $\vec{\omega}$  e il vettore  $\vec{v}$ , ci possiamo rendere conto che l'ultimo termine può anche essere espresso mediante il **prodotto vettoriale**

$$(9-11) \quad v \omega \hat{t} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

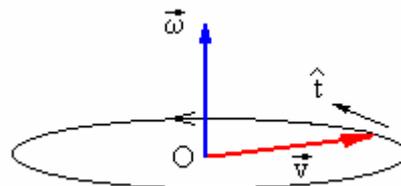
infatti  $\vec{\omega}$  e  $\vec{v}$  sono normali fra loro, l'angolo che essi formano è di  $90^\circ$ , ed il risultato è un vettore normale ad entrambi, e diretto come  $\hat{t}$ .  
La (9-10) può allora essere scritta nella forma seguente

$$(9-12) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

In particolare, nel caso che il vettore  $\vec{v}$  abbia modulo costante, il primo termine si annulla e la (9-12) assume la forma

$$(9-13) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

e prende il nome di **formula di Poisson**.



### 9-3. Accelerazione di Coriolis

Si abbia un sistema fisso ( $O x y z$ ) ed un sistema in movimento ( $O' x' y' z'$ ) che può essere considerato fisso istante per istante.

Indichiamo al solito con  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  i versori orientati come gli assi del sistema fisso, e con  $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$  i versori orientati come gli assi del sistema in movimento.

Risulta

$$(9-14) \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$$

e perciò

$$\begin{aligned} \hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z' &= \\ &= (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) - (\hat{i}X + \hat{j}Y + \hat{k}Z) \end{aligned}$$

in cui  $X, Y$  e  $Z$  sono le coordinate di  $O'$  rispetto al sistema fisso.

Queste equivalgono a

$$(9-15) \quad \hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z' = \hat{i}(x - X) + \hat{j}(y - Y) + \hat{k}(z - Z)$$

dove  $\vec{\omega}$  è la (eventuale) velocità angolare con cui il sistema mobile ruota rispetto a quello fisso.

Ora deriviamo la (9-15) rispetto al tempo (ricordando che i versori  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  sono costanti, mentre i versori  $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$  non lo sono)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z') &= \frac{d}{dt}[\hat{i}(x - X)] + \frac{d}{dt}[\hat{j}(y - Y)] + \frac{d}{dt}[\hat{k}(z - Z)] \\ \left(\frac{d\hat{i}'}{dt}x' + \hat{i}'\frac{dx'}{dt}\right) + \left(\frac{d\hat{j}'}{dt}y' + \hat{j}'\frac{dy'}{dt}\right) + \left(\frac{d\hat{k}'}{dt}z' + \hat{k}'\frac{dz'}{dt}\right) &= \hat{i}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt}\right) + \hat{j}\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dY}{dt}\right) + \hat{k}\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dZ}{dt}\right) \\ \left(\frac{d\hat{i}'}{dt}x' + \hat{i}'v'_x\right) + \left(\frac{d\hat{j}'}{dt}y' + \hat{j}'v'_y\right) + \left(\frac{d\hat{k}'}{dt}z' + \hat{k}'v'_z\right) &= \hat{i}(v_x - V_x) + \hat{j}(v_y - V_y) + \hat{k}(v_z - V_z) \end{aligned}$$

Dove  $V_x, V_y$  e  $V_z$  sono le componenti della velocità di  $O'$  rispetto al sistema fisso.

Applicando ora ai versori  $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$  la formula di Poisson vista nel paragrafo precedente, si ha

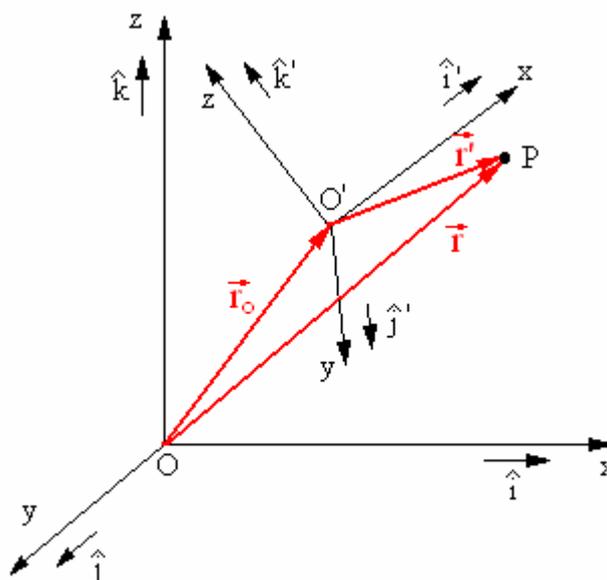
$$(9-16) \quad \begin{cases} \frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}' \\ \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}' \\ \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}' \end{cases}$$

Sostituendo nella relazione precedente, si ha

$$(\vec{\omega} \times \hat{i}'x' + \hat{i}'v'_x) + (\vec{\omega} \times \hat{j}'y' + \hat{j}'v'_y) + (\vec{\omega} \times \hat{k}'z' + \hat{k}'v'_z) = \hat{i}(v_x - V_x) + \hat{j}(v_y - V_y) + \hat{k}(v_z - V_z)$$

o, semplificando,

$$(9-17) \quad \hat{i}'v'_x + \hat{j}'v'_y + \hat{k}'v'_z + \vec{\omega} \times (\hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z') = \hat{i}(v_x - V_x) + \hat{j}(v_y - V_y) + \hat{k}(v_z - V_z)$$



che equivale a scrivere

$$\begin{aligned} (\hat{i}'v'_x + \hat{j}'v'_y + \hat{k}'v'_z) + \bar{\omega} \times (\hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z') &= (\hat{i}v_x + \hat{j}v_y + \hat{k}v_z) - (\hat{i}V_x + \hat{j}V_y + \hat{k}V_z) \\ \bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{r}' &= \bar{v} - \bar{V} \\ (9-18) \quad \bar{v}' &= \bar{v} - (\bar{V} + \bar{\omega} \times \bar{r}') \end{aligned}$$

in cui  $\bar{v}'$  è la **velocità relativa** di P rispetto al sistema mobile,  $\bar{v}$  è la **velocità assoluta** di P rispetto al sistema fisso, e l'espressione dentro parentesi è la **velocità di trascinamento** formata dalla traslazione di O' rispetto al sistema fisso, più la rotazione di P rispetto ad O'.

Passiamo alle accelerazioni e deriviamo ancora la (9-17)

$$\begin{aligned} &\left[ \left( \frac{d\hat{i}'}{dt} v'_x + \hat{i}' a'_x \right) + \left( \frac{d\hat{j}'}{dt} v'_y + \hat{j}' a'_y \right) + \left( \frac{d\hat{k}'}{dt} v'_z + \hat{k}' a'_z \right) \right] + \\ &+ \bar{\alpha} \times (\hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z') + \bar{\omega} \times \left[ \left( \frac{d\hat{i}'}{dt} x'_x + \hat{i}' v'_x \right) + \left( \frac{d\hat{j}'}{dt} x'_y + \hat{j}' v'_y \right) + \left( \frac{d\hat{k}'}{dt} x'_z + \hat{k}' v'_z \right) \right] = \\ &= \hat{i}'(a_x - A_x) + \hat{j}'(a_y - A_y) + \hat{k}'(a_z - A_z) \end{aligned}$$

in cui  $\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$  è l'**accelerazione angolare** del sistema mobile.

Sviluppando e ordinando, si ottiene

$$\begin{aligned} &\hat{i}'a'_x + \hat{j}'a'_y + \hat{k}'a'_z + \\ &+ \frac{d\hat{i}'}{dt} v'_x + \frac{d\hat{j}'}{dt} v'_y + \frac{d\hat{k}'}{dt} v'_z + \\ &+ \bar{\alpha} \times (\hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z') + \\ &+ \bar{\omega} \times \left( \frac{d\hat{i}'}{dt} x'_x + \frac{d\hat{j}'}{dt} x'_y + \frac{d\hat{k}'}{dt} x'_z \right) + \\ &+ \bar{\omega} \times (\hat{i}'v'_x + \hat{j}'v'_y + \hat{k}'v'_z) = \\ &= \hat{i}'(a_x - A_x) + \hat{j}'(a_y - A_y) + \hat{k}'(a_z - A_z) \end{aligned}$$

e, utilizzando le formule di Poisson, si ha

$$\begin{aligned} &\hat{i}'a'_x + \hat{j}'a'_y + \hat{k}'a'_z + &&\leftarrow \bar{a}' \\ &+ \bar{\omega} \times (\hat{i}'v'_x + \hat{j}'v'_y + \hat{k}'v'_z) + &&\leftarrow \bar{\omega} \times \bar{v}' \\ &+ \bar{\alpha} \times (\hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z') + &&\leftarrow \bar{\alpha} \times \bar{r}' \\ &+ \bar{\omega} \times \left( \frac{d\hat{i}'}{dt} x'_x + \frac{d\hat{j}'}{dt} x'_y + \frac{d\hat{k}'}{dt} x'_z \right) + &&\leftarrow \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') \\ &+ \bar{\omega} \times (\hat{i}'v'_x + \hat{j}'v'_y + \hat{k}'v'_z) = &&\leftarrow \bar{\omega} \times \bar{v}' \\ &= \hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z + &&\leftarrow \bar{a} \\ &- (\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z) &&\leftarrow \bar{A} \end{aligned}$$

cioè

$$\vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a} - \vec{A}$$

(9-19)

$$\vec{a}' = \vec{a} - \left[ \vec{A} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right] - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

in cui

$\vec{a}'$  = accelerazione relativa di P rispetto al sistema mobile

$\vec{a}$  = accelerazione assoluta di P rispetto al sistema fisso

$\vec{a}_t = \vec{A} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  = accelerazione di trascinamento

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  = accelerazione di Coriolis

L'accelerazione di trascinamento è formata dalla accelerazione di O' rispetto al sistema fisso, dall'accelerazione tangenziale ( $|\vec{\alpha} \times \vec{r}'| = \alpha r'$ ) e dalla accelerazione radiale ( $|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')| = \omega^2 r'$ ) cui è sottoposta la punta del vettore  $\vec{r}'$ .

Si noti che l'accelerazione di Coriolis è nulla se

- Il punto P è fermo rispetto al sistema mobile, cioè se  $\vec{v}' = 0$ .
- Il sistema mobile ha velocità angolare  $\vec{\omega} = 0$ .
- $\vec{\omega}$  e  $\vec{v}'$  sono parallele e quindi il prodotto vettoriale  $\vec{\omega} \times \vec{v}' = 0$

## 9-4. Effetti della forza di Coriolis

Moltiplicando l'accelerazione di Coriolis per la massa, si ottiene la **forza di Coriolis**, che è molto importante nello studio di molti fenomeni.

Per esempio la Terra è un sistema mobile in rotazione con una opportuna velocità angolare  $\vec{\omega}$ . Questa velocità angolare è diretta da Sud a Nord (come mostrato in figura).

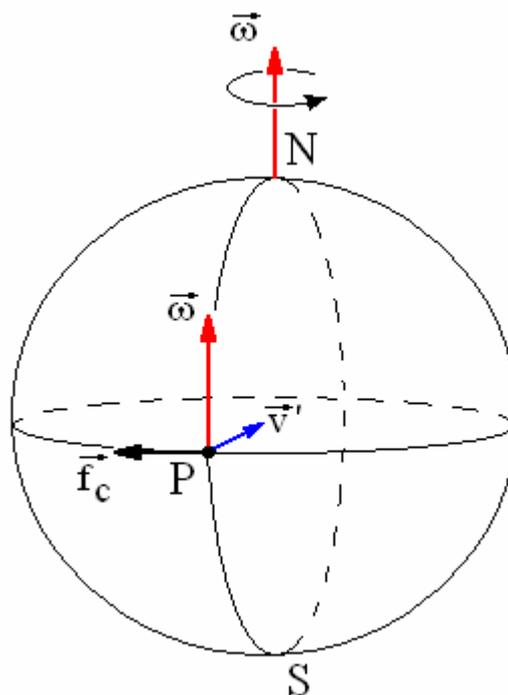
Immaginiamo ora di lasciar cadere un corpo dall'alto di una torre situata nel punto P (lungo l'equatore).

Per effetto di  $\vec{\omega}$  e  $\vec{v}'$  si ha una accelerazione di Coriolis, e quindi una forza di Coriolis che tende a far deviare il corpo lungo la sua caduta verticale. Per questo motivo tale forza viene anche detta forza **deviatrice** o forza **complementare**.

Tale forza sarebbe stata nulla se il punto P si fosse trovato su uno dei due poli, perché  $\vec{\omega}$  e  $\vec{v}'$  sarebbero state parallele.

Sempre per effetto della forza di Coriolis avviene che nel nostro emisfero (boreale) le regioni atmosferiche di alta pressione ruotino sempre con verso antiorario (detto anticiclonico), mentre quelle di bassa pressione ruotino in verso orario (detto ciclonico).

Il contrario avviene nelle regioni atmosferiche dell'emisfero australe.



## CAP. 10 – EQUILIBRIO DEI CORPI RIGIDI

### 10-1. Equilibrio statico

Abbiamo visto nel paragrafo 6-1 come si definisce il baricentro di un corpo.

Un oggetto posato su un piano orizzontale (per esempio un mobile), o sospeso ad un vincolo (per esempio un quadro), è **in equilibrio statico** perché

- la forza di gravità agente sul suo baricentro è perfettamente bilanciata dalla reazione vincolare del piano di appoggio o del punto di sospensione. Quindi la risultante delle forze agenti sul suo baricentro è nulla, ed anche l'**accelerazione lineare** del baricentro è nulla.
- Anche il momento delle forze agenti (rispetto al baricentro o ad un altro punto arbitrario) è nullo, e perciò anche l'**accelerazione angolare** è nulla.

Il corpo può anche trovarsi su un sistema inerziale (per esempio dentro un vagone ferroviario che si muove a velocità costante lungo un percorso rettilineo) che viaggia **con una velocità costante  $v$** , e la sua accelerazione lineare ed angolare seguitano ad essere nulle.

In altre parole il corpo continua a rimanere in equilibrio, ma in questo caso parleremo di **equilibrio dinamico**.

In entrambi i casi le condizioni necessarie per realizzare l'equilibrio sono le stesse.

Ci occuperemo allora solo delle condizioni necessarie per realizzare l'equilibrio statico.

Un corpo è in equilibrio (statico) se nel **diagramma di corpo libero** (vedi paragrafo 3-8), la risultante delle forze è nulla.

Talvolta si precisa il tipo di equilibrio classificandolo come **stabile**, **instabile** o **indifferente**, a seconda che imprimendo al corpo una piccola perturbazione esso ritorni nella posizione iniziale, la perda definitivamente, o se qualunque posizione possa essere considerata di equilibrio.

Tradizionalmente si differenzia la situazione di equilibrio per i **corpi appoggiati** da quella dei **corpi sospesi**. Questa differenziazione è però soltanto formale e non sostanziale perché a rigore non sarebbe necessaria: basterebbe ragionare facendo riferimento soltanto al diagramma di corpo libero.

### 10-2. Equilibrio dei corpi appoggiati

Definiamo come poligono di appoggio di un corpo la figura convessa (cioè senza rientranze) ed eventualmente con parti di contorno curvilinee, che si ottiene unendo tutti i punti estremi con cui il corpo poggia su un piano.



Ebbene, un corpo poggiato su un piano è in equilibrio stabile se la verticale passante per il suo baricentro attraversa il suo poligono di appoggio.

L'equilibrio è invece instabile se tale verticale passa per il contorno del poligono.

Nel caso classico della torre pendente di Pisa, l'equilibrio è stabile perché la verticale (vedi prima figura sottostante) passa all'interno del poligono di appoggio.



Come esempi di equilibrio indifferente basta fare riferimento ai tre solidi qui sotto.



### 10-3. Equilibrio dei corpi sospesi

Per i corpi sospesi si ha equilibrio quando il baricentro del corpo ed il punto di sospensione si trovano allineati sulla stessa verticale.



Nel primo caso in figura l'equilibrio è stabile perché il punto di sospensione è allineato con il baricentro, ma si trova sopra quest'ultimo.

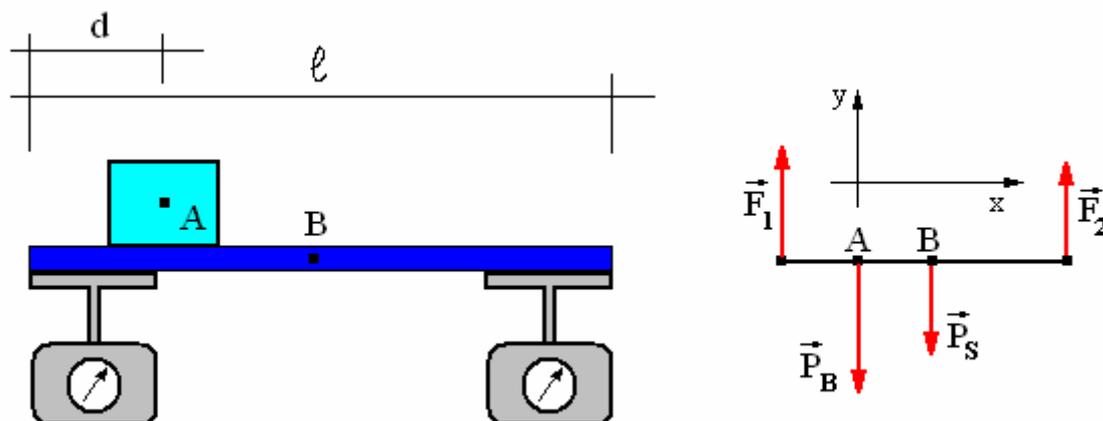
Infatti il quadro, in seguito ad un piccolo urto oscilla leggermente ma poi ritorna nella posizione iniziale.

Nel secondo caso i due punti sono ugualmente allineati, ma il punto di sospensione si trova sotto. Basterà un leggero urto per far ruotare il quadro che abbandonerà definitivamente la posizione di equilibrio iniziale.

Infine nel terzo caso i due punti coincidono e qualsiasi posizione del quadro sarà anche una posizione di equilibrio.

## ESERCIZI SULL'EQUILIBRIO

### Esercizio 35



Una sbarra omogenea di ferro poggia su due dinamometri posti alle due estremità. La sbarra è lunga 2 metri e pesa 80 Newton.

Su di essa, alla distanza di 50 cm da una estremità è posto un blocco il cui peso è di 120 Newton.

Quali valori si leggeranno su ciascuno dei due dinamometri ?

### Soluzione

Indichiamo con  $\ell$  ed  $s$  le due distanze, e con  $P_B$  e  $P_S$  i pesi rispettivamente del blocco e della sbarra. Conviene infatti, come sempre, impostare il problema utilizzando i valori letterali, e sostituire quelli numerici solo quando si è trovata la formula finale.

Riepilogando

$$\text{Dati disponibili} \begin{cases} \ell = 2 \text{ m} \\ d = 0,5 \text{ m} \\ \vec{P}_S = 80 \text{ N} \\ \vec{P}_B = 120 \text{ N} \end{cases} \quad \text{dati da calcolare} \begin{cases} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{cases}$$

Osservando il diagramma di corpo libero in alto a destra, lungo la direzione orizzontale si ha

$$(10-1) \quad F_1 + F_2 - P_B - P_S = 0$$

(la relazione è fra le grandezze scalari, altrimenti avremmo dovuto scrivere  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P}_B + \vec{P}_S = 0$ ).

Lungo la direzione verticale (calcolando i momenti rispetto al baricentro B della sbarra, e ricordando che la scelta di tale punto è opzionale) si ha invece

$$F_1 \frac{\ell}{2} - F_2 \frac{\ell}{2} + P_S \cdot 0 - P_B \frac{\ell}{4} = 0$$

$$(10-2) \quad F_1 - F_2 - P_B \frac{\ell}{2} = 0$$

Le (10-1) e (10-2) costituiscono un sistema le cui uniche incognite sono  $F_1$  e  $F_2$ .

Risolviamo il sistema ricavando  $F_1$  dalla (10-2)

$$F_1 = F_2 + P_B \frac{\ell}{2}$$

e sostituendo nella (10-1). Si ottiene

$$F_2 + P_B \frac{\ell}{2} + F_2 - P_B - P_S = 0$$

$$2F_2 = P_B - P_B \frac{\ell}{2} + P_S$$

$$2F_2 = P_B \frac{\ell}{2} + P_S$$

$$(10-3) \quad F_2 = P_B \frac{\ell}{4} + \frac{P_S}{2}$$

e quindi

$$F_1 = P_B \frac{\ell}{4} + \frac{P_S}{2} + P_B \frac{\ell}{2}$$

$$(10-4) \quad F_1 = P_B \frac{3\ell}{4} + \frac{P_S}{2}$$

Sostituendo infine i valori numerici, si ha

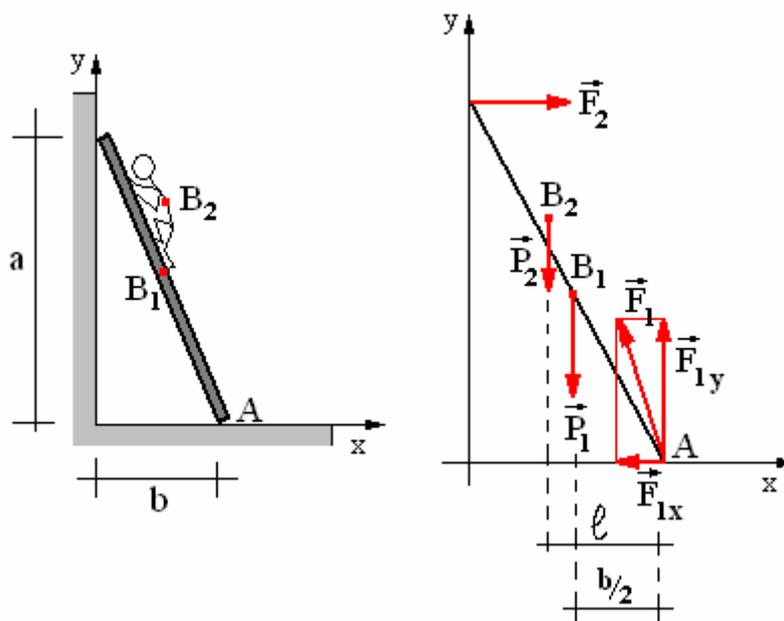
$$\begin{cases} \vec{F}_1 = 120 \frac{3 \cdot 2}{4} + \frac{80}{2} = 220 \text{ N} \\ \vec{F}_2 = 120 \frac{2}{4} + \frac{80}{2} = 100 \text{ N} \end{cases}$$

### Esercizio 36

Una scala è appoggiata al muro, ed un uomo è salito su di essa fino ad una certa altezza, come mostrato in figura.

Il muro è privo di attrito, ma non il pavimento (altrimenti la scala scivolerebbe).

Calcolare le forze di reazione agenti sul muro e sul pavimento.



## Soluzione

Indichiamo con  $B_1$  e  $B_2$  i baricentri rispettivamente della scala e dell'uomo. Con  $\vec{F}_2$  la reazione opposta dalla parete verticale (il vettore è perfettamente ortogonale alla parete stessa a causa della assenza di attrito). E con  $\vec{F}_1$  la reazione opposta dal pavimento.

In quest'ultimo caso il vettore non è normale al pavimento perché l'attrito genera una  $\vec{F}_{1x}$  che, assieme alla  $\vec{F}_{1y}$ , genera una  $\vec{F}_1$  leggermente inclinata da una parte.

Osservando il diagramma di corpo libero, possiamo ricavare due relazioni (scalari) una orientata lungo l'asse x ed un'altra orientata lungo l'asse y.

$$(10-5) \quad \begin{cases} F_2 - F_{1x} = 0 \\ F_{1y} - P_1 - P_2 = 0 \end{cases}$$

Inoltre, per i momenti (riferendoli al punto A, la cui scelta è arbitraria), si ottiene

$$(10-6) \quad F_2 \cdot a - P_1 \frac{b}{2} - P_2 \cdot \ell = 0$$

Le (10-5) e (10-6) costituiscono un sistema di tre equazioni in cui le tre incognite sono  $F_2$ ,  $F_{1x}$ ,  $F_{1y}$ . Ricaviamo  $F_2$  dalla prima delle (10-5)

$$(10-7) \quad F_2 = F_{1x}$$

e sostituiamo nelle altre due relazioni

$$\begin{cases} F_{1y} - P_1 - P_2 = 0 \\ F_{1x} \cdot a - P_1 \frac{b}{2} - P_2 \cdot \ell = 0 \end{cases}$$

Risolvendo, otteniamo

$$(10-8) \quad \begin{cases} F_{1y} = P_1 + P_2 \\ F_{1x} \cdot a = P_1 \frac{b}{2} + P_2 \cdot \ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{1y} = P_1 + P_2 \\ F_{1x} = P_1 \frac{b}{2a} + P_2 \frac{\ell}{a} \end{cases}$$

Se i valori numeri sono, per esempio

$$\begin{cases} P_1 = 60 \text{ kg} = 60 \cdot 9,8 \cong 600 \text{ N} \\ P_2 = 80 \text{ kg} = 80 \cdot 9,8 \cong 800 \text{ N} \\ a = 8 \text{ m} \\ b = 3 \text{ m} \\ \ell = 2 \text{ m} \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} F_{1x} = 600 \frac{3}{16} + 800 \frac{2}{8} = 312,5 \text{ N} \\ F_{1y} = 600 + 800 = 1400 \text{ N} \\ F_2 = 312,5 \text{ N} \end{cases}$$

Per  $\vec{F}_1$  si ha infine

$$F_1 = \sqrt{312,5^2 + 1400^2} \cong 1434 \text{ N}$$

## CAP. 11 – IL MOTO ARMONICO

### 11-1. Generalità

Il moto armonico è stato già introdotto genericamente nel terzo capitolo (paragrafi 1 e 5). Ora lo riprenderemo per trattarlo in modo più completo e approfondito, in quanto è uno dei moti più importanti della fisica.

Infatti non solo i sistemi meccanici sono sottoposti a moti armonici, come il suono, i moti pendolari, e le strutture rigide in generale, ma anche le onde radio, le microonde, e la luce visibile.

In altre parole tutte le oscillazioni, sia quelle meccaniche che quelle elettromagnetiche sono descritte dalle stesse leggi matematiche.

Avevamo visto nel terzo capitolo che una forza genera un moto armonico, se il rapporto fra la forza applicata è proporzionale allo spostamento

$$(11-1) \quad \vec{F} = -K\vec{s}$$

la costante di proporzionalità  $K$  prende il nome di costante elastica di richiamo, ed il segno meno è dovuto al fatto che la forza applicata e lo spostamento sono due vettori con versi sempre opposti fra loro.

### 11-2. Approccio cinematico

Il moto armonico si può considerare come ottenuto proiettando un moto circolare uniforme su una retta.

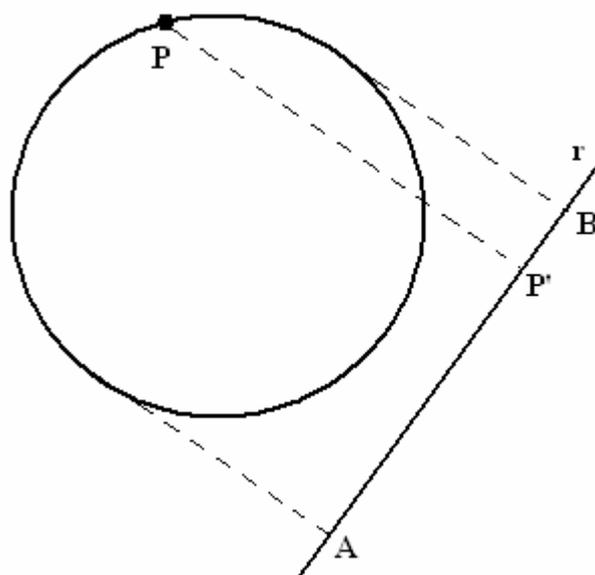
La proiezione del punto  $P$  sulla retta  $r$ , è un punto  $P'$  che si muove avanti ed indietro con moto armonico lungo il segmento  $AB$ .

Intuitivamente si capisce che la velocità di  $P'$  non è costante: essa ha valore massimo nella regione centrale del segmento  $AB$ , e decresce fino ad annullarsi man mano che  $P'$  si avvicina ad uno degli estremi  $A$  o  $B$ .

In questo paragrafo consideriamo solo le **leggi orarie del moto**, ignorando la forza che genera il moto.

Cioè eseguiamo solo uno studio cinematico, cercando di ricavare **lo spostamento, la velocità, e la accelerazione in funzione del tempo**.

Iniziamo lo studio cinematico prendendo in considerazione una circonferenza di raggio  $r$  (vedi figura alla pagina seguente), ed un punto  $P$  che si muove su di essa con moto circolare uniforme, con periodo  $T$ .



Quando facciamo partire il cronometro con cui misuriamo i tempi, il punto si trova in C. Dopo un certo tempo  $t$  esso si trova in P, ed ha descritto un angolo  $\alpha$ .

Proiettando il punto P su una retta coincidente con il diametro AB: si ottiene un punto P' che si muove con moto armonico.

Indichiamo con  $s$  la sua **posizione** sul diametro AB.

Stabiliamo di considerare positiva la posizione  $s$  nel caso in cui il punto P' si trovi sopra O e negativa nel caso in cui si trovi sotto.

Per definizione di seno nel triangolo OPP' si ha

$$\text{sen}\alpha = \frac{OP'}{OP} \rightarrow OP' = OP \cdot \text{sen}\alpha \rightarrow s = r \cdot \text{sen}\alpha$$

La velocità angolare  $\omega$  del moto circolare uniforme,

e' uguale a  $\frac{2\pi}{T}$  infatti il tempo necessario per

percorrere un angolo giro ( $2\pi$ ) corrisponde al periodo T.

Ma essendo la velocità angolare costante, il suo valore non varia se al posto di un angolo giro si prende un angolo qualsiasi  $\alpha$  ed invece del periodo T il tempo  $t$  necessario a percorrere tale angolo.

Quindi

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\alpha}{t} \rightarrow \alpha = \omega t$$

e perciò il moto del punto P' è regolato dalla legge

$$(11-2) \quad s = r \cdot \text{sen}\omega t$$

Ma se, più in generale, quando facciamo partire il cronometro il punto P non si trova in C, ma in D.

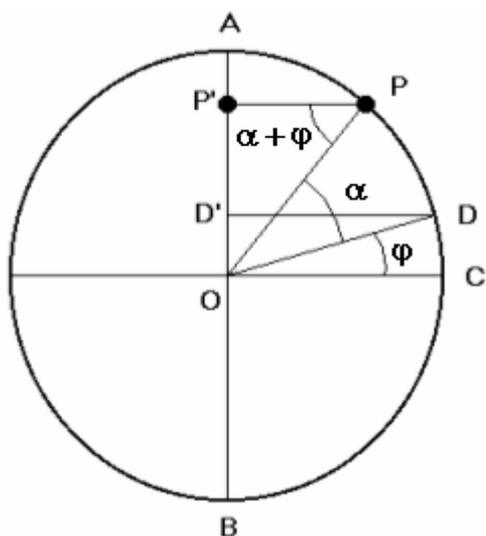
Cioè se ha già percorso un angolo  $\varphi$  quando  $t = 0$ , allora la (11-2) deve essere sostituita con la

$$(11-3) \quad s = r \cdot \text{sen}(\alpha + \varphi) = r \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

La (11-3) rappresenta quindi lo **spostamento del punto P' che si muove con moto armonico**, nella sua forma più generalizzata, mentre la (11-1) ne costituisce un caso particolare (quello in cui nell'istante di partenza del cronometro,  $t = 0$ , l'angolo  $\varphi$  è nullo e P' si trova in O).

L'angolo  $\varphi$  si chiama **sfasamento iniziale** (o **fase**), il segmento  $OD' = s$  prende il nome di **elongazione**, mentre il segmento  $OA = r$  è l'**elongazione massima**.

La velocità angolare  $\omega$  del moto circolare uniforme prende invece il nome di **pulsazione** del moto armonico.



Nella realtà fisica spesso il moto armonico non e' legato necessariamente ad un corrispondente moto circolare uniforme, ma questo costituisce soltanto **un comodo modello matematico al quale ricorrere per studiare più facilmente il moto**.

Per esempio un corpo sospeso ad un elastico o ad una molla fissata al soffitto oscilla in su ed in giù con moto armonico: il corrispondente moto circolare uniforme in questi casi non esiste ma può sempre essere immaginato, ed utilizzato per eseguire i calcoli.

Passiamo ora ad occuparci della **velocità del moto armonico**.

Nel moto circolare uniforme la velocità periferica  $\vec{V}$  è tangente alla circonferenza, ed il suo valore è

$$V = \frac{2\pi r}{T}$$

Essa può essere scomposta nelle due componenti  $v'$  e  $v''$  rispettivamente parallela e perpendicolare al moto armonico di  $P'$ .

La componente  $v''$  tende a determinare uno spostamento **orizzontale** del punto  $P$ , e quindi non influenza il moto **verticale** di  $P'$  che invece deve il suo spostamento solo alla componente  $v'$ .

Proponiamoci ora di calcolare  $v'$  sfruttando la similitudine fra i due triangoli colorati.

Nel triangolo grande si ha

$$\cos \alpha = \frac{PP'}{OP} \rightarrow PP' = OP \cdot \cos \alpha \rightarrow PP' = r \cdot \cos(\omega t)$$

Possiamo ora stabilire la proporzione

$$V : v' = OP : PP'$$

cioè

$$V : v' = OP : PP'$$

$$v' = \frac{V \cdot PP'}{OP} = \frac{\frac{2\pi r}{T} r \cdot \cos(\omega t)}{r} = \frac{\omega r^2 \cdot \cos(\omega t)}{r} = \omega r \cos(\omega t)$$

Quindi (indicando semplicemente con  $v$  la velocità del punto  $P'$ ) si ha (considerando anche un eventuale sfasamento)

$$(11-4) \quad v = \omega r \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Occupiamoci infine della **accelerazione cui è sottoposto il punto  $P'$** .

Nel moto circolare l'accelerazione centripeta è

$$a = \frac{V^2}{r} = \omega^2 r$$

scomponiamo questa accelerazione nelle due componenti  $a'$  ed  $a''$  rispettivamente parallela e perpendicolare al moto del punto  $P'$ .

Come prima, la componente orizzontale  $a''$  non agisce sul moto di  $P'$ , ma solo la componente verticale  $a'$  che ora ci proponiamo di calcolare.

I due triangoli colorati nella figura a fianco sono chiaramente simili, quindi possiamo stabilire la proporzione seguente:

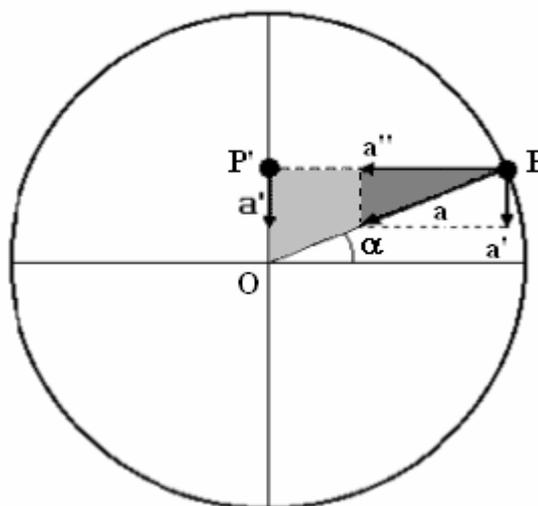
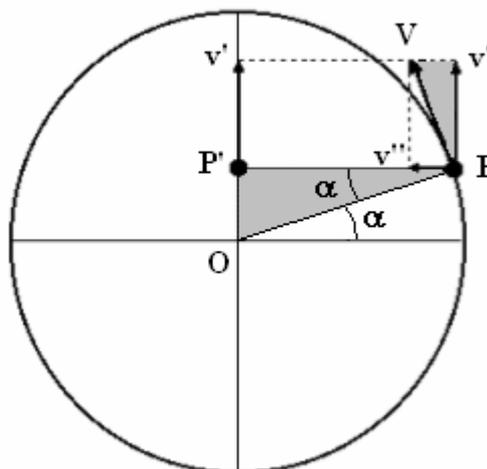
$$a : a' = OP : OP'$$

$$a : a' = r : s$$

Cioè

$$a' = \frac{a \cdot s}{r} \rightarrow a' = \frac{\omega^2 r s}{r} = \omega^2 s$$

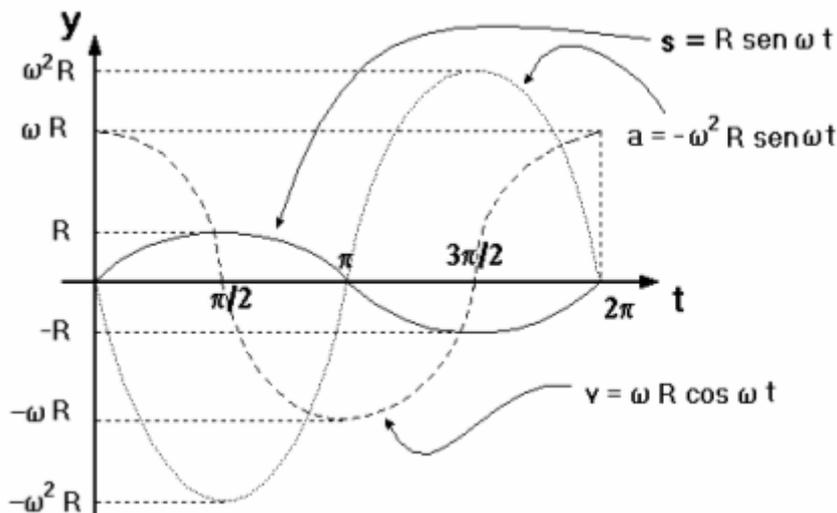
e, sostituendo la (11-3)



$$(11-5) \quad a = -\omega^2 r \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Si noti **il segno meno** all'inizio della formula, dovuto al fatto che **il vettore accelerazione** ha sempre direzione opposta **al vettore spostamento**.

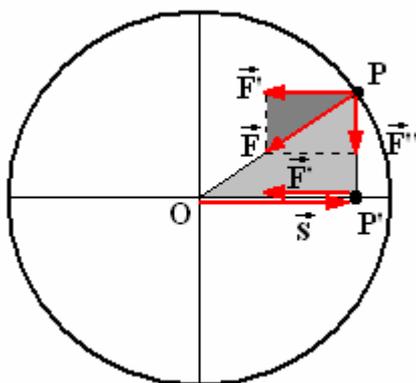
Riportando su uno stesso grafico cartesiano in funzione del tempo le tre leggi orarie della posizione (11-3), della velocità (11-4) e dell'accelerazione (11-5), si ottiene



Si noti come lo spazio e l'accelerazione siano entrambi nulli negli stessi istanti, e quando uno di essi è massimo, l'altra è minima e viceversa.

Invece la velocità è nulla negli istanti in cui lo spazio e l'accelerazione assumono valori rispettivamente massimo e minimo.

### 11-3. Approccio dinamico



Si abbia ora un punto P di massa m e il punto P' (anch'esso di massa m), proiettato sul diametro orizzontale, come indicato nella figura a fianco.

Le 11-3, 11-4, 11-5 continuano ad essere valide (basterà modificare opportunamente lo sfasamento  $\varphi$ ), ed il punto P' si muove di moto armonico sul diametro orizzontale.

Il punto P è sottoposto alla forza centripeta  $\vec{F}$  la cui lunghezza è

$$F = m \frac{V^2}{r} = \frac{m}{r} \left( \frac{2\pi r}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 m r}{T^2}$$

Scomponiamo questa forza in due componenti  $\vec{F}'$  e  $\vec{F}''$ .

Il moto di P' è dovuto alla sola componente  $\vec{F}'$ .

Proponiamoci di calcolare tale componente sfruttando la similitudine fra i due triangoli colorati.

$$F : F' = OP : OP'$$

$$F : F' = r : s$$

cioè

$$F' = \frac{F \cdot s}{r} = \frac{4\pi^2 m r}{T^2} \frac{s}{r} = \frac{4\pi^2 m}{T^2} s$$

Indichiamo genericamente con  $k$  l'espressione frazionaria costante, con  $\vec{F}$  (al posto della componente  $\vec{F}'$ ) la forza che produce il moto armonico, e con  $\vec{s}$  il vettore spostamento. Inoltre osservando la figura precedente si può notare che il vettore spostamento ha sempre verso contrario al vettore forza.

Quindi la legge fisica che caratterizza il comportamento meccanico del moto armonico e'

$$(11-6) \quad \vec{F} = -k\vec{s} \quad (\text{in cui} \quad k = \frac{4\pi^2 m}{T^2})$$

Questa legge e' molto importante e permette di stabilire con assoluta sicurezza quando un moto e' armonico o no: **un moto e' armonico se il rapporto fra forza applicata ed accelerazione e' costante e se questa costante e' negativa.**

Questa costante, come già accennato nel paragrafo 5 del capitolo 3, prende il nome di **costante elastica di richiamo**.

Dalla relazione fra parentesi della (11-6) possiamo ottenere **il periodo T del moto armonico**. Infatti

$$(11-7) \quad T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Si noti un particolare estremamente importante: **il periodo non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni.**

Infine osserviamo che la pulsazione  $\omega$  del moto armonico e' data da

$$(11-8) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{k}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

## 11-4. Il pendolo

Prendiamo ora in considerazione un punto P di massa  $m$  che oscilla intorno ad un punto fisso O, perché ancorato ad esso per mezzo di un filo inestensibile, flessibile e di massa trascurabile rispetto alla massa del punto P.

Dando al punto P un piccolo urto esso oscilla perché la forza peso agisce da forza di richiamo ed il sistema prende il nome di pendolo.

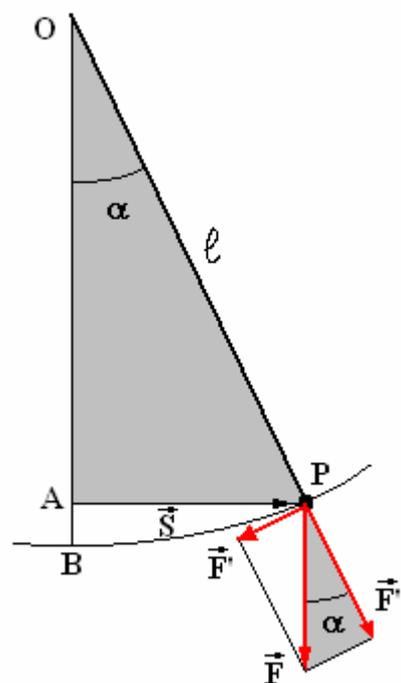
Il pendolo si muove di moto armonico? E' quello che ci accingiamo a dimostrare.

Osservando la figura a sinistra vediamo che l'unica forza agente su P e' la forza peso

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Questa forza può essere scomposta nelle due componenti  $\vec{F}'$  ed  $\vec{F}''$  rispettivamente tangente e normale al moto.

La componente  $\vec{F}''$  è diretta lungo il filo ed ha come unico effetto quello di mantenerlo teso, ma non può influire sul moto del punto P.



L'unica forza responsabile del moto è la forza  $\vec{F}'$  che possiamo calcolare grazie alla solita similitudine fra i due triangoli colorati.

$$OP:AS = F:F'$$

$$\ell:s = mg:F'$$

cioè

$$F' = \frac{mgs}{\ell} = \frac{mg}{\ell}s$$

o anche, indicando semplicemente con  $F$  la forza che provoca il moto del punto  $P$ , ed osservando che i vettori  $F$  ed  $s$  hanno sempre verso opposto fra loro,

$$(11-9) \quad F = -ks \quad \left(\text{con } k = \frac{mg}{\ell}\right)$$

che rappresenta appunto la legge caratteristica dei moti armonici (forza proporzionale allo spostamento, con costante di proporzionalità negativa).

Dunque il moto del pendolo è un moto armonico.

Però abbiamo data per scontata una approssimazione: il punto  $P$  in realtà non si muove sul segmento rettilineo  $AP$ , ma su un arco di circonferenza  $PB$ .

Ebbene, **se l'ampiezza delle oscillazioni a non e' molto grande** (al massimo qualche grado), la differenza fra il segmento  $AP$  e l'arco  $PB$  e' talmente piccola da essere del tutto trascurabile.

Il periodo del pendolo, ricordando la formula (11-7), e'

$$(11-10) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{\ell}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Questa formula e' molto importante perché se ne possono trarre le seguenti importanti deduzioni:

1. Le oscillazioni hanno sempre la stessa durata (sono **isocrone**) anche se l'ampiezza gradualmente diminuisce, infatti nella (10-10) non e' presente l'ampiezza delle oscillazioni  $\alpha$ .
2. Il periodo non dipende dalla massa, infatti nella (10-10) non e' presente la massa.

Inoltre il periodo è direttamente proporzionale alla radice quadrata della lunghezza del pendolo, ed inversamente proporzionale alla radice quadrata dell'accelerazione di gravità.

Concludiamo con un paio di importanti considerazioni finali sui corpi oscillanti (o ruotanti).

Ogni oggetto che ruota tende sempre a mantenere costante l'orientamento del proprio piano di rotazione.

Basta pensare ad una trottola, che si mantiene dritta in equilibrio solo se è in rotazione, altrimenti si poggia su un fianco nella sua posizione di equilibrio stabile.

Anche il pendolo oscillando descrive una parziale rotazione e quindi tende a mantenere invariato il proprio piano di oscillazione.

In effetti, come dimostrò Foucault per primo, il piano di oscillazione di un pendolo (se il filo cui esso e' sospeso non e' rigido), sembra ruotare lentamente, ma in effetti **e' la terra che ruota attorno al pendolo mentre questo continua ad oscillare sul proprio piano**.

Inoltre osserviamo che la formula (10-10) può essere usata per calcolare il valore dell'accelerazione di gravità  $g$ : basta applicare la formula inversa

$$(11-11) \quad g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}$$

## 11-5. L'energia nel moto armonico

Riportando la (11-6) su un piano cartesiano, si ha un grafico corrispondente ad una retta passante per l'origine.

L'ordinata è orientata verso il basso per convenienza, in modo che il triangolo colorato risulti sopra le ascisse anziché sotto.

Se tendiamo (per esempio una molla) fino ad ottenere un allungamento  $x_0$  rispetto alla posizione di riposo (coincidente con l'origine degli assi), è necessaria una

forza  $F = kx_0$  (tralasciamo il segno meno che indica soltanto la direzione della forza).

Ricordando quanto detto nel capitolo 2, paragrafo 5, l'area del triangolo colorato corrisponde al lavoro che è stato necessario per tendere la molla, e quindi all'energia che è stata spesa ed immagazzinata nella molla stessa.

In altre parole è una energia potenziale che può essere restituita in ogni istante per compiere un lavoro.

Se rilasciamo la molla, questa si muoverà con moto armonico trasformando l'energia potenziale in energia cinetica.

Per il principio di conservazione dell'energia meccanica la molla oscillando avrà in ogni istante una energia cinetica ed una energia potenziale la cui somma rimane costante nel tempo.

In realtà le oscillazioni andranno gradualmente spegnendosi ed il moto sarà **armonico smorzato**, perché l'energia viene gradualmente dissipata e trasformata in calore ed energia interna.

Comunque, ignorando per il momento questo aspetto, calcoliamo l'energia che una molla acquista se viene allungata di una lunghezza  $x_0$ , cioè calcoliamo l'area del triangolo mostrato in figura.

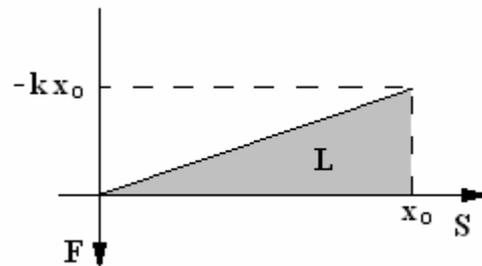
$$L = \frac{x_0 \cdot kx_0}{2} = \frac{1}{2} kx_0^2$$

Prendendo in considerazione anche l'energia cinetica, come si è detto prima, l'energia meccanica totale di un oscillatore armonico è in ogni istante

$$E_c + E_p = \text{costante}$$

(11-12)

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx_0^2 = \text{costante}$$



## 11-6. Equazione differenziale del moto armonico

Dalla (11-6), indichiamo la forza applicata con  $F(t)$  e lo spostamento con  $x(t)$ , in quanto sono funzioni che variano nel tempo.

Si ha

$$F(t) = -kx(t)$$

Ma per semplicità lasciamo sottintesa la variabile  $t$ , e tralasciamo la notazione vettoriale.

Si ha

$$F = -kx$$

$$ma = -kx$$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

$$a + \frac{k}{m}x = 0$$

cioè

$$(11-13) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

che è una equazione lineare del secondo ordine la cui soluzione è una funzione  $x(t)$  che derivata due volte deve rimanere la stessa ma con segno cambiato (a parte il fattore costante  $k/m$ ).

Le funzioni seno e coseno hanno proprio questa caratteristica (per esempio

$x = \cos t \rightarrow x' = -\sin t \rightarrow x'' = -\cos t$ ) e quindi la soluzione della (11-13) è del tipo

$$(11-14) \quad x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

deriviamo la (11-14) rispetto al tempo

$$(11-15) \quad \frac{dx}{dt} = x' = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

deriviamo ancora

$$(11-16) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = x'' = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Ora sostituiamo le (11-16) e (11-14) nella (11-13). Otteniamo

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{k}{m}(A \cos(\omega t + \varphi))$$

$$A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{k}{m} A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La costante  $\omega$  viene anche chiamata **pulsazione**, ed è importante osservare che **non dipende dall'ampiezza del moto**.

La (11-14) diviene allora

$$(11-17) \quad x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

che rappresenta la soluzione dell'equazione differenziale (11-13), cioè la legge oraria del moto armonico.

I parametri  $A$  e  $\varphi$  sono determinati dalle **condizioni iniziali**, cioè dai valori che la (11-17) assume quando il tempo  $t = 0$ .

## 11-7. Il moto armonico smorzato

Nel paragrafo 5 abbiamo evidenziato il fatto che nel moto armonico l'energia potenziale (per esempio di una molla) si trasforma ciclicamente in energia cinetica e viceversa, e che la somma delle due energie è costante.



In realtà le oscillazioni gradualmente vanno spegnendosi perché l'energia meccanica si trasforma per attrito in energia termica o in energia interna (che verrà preso in esame quando verrà affrontata la termodinamica).

Questo smorzamento può essere aumentato (per studiare meglio le sue caratteristiche) ponendo per esempio sotto una molla (vedi figura) un recipiente contenente un liquido: un disco immerso nel liquido agisce da ammortizzatore e smorza più rapidamente le oscillazioni.

Oltre alla forza elastica di richiamo esiste **una seconda forza proporzionale alla velocità del moto, anch'essa diretta in verso contrario alla forza  $F$** , e proporzionale al coefficiente di viscosità del liquido (o comunque del mezzo in cui si trova immersa la massa oscillante, per esempio l'aria).

$$F = -kx - bv$$

$$F = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

$$ma = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

$$a = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m} \frac{dx}{dt}$$

L'equazione differenziale (10-13) diviene quindi

$$(11-18) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

La soluzione è una funzione di tipo esponenziale

$$(11-19) \quad x(t) = e^{ht}$$

con  $h$  incognita da determinare.

Derivando due volte successivamente una funzione di questo tipo, si ha

$$x' = \frac{dx}{dt} = he^{ht} \quad \rightarrow \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = h^2e^{ht}$$

e, sostituendo nella (11-18), si ottiene

$$h^2e^{ht} + \frac{b}{m}he^{ht} + \frac{k}{m}e^{ht} = 0$$

Semplificando si ricava quella che viene definita **equazione caratteristica** della (11-18)

$$h^2 + \frac{b}{m}h + \frac{k}{m} = 0$$

$$(11-20) \quad mh^2 + bh + k = 0$$

Risolviamo rispetto alla incognita h

$$h = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = \begin{cases} h_1 \\ h_2 \end{cases}$$

Esistono quindi due soluzioni per la (11-19)

$$\begin{cases} x(t) = e^{h_1 t} \\ x(t) = e^{h_2 t} \end{cases}$$

e la soluzione generale della (11-18) è una loro combinazione lineare

$$(11-21) \quad x(t) = C_1 e^{h_1 t} + C_2 e^{h_2 t}$$

A questo punto possono verificarsi tre situazioni diverse a seconda che

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4mk > 0 \\ \Delta = b^2 - 4mk = 0 \\ \Delta = b^2 - 4mk < 0 \end{cases}$$

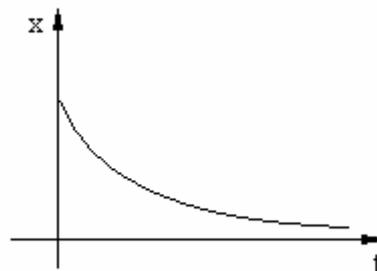
- $\Delta > 0$  I due valori  $h_1$  e  $h_2$  sono entrambi negativi (perché la (11-21) è una equazione di secondo grado che presenta due permanenze).

Ne deriva che i due esponenziali diventano sempre più piccoli al passare del tempo, ed entrambi i termini della (11-21) tendono ad annullarsi.

Ciò significa che il moto armonico assume un andamento del tipo mostrato qui a fianco.

Il moto è definito **aperiodico**.

La viscosità del liquido è talmente elevata che non si ha alcuna oscillazione.



- $\Delta = 0$  Si hanno due valori coincidenti  $h = h_1 = h_2$  entrambi negativi. La soluzione generale è del tipo

$$x(t) = C_1 e^{ht} + C_2 t e^{ht}$$

Il moto è sempre aperiodico, ma viene detto **aperiodico critico**, in quanto la viscosità assume il valore minimo per impedire l'oscillazione. In questo caso l'ammortizzazione, il ritorno a zero, avviene nel tempo più breve possibile.

- $\Delta < 0$  I due valori di  $h_1$  e  $h_2$  sono

$$h_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{4m^2}} = -\frac{b}{2m} \pm i\omega$$

Dove abbiamo indicato con  $i\omega$  il valore immaginario del radicale (in quanto il radicando è negativo).

E la soluzione generale è del tipo

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{b}{2m}t} e^{i\omega t} + C_2 e^{-\frac{b}{2m}t} e^{-i\omega t}$$

cioè

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})$$

Applicando la formula di Moivre si ha

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

cioè

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} [C_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t)]$$

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} [(C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t]$$

ponendo

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 \sin \varphi \\ i(C_1 - C_2) = x_0 \cos \varphi \end{cases}$$

si ha

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} [x_0 \sin \varphi \cos \omega t + x_0 \cos \varphi \sin \omega t]$$

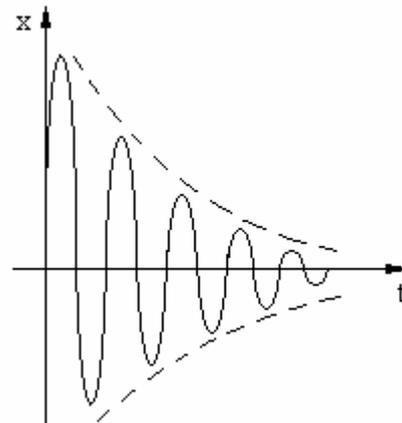
$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} x_0 [\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t]$$

e, finalmente,

$$(11-22) \quad x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Questa funzione è costituita da una armonica sinusoidale  $x_0 \sin(\omega t + \varphi)$  moltiplicata per un

fattore esponenziale  $e^{-\frac{b}{2m}t}$  che rende via via più piccola l'ampiezza dei picchi, causando lo smorzamento progressivo delle oscillazioni.



## 11-8. Oscillazioni armoniche forzate

Può avvenire, durante l'oscillazione di un sistema, che una forza periodica esterna fornisca al sistema stesso l'energia necessaria a mantenere costanti le oscillazioni impedendo che queste si smorzino.

E' il caso, per esempio, di un motore che vibra per effetto delle vibrazioni dovute alle irregolarità delle parti rotanti, o del cono di un altoparlante sotto l'azione degli impulsi provenienti da uno stereo.

Indichiamo questa forza esterna con l'espressione

$$(11-23) \quad F_e = F \sin(\omega t)$$

in cui  $F$  è l'ampiezza massima e  $\omega$  la sua pulsazione.

Con un ragionamento analogo a quello fatto per ricavare la (11-18), avremo

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F \sin(\omega t)$$

in cui il primo membro esprime la forza complessiva agente sul sistema.

Il primo termine del secondo membro è la forza elastica di richiamo che esprime in altre parole la capacità del sistema di reagire alle perturbazioni anche in assenza di smorzamento e di forza esterna.

Il secondo termine è la forza che tende a provocare lo smorzamento, e il terzo termine è la forza esterna che contrasta lo spegnimento e mantiene le oscillazioni.

Ordinando si ottiene

$$(11-24) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F \sin(\omega t)$$

La soluzione  $x(t)$ , poiché il sistema oscilla in modo persistente, deve avere una caratteristica sinusoidale con la stessa pulsazione  $\omega$  della forza esterna, ma con una opportuna ampiezza massima  $x_0$  ed un opportuno sfasamento  $\varphi$ .

In altre parole la soluzione deve essere del tipo

$$(11-25) \quad x(t) = x_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

Sviluppiamo la (11-25) con le formule di addizione e sottrazione, e deriviamola successivamente due volte

$$x = x_0 \sin \omega t \cos \varphi - x_0 \cos \omega t \sin \varphi$$

$$\frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos \varphi \cos \omega t + x_0 \omega \sin \varphi \sin \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \cos \varphi \sin \omega t + x_0 \omega^2 \sin \varphi \cos \omega t$$

ora sostituiamo i risultati nella (11-24)

$$\begin{aligned} & m(-x_0 \omega^2 \cos \varphi \sin \omega t + x_0 \omega^2 \sin \varphi \cos \omega t) + \\ & + b(x_0 \omega \cos \varphi \cos \omega t + x_0 \omega \sin \varphi \sin \omega t) + \\ & + k(x_0 \sin \omega t \cos \varphi - x_0 \cos \omega t \sin \varphi) = F \sin \omega t \end{aligned}$$

sviluppamo e ordiniamo

$$\begin{aligned} & \sin \omega t (bx_0 \omega \sin \varphi - mx_0 \omega^2 \cos \varphi + kx_0 \cos \varphi) + \\ & + \cos \omega t (bx_0 \omega \cos \varphi + mx_0 \omega^2 \sin \varphi - kx_0 \sin \varphi) = F \sin \omega t \end{aligned}$$

Applichiamo ora il principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} bx_0 \omega \sin \varphi - mx_0 \omega^2 \cos \varphi + kx_0 \cos \varphi = F \\ bx_0 \omega \cos \varphi + mx_0 \omega^2 \sin \varphi - kx_0 \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

Si ottiene un sistema lineare in cui le incognite sono  $x_0$  e  $\varphi$ .

Conviene risolverlo usando due variabili ausiliarie  $X = x_0 \sin \varphi$  e  $Y = x_0 \cos \varphi$ . Con tali variabili il sistema diviene

$$\begin{cases} b\omega X - (m\omega^2 - k)Y = F \\ (m\omega^2 - k)X + b\omega Y = 0 \end{cases}$$

Risolvendo con la regola di Cramer si ha

$$\begin{cases} X = \frac{\begin{vmatrix} F & m\omega^2 - k \\ 0 & b\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b\omega & m\omega^2 - k \\ m\omega^2 - k & b\omega \end{vmatrix}} = \frac{b\omega F}{b^2\omega^2 - (m\omega^2 - k)^2} \\ Y = \frac{\begin{vmatrix} b\omega & F \\ m\omega^2 - k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b\omega & m\omega^2 - k \\ m\omega^2 - k & b\omega \end{vmatrix}} = \frac{F(k - m\omega^2)}{b^2\omega^2 - (m\omega^2 - k)^2} \end{cases}$$

cioè

$$(11-27) \quad \begin{cases} x_0 \sin \varphi = \frac{b\omega F}{b^2\omega^2 - (m\omega^2 - k)^2} \\ x_0 \cos \varphi = \frac{F(k - m\omega^2)}{b^2\omega^2 - (m\omega^2 - k)^2} \end{cases}$$

Dividendo membro a membro, si ha

$$(11-28) \quad \tan \varphi = \frac{b\omega}{k - m\omega^2} \rightarrow \varphi = \arctan \frac{b\omega}{k - m\omega^2}$$

mentre elevando al quadrato le (11-27) e sommando membro a membro, si ha

$$x_0^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \frac{F^2 [b^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2]}{[b^2\omega^2 - (m\omega^2 - k)^2]^2} = \frac{F^2}{b^2\omega^2 - (m\omega^2 - k)^2}$$

cioè

$$(11-29) \quad x_0 = \frac{F}{\sqrt{b^2\omega^2 - (m\omega^2 - k)^2}}$$

Infine, sostituendo le (11-28) e (11-29) nella (11-25), si ottiene

$$(11-30) \quad x(t) = \frac{F}{\sqrt{b^2\omega^2 - (m\omega^2 - k)^2}} \sin \left( \omega t - \arctan \frac{b\omega}{k - m\omega^2} \right)$$

che fornisce l'elongazione del sistema in funzione del tempo.

Ma questa funzione rappresenta una **soluzione particolare** dell'equazione differenziale (11-24).

La **soluzione generale** è la somma della soluzione della **omogenea associata** (11-22) e della (11-30).

Ma mentre le oscillazioni dovute alla (11-22) vanno decrescendo nel tempo, dopo un intervallo di tempo opportuno (detto transitorio), il contributo fornito dalla (11-22) si annulla e il sistema oscilla stabilmente con una funzione coincidente con la (11-30).

Dividendo per  $m$  sia il numeratore che il denominatore del primo fattore della (11-30) e numeratore e denominatore dell'argomento dell'arco tangente, la (11-30) può essere messa sotto la forma

$$x(t) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\frac{b^2\omega^2}{m^2} - \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)^2}} \sin \left( \omega t - \arctan \frac{\frac{b\omega}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} \right)$$

a questo punto possiamo osservare che l'espressione  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  corrisponde a  $\omega_0$  cioè alla pulsazione

che l'oscillatore avrebbe se non fosse smorzato e se non agisse la forza esterna  $F$ .

Questa viene anche detta **pulsazione propria** dell'oscillatore (in altre parole se abbiamo per esempio una struttura rigida come la carrozzeria di un'auto, è la pulsazione con cui vibrerebbe la carrozzeria se fosse percossa energicamente con un martello).

Mentre  $\omega$  è la pulsazione della forza esterna.

Con tale precisazione possiamo scrivere la (11-30) nel modo seguente

$$(11-31) \quad x(t) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\frac{b^2\omega^2}{m^2} - (\omega^2 - \omega_0)^2}} \sin \left( \omega t - \arctan \frac{\frac{b\omega}{m}}{\omega_0 - \omega^2} \right)$$

Si può verificare facilmente che nel caso in cui si abbia  $\omega = \omega_0$  la (11-31) diviene

$$(11-32) \quad x(t) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\frac{b^2 \omega^2}{m^2}}} \text{sen}(\omega t - \arctan \infty) = \frac{F}{b\omega} \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

e questa condizione viene detta di **risonanza**, e la pulsazione corrispondente è chiamata **pulsazione di risonanza**.

In condizioni di risonanza si verificano le condizioni più favorevoli affinché la forza esterna trasferisca energia al sistema.

Se il coefficiente  $b$  (responsabile dello smorzamento) è molto piccolo (per esempio mezzo poco viscoso), allora l'elongazione massima di  $x(t)$  diventa molto grande perché la  $b$  si trova nel

denominatore  $\left(\frac{F}{b\omega}\right)$ .

## CAP. 12 – LA GRAVITAZIONE

### 12-1. La legge della gravitazione universale

E' la legge secondo la quale tutti i corpi si attraggono fra loro, e fu scoperta nel 1665 da Isacco Newton.

Come risulta da suoi appunti, conoscendo il periodo di rivoluzione della Luna e la sua distanza dalla terra, egli calcolò l'accelerazione della Terra verso la Luna, e trovò un valore circa **3600 volte più piccolo** del valore medio esistente sulla superficie della Terra.

Newton osservò che tale valore corrispondeva all'ipotesi che l'accelerazione di gravità fosse **inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla Terra**.

Inoltre immaginò che le masse della Terra e della Luna potessero essere tutte concentrate nei rispettivi centri.

Indichiamo con  $M$  ed  $m$  le masse rispettivamente della Terra e della Luna, con  $r$  la distanza fra i loro centri.

L'accelerazione di gravità che la Terra esercita sulla Luna deve dunque essere inversamente proporzionale al quadrato della distanza e proporzionale alla massa della Terra

$$(12-1) \quad g(r) = G \frac{M}{r^2}$$

dove  $G$  è la costante di proporzionalità.

Inoltre la forza con cui la Luna viene attratta dalla Terra, per il secondo principio della dinamica, è

$$(12-2) \quad F = m g(r) \quad \text{cioè} \quad g(r) = \frac{F}{m}$$

dove  $g(r)$  può essere interpretata come la **forza** con cui la Terra attrae la **massa unitaria** posta alla distanza  $r$  da essa.

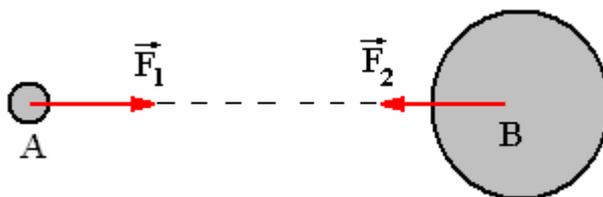
Confrontando le (12-1) e la seconda delle (12-2), si ottiene

$$\frac{F}{m} = G \frac{M}{r^2}$$

o anche

$$(12-3) \quad F = G \frac{mM}{r^2}$$

Questa è la forza con cui ciascuna delle due masse attrae l'altra.



Per il terzo principio della dinamica **le due forze devono essere uguali** (perché il sistema può essere considerato isolato in quanto l'azione del Sole e degli altri pianeti è trascurabile), anche se le due masse sono notevolmente differenti.

## 12-2. Le forze esistenti in natura

La legge (12-3) della gravitazione universale costituisce il raggiungimento di un caposaldo fondamentale nello studio della fisica.

Ma occorre precisare che nelle esperienze quotidiane non ci possiamo rendere conto della sua esistenza perché occorrono masse molto grandi per rendere evidente questa forza.

Quando inciampiamo e cadiamo a terra, ci accorgiamo con quanta forza la Terra ci attrae, ma si pensi che occorre tutta la massa di un pianeta affinché ciò accada !

Due corpi della massa di 100 kg, posti alla distanza di un metro, si attraggono con una forza equivalente al peso di un granello di sabbia !

Ciò è dovuto al fatto che la costante G (costante di gravitazione universale) ha un valore molto piccolo

$$(12-4) \quad G = 0,0000000000665 = 6,672 \cdot 10^{-11} \quad (\text{nel S.I.})$$

Inoltre si ricordi che le due forze con cui i corpi si attraggono sono sempre uguali ed opposte, anche se uno di essi ha una massa molto maggiore dell'altro. Quindi nell'esempio precedente la Terra ci attrae con una forza, ma anche noi esercitiamo sulla Terra una forza uguale e contraria.

Accenniamo ora al fatto che oltre alla forza gravitazionale, esistono in natura altre tre forze: quella **elettrostatica** e due altre forze che agiscono a livello subatomico e che vengono dette **forza nucleare forte** e **forza nucleare debole**.

La forza elettrostatica, al contrario di quella gravitazionale che può essere solo attrattiva, può essere sia attrattiva che repulsiva ed agisce fra due corpi carichi elettricamente.

Se le cariche elettriche dei due corpi sono uguali, la forza è repulsiva, mentre se queste sono di segno opposto, la forza è attrattiva.

La legge che la descrive (detta **legge di Coulomb**) ha una forma identica a quella gravitazionale, ma la costante di proporzionalità (costante dielettrica) dipende dal mezzo in cui si trovano i due corpi carichi.

$$(12-5) \quad F = \pm \epsilon \frac{qQ}{r^2}$$

in cui il segno è positivo o negativo a seconda che la forza sia attrattiva o repulsiva.

Confrontando fra loro le due forze (gravitazionale ed elettrostatica) si può constatare che quest'ultima è enormemente più grande dell'altra.

$$F_{\text{elett.}} = F_{\text{gravit.}} \cdot 100.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000 = F_{\text{gravit.}} \cdot 10^{38}$$

Ma per effetto della dipendenza di queste forze dall'inverso del quadrato della distanza, la loro intensità diminuisce molto rapidamente man mano che la distanza aumenta.

Ne deriva che per distanze modeste la forza elettrostatica produce effetti molto più importanti di quella gravitazionale.

Al contrario, quando sono in gioco grandi distanze, a livello astronomico, predomina la forza gravitazionale in cui i corpi celesti posseggono globalmente cariche elettriche bilanciate, ma enormi masse.

Infine esistono altre due forze che invece hanno un raggio d'azione estremamente limitato, dell'ordine di grandezza del diametro di un atomo o addirittura del diametro del nucleo di un atomo. La **forza nucleare forte** è quella che tiene uniti i nucleoni del nucleo. Infatti i protoni avendo tutti carica positiva tenderebbero ad allontanarsi gli uni dagli altri: questa forza agisce invece come collante e li tiene uniti. Ha un valore di un centinaio di volte superiore alla forza elettrostatica, ma ha una azione quasi di contatto: basta allontanare di poco un nucleone dal nucleo, che la sua azione termina di essere efficace.

Infine esiste la **forza nucleare debole** che ha un valore intermedio fra quella gravitazionale e quella elettrostatica, ha un raggio d'azione di poco superiore al raggio di un atomo, ed è la responsabile di quasi tutti i processi di decadimento radioattivo.

## 12-3. Massa inerziale e gravitazionale

Con la  $F = ma$  è possibile misurare la massa  $m$  di un corpo applicando ad esso una forza nota e calcolando l'accelerazione che il corpo assume come conseguenza.

In questo processo la gravità terrestre non interviene, si misura in altre parole l'inerzia, la difficoltà con cui il corpo di massa  $m$  modifica il proprio stato di moto.

Con la  $F = G \frac{mM}{r^2}$  è ancora possibile misurare la massa  $m$  di un corpo, ma con un procedimento differente: misurando la forza con cui la Terra lo attrae. In questo secondo processo interviene invece la gravità terrestre, ma non si prende in considerazione l'inerzia, la difficoltà con cui il corpo modifica il proprio stato di moto.

È possibile quindi misurare la massa  $m$  di un corpo con due procedimenti sostanzialmente diversi.

Ma questi due procedimenti misurano la stessa grandezza fisica ? I due valori di  $m$  sono uguali ?

Non è affatto detto, perché mentre nel primo caso misuriamo lo sforzo necessario per accelerare un corpo, anche nello spazio vuoto in assenza di pianeti che esercitino la loro azione gravitazionale.

Mentre nel secondo caso misuriamo lo sforzo necessario per mantenere il corpo fermo, sollevato da terra, e quindi senza sottoporlo ad alcuna accelerazione.

Per questo motivo si usa talvolta distinguere le due masse denominandole rispettivamente **massa inerziale** =  $m_i$  e **massa gravitazionale** =  $m_g$ .

Cioè

$$\begin{cases} F = m_i a \\ F = G \frac{m_g M}{r^2} \end{cases}$$

Non esiste purtroppo un metodo per stabilire in modo definitivo se le due masse sono uguali fra loro.

Newton per primo provò a farlo osservando che nel calcolo del periodo del pendolo (vedi formula 11-9) la costante elastica di richiamo è data da  $k = \frac{m_g g}{\ell}$  perché dovuta all'azione gravitazionale della Terra.

Inoltre nella formula (11-10) si ha  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_i}{k}}$  perché il moto armonico è dovuto alla natura inerziale della massa.

Sostituendo si ottiene

$$(12-6) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m_i}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_i}{\frac{m_g g}{\ell}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_i \ell}{m_g g}}$$

in cui compaiono entrambi i tipi di massa.

Soltanto se supponiamo uguali le due masse, si ottiene il risultato che avevamo annunciato nella

$$(11-10) \text{ e cioè che } T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Newton realizzò un pendolo cavo in cui inserì successivamente diverse sostanze con peso specifico diverso, ma stesso identico peso complessivo.

La forma esterna del pendolo era in ogni caso la stessa, e quindi anche la resistenza dell'aria era la stessa.

Se si fossero notate differenze nel calcolo del periodo, ciò sarebbe stato provocato dalla differenza di massa inerziale nelle varie prove.

Ma Newton non riuscì a registrare alcuna differenza, e ne arguì che le due masse dovevano essere uguali.

Successivamente si fecero esperimenti molto più sofisticati ed accurati, ma non si riuscì mai a trovare differenze fra le due masse.

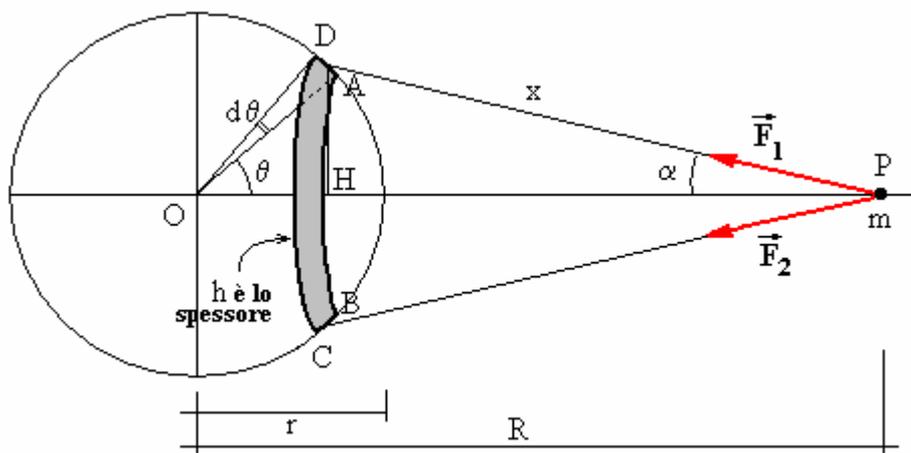
Finché Einstein con la sua teoria della relatività non introdusse il **principio di equivalenza**, in cui si postula l'uguaglianza fra i due tipi di massa.

## 12-4. Distribuzione sferica di massa

Nel primo paragrafo abbiamo accennato al fatto che la massa della Terra poteva essere immaginata come concentrata nel suo baricentro.

E' legittima una supposizione simile ?

Proponiamoci di dimostrarlo.



Sia dato il corpo di massa  $m$  nella posizione del punto  $P$ .

La sfera a sinistra rappresenta la Terra, ed indichiamo con  $r$  il suo raggio. Prendiamo in considerazione uno strato di spessore  $h$  con densità uniforme, ed avente la forma di una striscia circolare come indicato nella regione ombreggiata in figura.

Una generica particella di massa appartenente allo strato e posizionata nel punto  $A$ , esercita per la (12-3) una forza di attrazione  $\vec{F}_1$ .

Ma nel punto simmetrico  $B$  dello strato esiste un'altra particella di massa che esercita una forza di attrazione  $\vec{F}_2$ .

Le due forze  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  hanno componenti verticali che si annullano fra loro, e componenti orizzontali uguali e concordi che invece si sommano.

Per ogni punto della striscia ne esiste un altro simmetrico, e lo stesso avviene per ogni altra coppia di punti simmetrici.

La larghezza della striscia è  $\widehat{AD} = r d\theta$ , la sua lunghezza è  $2\pi \overline{AH} = 2\pi(r \sin\theta)$  ed  $h$  è lo spessore.

Ne risulta che il volume (infinitesimo) della striscia è

$$dV = 2\pi h r^2 \sin\theta d\theta$$

Se indichiamo con  $\rho = \frac{dM}{dV}$  cioè  $dM = \rho dV$  avremo

$$dM = 2\pi h \rho r^2 \sin\theta d\theta$$

Quindi, applicando la (12-3), la forza esercitata dalla massa infinitesima  $dM$  (posta in  $A$ ) sulla particella di massa  $m$  (posta in  $P$ ), è **una forza orizzontale** e la sua intensità è

$$(12-7) \quad dF = G \frac{m dM}{x^2} \cos \alpha = 2\pi G m h \rho r^2 \frac{\sin \theta d\theta}{x^2} \cos \alpha$$

Nel triangolo BHC si ha

$$(12-8) \quad \cos \alpha = \frac{HP}{AP} = \frac{R - r \cos \theta}{x}$$

Ma per il teorema di Carnot applicato al triangolo AOP si ha anche

$$(12-9) \quad x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$$

$$(12-10) \quad r \cos \theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R}$$

cioè, sostituendo nella (12-8),

$$(12-11) \quad \cos \alpha = \frac{R - \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R}}{x} = \frac{R^2 - r^2 + x^2}{2Rx}$$

Differenziamo ora la (12-9), ricordando che R ed r sono costanti, mentre x e  $\theta$  sono variabili

$$2x dx = 2Rr \sin \theta d\theta \quad \rightarrow \quad \sin \theta d\theta = \frac{x}{Rr} dx$$

Infine sostituiamo quest'ultima relazione e la (12-11) nella (12-7)

$$dF = 2\pi G m h \rho r^2 \frac{\frac{x}{Rr} dx}{x^2} \frac{R^2 - r^2 + x^2}{2Rx}$$

ordiniamo e semplifichiamo

$$(12-12) \quad dF = \frac{\pi G m h \rho r}{R^2} \frac{R^2 - r^2 + x^2}{x^2} dx$$

$$dF = \frac{\pi G m h \rho r}{R^2} \left( \frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx$$

Questa è la forza esercitata da tutta la striscia circolare infinitesima sulla massa m posta in P. Ora integriamo rispetto alla variabile x, fissando come estremi di integrazione R-r e R+r, cioè estendendo tutta la striscia infinitesima fino a farle assumere le dimensioni di tutta la sfera.

$$(12-13) \quad F = \int_{R-r}^{R+r} \frac{\pi G m h \rho r}{R^2} \left( \frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx = \frac{\pi G m h \rho r}{R^2} \int_{R-r}^{R+r} \left( \frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx$$

Ma sviluppando l'integrale si ottiene

$$\int_{R-r}^{R+r} \left( \frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx = \int_{R-r}^{R+r} \frac{R^2 - r^2}{x^2} dx + \int_{R-r}^{R+r} dx = (R^2 - r^2) \int_{R-r}^{R+r} \frac{1}{x^2} dx + \int_{R-r}^{R+r} dx =$$

$$= (R^2 - r^2) \left[ -\frac{1}{x} \right]_{R-r}^{R+r} + [x]_{R-r}^{R+r} = (R^2 - r^2) \left( -\frac{1}{R+r} + \frac{1}{R-r} \right) + (R+r - R+r) =$$

$$= (R^2 - r^2) \frac{-R+r+R+r}{R^2 - r^2} 2r = 4r$$

Sostituendo nella (12-13) si ha infine

$$F = \frac{\pi G m h \rho r}{R^2} 4r = G \frac{(4\pi r^2 \rho h) m}{R^2}$$

Ma l'espressione dentro parentesi tonda rappresenta la massa di tutto lo strato sferico, con densità uniforme, spessore h, e ricoprente tutta la Terra.

Quindi si ha

$$(12-4) \quad F = G \frac{M m}{R^2}$$

che è appunto lo stesso risultato che avremmo ottenuto immaginando la massa della Terra tutta concentrata nel suo centro.

Occorre infine aggiungere che la Terra può essere considerata come un gran numero di strati omogenei (anche se con densità differente), e ad ognuno di tali strati può essere applicato il criterio precedente.

La dimostrazione presuppone che il corpo in esame sia sferico, e che la densità sia funzione del raggio. Ma questa condizione è soddisfatta per ogni corpo celeste, quindi la massa di un pianeta può sempre immaginarsi concentrata tutta nel suo centro.

Si noti che se la massa  $m$  è posizionata in un punto  $P$  interno allo strato sferico, l'integrale

$$\int_{R-r}^{R+r} \left( \frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx$$

modifica i propri estremi di integrazione

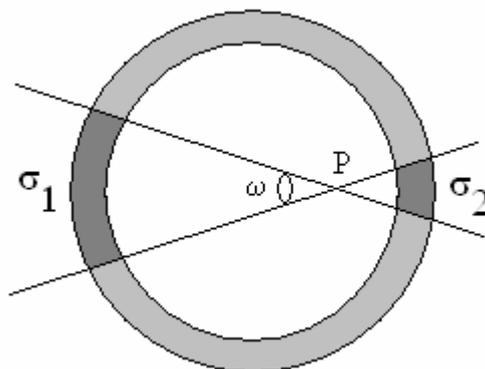
$$\int_{r-R}^{r+R} \left( \frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx$$

e, come si può facilmente constatare, è nullo. Quindi la forza esercitata dallo strato sulla massa  $m$ , è nulla.

Infatti considerando un generico cono indefinito con vertice nel punto  $P$  ed apertura pari all'angolo solido  $\omega$ , questo delimita sullo strato due regioni  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

La regione  $\sigma_2$  possiede una quantità di massa minore della regione  $\sigma_1$ , ma la massa è più vicina e quindi esercita una forza attrattiva maggiore.

I due effetti si compensano esattamente, come si è dimostrato matematicamente in precedenza, anche se l'angolo solido  $\omega$  si apre fino a quando le due regioni  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  non ricoprono tutto lo strato.



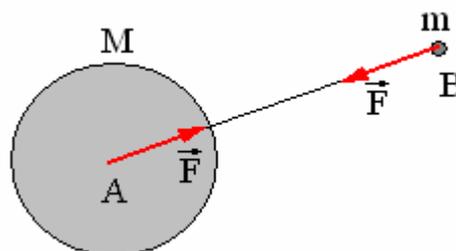
## 12-5. Il campo gravitazionale

Prendiamo in considerazione il pianeta Terra ed un oggetto qualsiasi di massa  $m$  posto ad una distanza  $d$  dal centro della Terra.

I due corpi sono quindi attratti da due forze uguali e contrarie, e l'intensità della forza è data dalla formula

$$(12-5) \quad F = G \frac{mM}{d^2}$$

Questa forza diminuisce rapidamente con il quadrato della distanza  $d$ , ma teoricamente si estende fino a distanza infinita.



Possiamo associare ad ogni punto dello spazio circostante la Terra, la forza con cui una massa  $m$  viene attratta: in questo modo definiamo un **campo vettoriale** (se avessimo associato ad ogni punto dello spazio una grandezza scalare, come per esempio la temperatura, avremmo avuto un campo scalare).

La massa  $m$  viene detta **massa esploratrice** o **massa di prova**, perché ci serve per stabilire quale sia il valore del campo associato a ciascun punto dello spazio.

Ma il campo così definito ha una grave limitazione: dipende dal valore della massa  $m$  scelta come massa di prova.

Dividendo la (12-5) per la massa  $m$  si ottiene  $\frac{F}{m} = G \frac{M}{d^2}$  e, per il secondo principio della dinamica,

il primo membro corrisponde all'accelerazione di gravità ( $\frac{F}{m} = g$ ) e quindi la (12-5) diviene

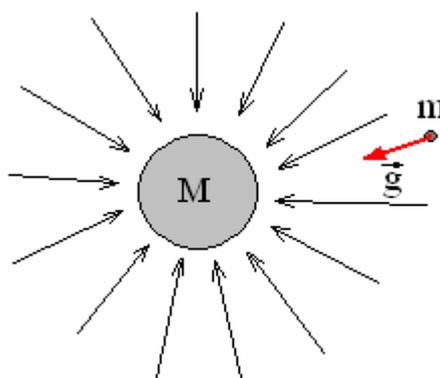
$$(12-6) \quad g = G \frac{M}{d^2}$$

Associando ad ogni punto dello spazio il valore dell'accelerazione di gravità, otteniamo una grandezza che non dipende più dal valore di  $m$ .

La (12-6) rappresenta quindi l'**intensità del campo gravitazionale**.

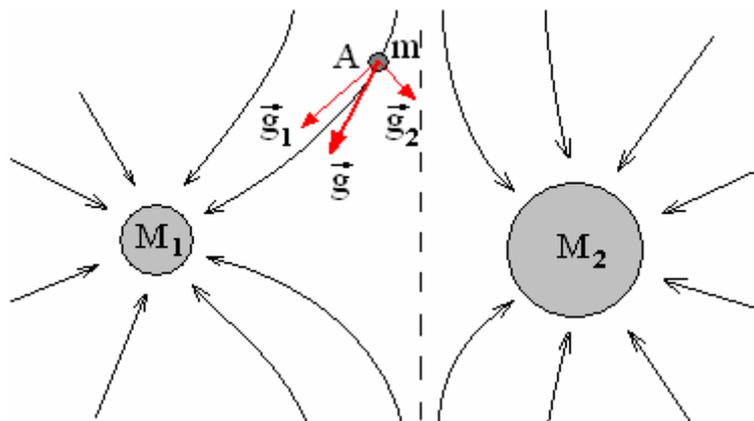
Una comoda rappresentazione grafica del campo gravitazionale è illustrata a fianco: le linee orientate dirette verso il centro della Terra vengono chiamate **linee di forza**, e rappresentano le traiettorie che la massa esploratrice seguirebbe se fosse lasciata libera di cadere (partendo da ferma).

Ovviamente tali linee sono infinitamente fitte e nella figura ne sono indicate solo alcune.



## 12-6. Il principio di sovrapposizione

Se il campo gravitazionale è generato da due (o più) corpi celesti, vale il principio di sovrapposizione.



Cioè la massa esploratrice  $m$  subisce l'attrazione del pianeta  $M_1$  come se l'altro non esistesse, e quindi è sottoposto all'accelerazione gravitazionale  $\vec{g}_1$ . Subisce anche l'attrazione del pianeta  $M_2$  come se l'altro non esistesse, ed è sottoposto anche all'accelerazione gravitazionale  $\vec{g}_2$ .

Le due accelerazioni di gravità, per la loro natura vettoriale, possono essere sommate dando luogo all'accelerazione  $\vec{g}$ , che rappresenta quindi il valore del campo generato dai due pianeti, nel punto A.

I due campi gravitazionali hanno quindi effetti che si sovrappongono fra loro.

Si noti che le linee di forza non sono più rettilinee, e vale una proprietà importante: in ogni punto dello spazio l'intensità del campo  $\vec{g}$  risulta **tangente alla linea di forza che passa per quel punto**.

La linea tratteggiata (in realtà è una superficie) rappresenta un insieme di punti in cui la massa di prova si troverebbe in una sorta di equilibrio (instabile) perché le due intensità di campo si equivalgono, e la massa si sposterebbe con moto armonico lungo di essa..

## 12-7. Energia potenziale gravitazionale

Nel secondo paragrafo del capitolo quinto abbiamo introdotto il concetto di energia potenziale.

Riprendiamo l'argomento approfondendolo e trattandolo su una scala più ampia.

Consideriamo la Terra e due punti generici A e B: analogamente a quanto già detto nel paragrafo menzionato, possiamo suddividere il percorso per spostare la massa esploratrice da A a B, in una serie (arbitraria) di spostamenti **radiali** e **circolari** come indicato nella figura.

Lungo gli archi di circonferenza il lavoro è nullo perché lo spostamento è perpendicolare alla forza applicata, mentre la somma dei lavori durante gli spostamenti radiali è sempre uguale al lavoro che sarebbe necessario compiere se i due punti A e B fossero direttamente allineati con il centro della Terra, e si effettuasse uno spostamento unico, come indicato nella seconda figura.

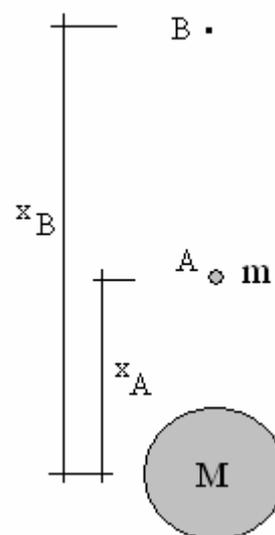
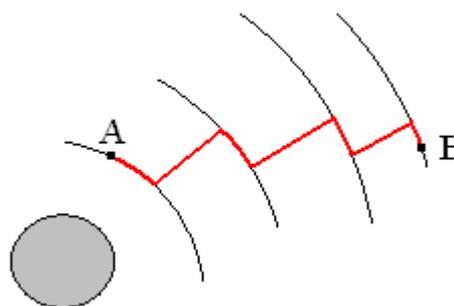
Il lavoro necessario per spostare la massa esploratrice dal punto A al punto B dello spazio (che corrisponde alla energia potenziale immagazzinata), ricordando la (5-5), è allora

$$(12-7) \quad L = \Delta U = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} G \frac{Mm}{x^2} dx$$

dove la variabile x indica appunto la distanza della massa m dal baricentro della Terra.

Sviluppando i calcoli si ottiene

$$(12-8) \quad \begin{aligned} \Delta U &= U_B - U_A = GMm \int_{x_A}^{x_B} \frac{1}{x^2} dx = \\ &= GMm \left[ -\frac{1}{x} \right]_{x_A}^{x_B} = GMm \left( \frac{1}{x_A} - \frac{1}{x_B} \right) \end{aligned}$$



Definiamo **energia potenziale in un generico punto a distanza x dal baricentro della Terra**, la quantità

$$(12-9) \quad U(x) = -GMm \frac{1}{x}$$

Con questa definizione si riottiene immediatamente la (12-8) come differenza di energia potenziale fra due punti

$$(12-10) \quad \Delta U = U_B - U_A = \left( -GMm \frac{1}{x_B} \right) - \left( -GMm \frac{1}{x_A} \right) = GMm \left( \frac{1}{x_A} - \frac{1}{x_B} \right)$$

Nel paragrafo summenzionato avevamo affermato che per sollevare un oggetto di massa m di un dislivello h, il lavoro necessario (e quindi l'energia potenziale immagazzinata) era

$$(12-11) \quad \Delta U = - \int_A^B (-mg) dx = -[-mgx]_A^B = -[-mgx_B + mgx_A] = mg(x_B - x_A) = mgh$$

La (12-10) non è in contraddizione con la (12-11), infatti dalla (12-10) possiamo ottenere

$$\Delta U = GMm \left( \frac{1}{x_A} - \frac{1}{x_B} \right) = GMm \frac{x_B - x_A}{x_A x_B} = G \frac{Mm}{x_A x_B} (x_B - x_A)$$

Ora immaginiamo che la massa m si trovi inizialmente sulla superficie della Terra (il cui raggio indicheremo con R), e innalziamola di un dislivello h.

Sarà  $x_A = R$  e  $x_B = R+h$  (con  $h \ll R$ ). Quindi, sostituendo,

$$\Delta U = G \frac{Mm}{x_A x_B} (x_B - x_A) = G \frac{Mm}{R(R+h)} (R+h - R) = G \frac{Mm}{R(R+h)} h$$

Ma possiamo considerare  $R+h \cong R$  e quindi scrivere

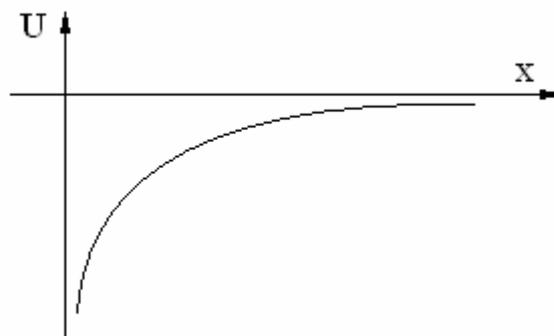
$$(12-12) \quad \Delta U = G \frac{Mm}{R^2} h = Fh = mgh$$

in quanto la forza gravitazionale F corrisponde al peso mg della massa esploratrice.

Quindi la (12-10) rappresenta la forma più generalizzata che si riduce alla (12-12) quando ci si trova vicini alla superficie della Terra e si effettuano spostamenti modesti in confronto al raggio della Terra.

Concludiamo osservando che la (12-9) ci permette di tracciare il grafico dell'energia potenziale in funzione della distanza x della massa esploratrice dalla massa M del pianeta che genera il campo gravitazionale.

Questo grafico è un ramo di iperbole equilatera. Si può notare che l'energia potenziale è sempre negativa, aumenta all'aumentare della distanza x, e si annulla solo a distanza infinita.



## 12-8. Potenziale e superfici equipotenziali

L'energia potenziale espressa dalla (12-9) dipende dal valore della massa esploratrice  $m$ . Se dividiamo la (12-9) per  $m$ , analogamente a quanto fatto nel definire l'intensità di campo, otteniamo una nuova grandezza, detta **potenziale**, che non dipende più dalla massa esploratrice.

$$(12-13) \quad V_x = \frac{U}{m} = -G \frac{M}{x}$$

Il potenziale si indica con la lettera  $V$ . Sia l'energia potenziale che il potenziale sono grandezze scalari.

Il potenziale può essere definito solo per i campi **conservativi**.

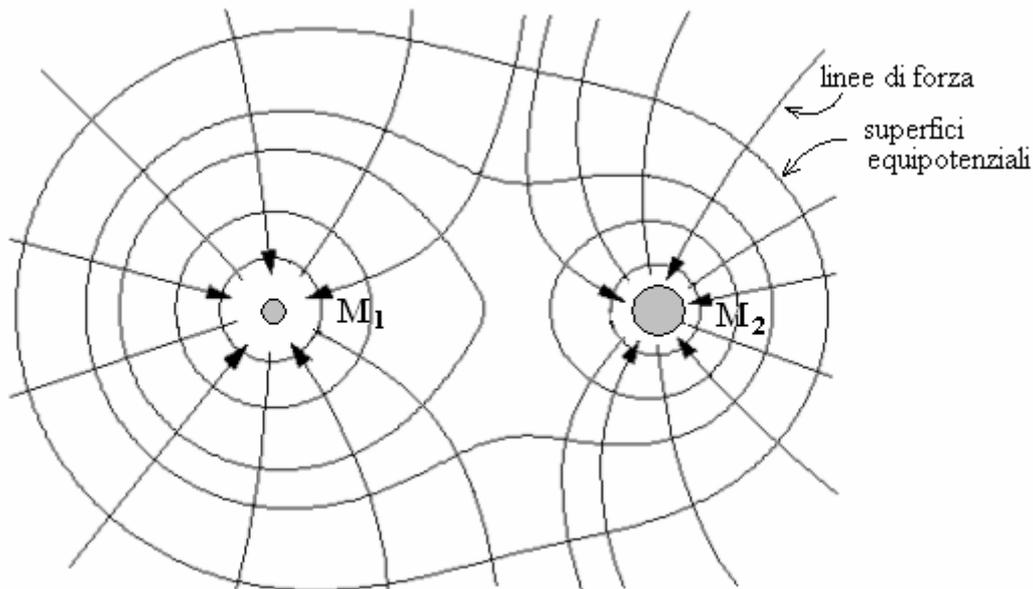
Occorre fare attenzione a non confondere l'energia potenziale, con il potenziale:

- L'energia potenziale in un punto è il lavoro che è necessario fornire alla massa  $m$  per portarla fuori dal campo (cioè a distanza infinita).
- Il potenziale in un punto corrisponde invece al lavoro che è necessario fornire **alla massa  $m$  unitaria** per portarla fuori dal campo (cioè a distanza infinita).

Dopo aver definito il potenziale in un punto, prendiamo in considerazione le **superfici equipotenziali**, cioè tutti quei punti di un campo che posseggono lo stesso valore del potenziale. In un campo radiale (generato da una sola massa  $M$ ) tutti i punti che si trovano su una stessa sfera concentrica con la massa  $M$ , hanno lo stesso potenziale (perché questo dipende solo dalla distanza  $x$ ).

Essi formano una superficie equipotenziale. Esistono quindi infinite superfici equipotenziali corrispondenti alle infinite sfere concentriche con  $M$ .

Se il campo è formato da due masse  $M_1$  ed  $M_2$ , il campo ha linee di forza che possono ottenersi applicando il principio di sovrapposizione.



Una proprietà delle superfici equipotenziali consiste nel fatto che le linee di forza sono sempre perpendicolari alle superfici equipotenziali nel punto in cui le attraversano (come si può controllare nella figura).

## 12-9. La prima legge di Keplero

Viene anche detta **legge delle orbite**: “tutti i pianeti descrivono orbite ellittiche intorno al Sole, e questo occupa uno dei due fuochi”.

Prima di dimostrare la legge, cominciamo a vedere qual è l'equazione di una ellisse in coordinate polari, perché normalmente ci è familiare soltanto l'equazione in coordinate cartesiane.

Sia data quindi una ellisse con semiassi  $a$  e  $b$  e semi distanza focale  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  (vedi figura).

Immaginiamo che un pianeta, per esempio la terra, si trovi nel fuoco  $F_1$  e un satellite si trovi invece in un generico punto  $P$  dell'ellisse.

Si ha (applicando il teorema di Carnot)

$$\begin{cases} F_1P = r \\ F_2P = \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cos \varphi} \end{cases}$$

Ma deve anche essere  $F_1P + F_2P = 2a$  e perciò

$$r + \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cos \varphi} = 2a$$

isolando il radicale, elevando al quadrato e semplificando si ottiene

$$(12-14) \quad \frac{b^2}{r} = a - c \cdot \cos \varphi$$

che è appunto l'equazione dell'ellisse in coordinate polari.

Se il pianeta si fosse trovato nel fuoco  $F_2$

invece che nel fuoco  $F_1$  (vedi seconda figura), con un procedimento analogo si ottiene

$$\begin{cases} F_1P = \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cos(\pi - \varphi)} = \\ = \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4rc \cos \varphi} \\ F_2P = r \end{cases}$$

e, sviluppando e semplificando, l'equazione dell'ellisse diviene in questo caso

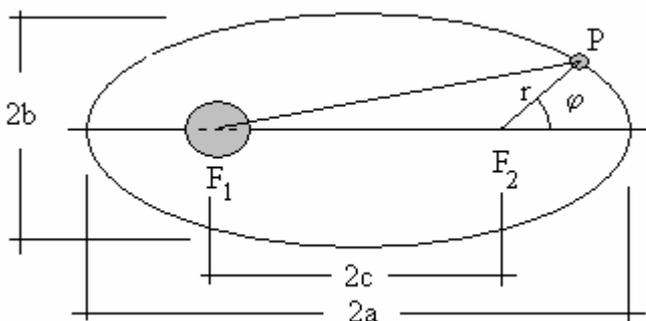
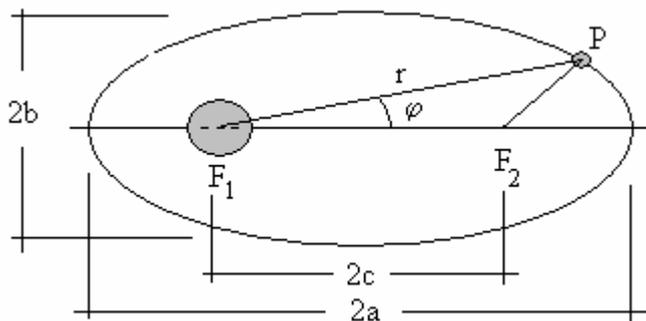
$$(12-15) \quad \frac{b^2}{r} = a + c \cdot \cos \varphi$$

simile alla precedente, con un solo segno diverso.

Quindi, unendo la (12-14) e la (12-15), l'equazione dell'ellisse è

$$(12-16) \quad \frac{b^2}{r} = a \pm c \cdot \cos \varphi$$

Passiamo ora alla dimostrazione della prima legge di Keplero.



Si abbia un pianeta di massa  $M$  ed un satellite di massa  $m$ , che si muove con velocità  $v$  ad una distanza  $r$  dal pianeta.

Di norma è  $m \ll M$  e quindi non commettiamo un grave errore immaginando il pianeta immobile e il satellite che gli gira intorno.

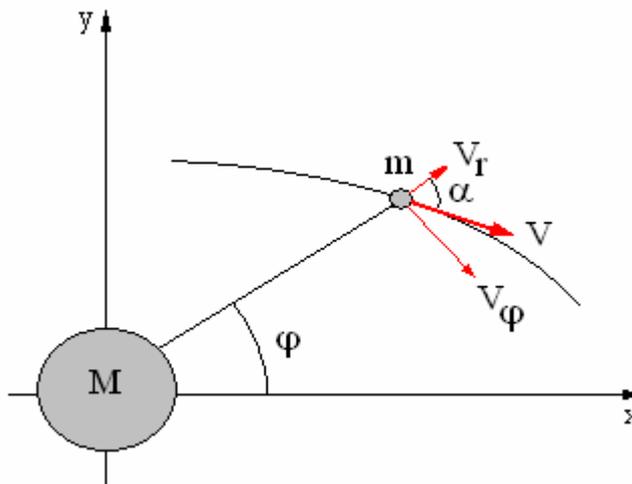
Per il principio della conservazione dell'energia, la somma della sua energia cinetica e della sua energia potenziale, deve essere costante.

Quindi possiamo scrivere

$$(12-17) \quad \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r} = E$$

Le due componenti della velocità lungo la direzione radiale e lungo la direzione trasversale sono

$$(12-18) \quad \begin{cases} V_r = v \cos \alpha = \frac{dr}{dt} \\ V_\phi = v \sin \alpha = r \frac{d\phi}{dt} \end{cases}$$



(in cui  $\frac{dr}{dt}$  è una velocità tradizionale, mentre  $\frac{d\phi}{dt}$  è una velocità angolare).

Sostituendo le (12-18) nella (12-17), si ha

$$(12-19) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} m (V_r^2 + V_\phi^2) - G \frac{Mm}{r} &= E \\ \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] &= E + G \frac{Mm}{r} \end{aligned}$$

Ma il momento della quantità di moto del satellite (vedi quarto paragrafo del capitolo ottavo), è

$$p = |\vec{r} \times \vec{q}| = r m V_\phi \sin 90^\circ = r m V_\phi = m r^2 \frac{d\phi}{dt}$$

da cui si ricava che

$$(12-20) \quad r \frac{d\phi}{dt} = \frac{p}{m}$$

Sostituendo la (12-20) nella (12-19), si ottiene

$$(12-21) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{p^2}{m^2 r^2} \right] &= E + G \frac{Mm}{r} \\ \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 &= E + G \frac{Mm}{r} - \frac{p^2}{2mr^2} \\ \frac{dr}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + G \frac{2M}{r} - \frac{p^2}{m^2 r^2}} \end{aligned}$$

Questa equazione differenziale si può integrare facilmente per separazione di variabili, e si ottiene la variazione di  $r$  in funzione di  $t$ , cioè la **legge oraria** del moto, ma noi intendiamo invece ricavare la **traiettoria** del satellite, non la legge oraria.

Dalle due relazioni (12-20) e (12-21)

$$(12-22) \quad \begin{cases} \frac{p}{mr} = r \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + G \frac{2M}{r} - \frac{p^2}{m^2 r^2}} \end{cases}$$

occorre quindi eliminare il parametro  $t$ , ed ottenere una funzione del tipo  $\varphi = f(r)$ .

Modifichiamo le (12-22) nel modo seguente

$$\begin{cases} d\varphi = \frac{p dt}{mr^2} \\ dr = \pm dt \sqrt{\frac{2E}{m} + G \frac{2M}{r} - \frac{p^2}{m^2 r^2}} \end{cases}$$

poi dividiamo membro a membro e semplifichiamo

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \pm \frac{p}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m} + G \frac{2M}{r} - \frac{p^2}{m^2 r^2}}} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{r^2} \frac{\pm 1}{\frac{p}{m} \sqrt{\frac{2E}{m} + G \frac{2M}{r} - \frac{p^2}{m^2 r^2}}} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{r^2} \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2Em}{p^2} + G \frac{2Mm^2}{p^2 r} - \frac{1}{r^2}}} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{r^2} \frac{\pm 1}{\sqrt{-\frac{2Em}{p^2} \left( -1 - G \frac{Mm}{rE} + \frac{p^2}{2Emr^2} \right)}} \end{aligned}$$

In questa espressione poniamo ora

$$-\frac{p^2}{2Em} = b^2 \quad \text{e} \quad -\frac{GMm}{E} = 2a$$

dove  $a$  e  $b$  sono coefficienti che hanno entrambi le dimensioni di una lunghezza, sono entrambi positivi, e rappresentano proprio i **semiassi della ellisse** descritta dal satellite.

Sostituendo si ha

$$(12-23) \quad \begin{aligned} d\varphi &= \frac{dr}{r^2} \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{1}{b^2} \left( -1 + \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{r^2} \right)}} \\ d\varphi &= \frac{dr}{r^2} \frac{\pm b}{\sqrt{-1 + \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{r^2}}} \end{aligned}$$

Ora integriamo i due membri di quest'ultima relazione, con tre sostituzioni successive.

Ponendo  $t = \frac{1}{r}$  si ha  $\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{r^2} \rightarrow dr = -r^2 dt$  e sostituendo nella (12-23) otteniamo

$$d\varphi = \frac{\mp b dt}{\sqrt{-1 + 2at - b^2 t^2}}$$

Ponendo poi  $s = b^2 t$  si ha  $t = \frac{s+a}{b^2} \rightarrow dt = \frac{1}{b^2} ds$   $s = b^2 t - a$  e, sostituendo e semplificando, si ottiene

$$d\varphi = \frac{\mp ds}{\sqrt{a^2 - b^2 - s^2}}$$

Infine, ponendo  $z = \frac{s}{\sqrt{a^2 - b^2}}$  e sostituendo, si ha

$$d\varphi = \frac{\mp dz \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2 - z^2(a^2 - b^2)}} = \frac{\mp dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

che è un integrale immediato e che fornisce

$$(12-24) \quad \varphi = \arccos z + \varphi_0$$

dove la costante di integrazione  $\varphi_0$  può essere posta uguale a zero con una opportuna scelta della misura dell'angolo  $\varphi$ , e il doppio segno sparisce perché  $\cos z = \cos(-z)$ .

Si ha quindi, sostituendo al contrario fino a tornare alla variabile iniziale  $r$

$$\varphi = \arccos z = \arccos \frac{s}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \arccos \frac{b^2 t - a}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \arccos \frac{\frac{b^2}{r} - a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\frac{b^2}{r} - a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$(12-25) \quad \frac{b^2}{r} = a + \sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi$$

che è appunto la funzione del tipo  $\varphi = f(r)$  che volevamo ottenere, e che coincide appunto con l'equazione polare dell'ellisse (12-16).

Infatti per una nota proprietà dell'ellisse  $\sqrt{a^2 - b^2} = c$ .

## 12-10. La seconda legge di Keplero

Viene anche detta **legge delle aree**: “Un segmento che unisca il centro del pianeta con il centro del satellite, spazza aree uguali in tempi uguali”.

In un intervallo infinitesimo di tempo  $dt$ , l'angolo  $\varphi$  subisce un incremento  $d\varphi$ .

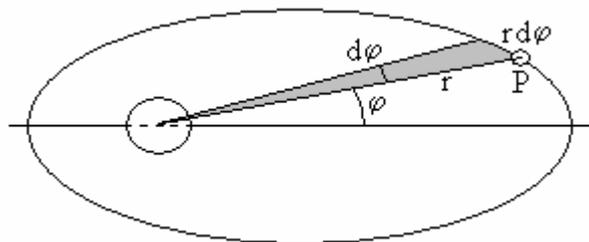
Il satellite in questo intervallo di tempo descrive un tratto di orbita pari a  $r d\varphi$ .

L'area (infinitesima) del triangoloide ombreggiato è allora

$$dS = \frac{r \cdot r d\varphi}{2} = \frac{r^2 d\varphi}{2}$$

Definiamo **velocità areale** la velocità con cui questa area varia nel tempo. Cioè

$$\frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \omega r^2$$



Ricordando che il momento angolare (vedi la 8-11) è dato da

$$p = mr^2\omega$$

possiamo scrivere

$$(12-26) \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{1}{2} \frac{p}{m}$$

Poiché il sistema formato dal pianeta e dal satellite è isolato in quanto non esistono forze esterne che possano perturbare il moto, il momento angolare  $p$  è costante, la massa è costante, e quindi la velocità areale è costante.

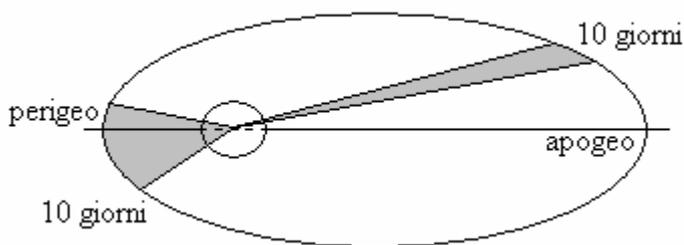
In altre parole il satellite descrive aree uguali in tempi uguali.

Ma l'orbita descritta dal satellite non è circolare, ma varia da una distanza massima (apogeo) ad una distanza minima (perigeo).

Quando il satellite si trova più lontano dalla Terra la sua velocità diminuisce, mentre al contrario quando si trova più vicino la sua velocità aumenta (in quest'ultimo caso è come se esso "cadesse" verso la Terra, per rallentare poi di nuovo quando se ne allontana).

Infatti avvicinandosi alla Terra la sua energia potenziale diminuisce e si trasforma in un incremento dell'energia cinetica. Al contrario quando si allontana riacquista energia potenziale a spese di quella cinetica.

Nell'esempio in figura il satellite descrive in tempi uguali lunghezze differenti, a causa della diversa velocità, ma le due superfici ombreggiate sono uguali.



## 13-10. La terza legge di Keplero

Viene anche detta **legge dei periodi**: "Per ciascun satellite dello stesso pianeta, il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo della distanza media del pianeta dal satellite".

Infatti l'accelerazione centrifuga alla quale è sottoposto il satellite è  $\omega^2 r$ , e quindi la forza centrifuga alla quale è sottoposto il satellite a causa della sua rotazione, è

$$F = m\omega^2 r$$

Questa forza è esattamente bilanciata dalla forza gravitazionale

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Infatti il satellite mantiene (più o meno) sempre la stessa distanza dal pianeta, proprio in virtù del fatto che le due forze sono opposte e si equivalgono.

Confrontando fra loro i due secondi membri si ha

$$m\omega^2 r = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$\omega^2 r = G \frac{M}{r^2}$$

Ma per la (2-11) si ha  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  e, sostituendo nella precedente, si ottiene

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = G \frac{M}{r^2}$$

cioè

$$(12-27) \quad \frac{r^3}{T^2} = G \frac{M}{4\pi^2} = \text{costante}$$

Quindi il rapporto fra il cubo della distanza fra il pianeta e il satellite, e il quadrato del periodo di rivoluzione del satellite, è costante.

E' importante notare che la massa  $m$  del satellite non appare nella (12-27), e quindi il valore della costante è lo stesso per tutti i satelliti di uno stesso pianeta.

Inoltre il ragionamento può essere applicato anche ad altri corpi celesti, per esempio al Sole e ai pianeti che gli girano intorno (in questo caso il valore della costante sarebbe differente, ma rimarrebbe identico per tutti i pianeti del sistema solare).

Occorre infine notare che nel nostro ragionamento abbiamo trattato il moto del satellite (o del pianeta) come se fosse circolare invece che ellittico, ma avremmo ottenuto lo stesso risultato se avessimo integrato e risolto la seconda equazione delle (12-22). Inoltre, nel caso dei pianeti che ruotano intorno al Sole, le orbite sono quasi sempre delle ellissi talmente poco schiacciate da risultare quasi circolari.

## 14-10. La velocità di fuga

Il satellite di massa  $m$  possiede una energia cinetica ed una energia potenziale corrispondenti a

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \\ E_p = -G \frac{Mm}{r} \end{cases}$$

Quindi la sua energia (meccanica) totale è

$$(12-28) \quad E_T = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - G \frac{Mm}{r}$$

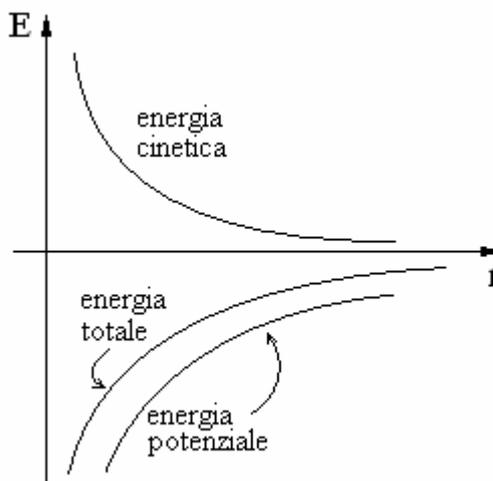
L'energia cinetica è sempre positiva, quella potenziale è sempre negativa, e quella totale è ancora negativa (almeno per i corpi che si trovano in orbita intorno al corpo che genera il campo gravitazionale).

In altre parole il corpo di massa  $m$  è prigioniero del campo gravitazionale e non ne può uscire.

Per lanciare un corpo nello spazio dalla Terra ed essere certi che questo non ricada su di essa, occorre imprimergli una energia cinetica tale che la sua energia totale sia nulla (o positiva).

Quindi, dalla (12-28), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r} &= 0 \\ \frac{1}{2} v^2 &= G \frac{M}{r} \end{aligned}$$



$$(12-29) \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Questa velocità viene detta **velocità di fuga**, e rappresenta la velocità minima con cui un corpo deve essere lanciato dalla Terra per essere messo in orbita.

Facendo i calcoli si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6}} = 11200 \text{ m/sec} = 40287 \text{ km/h}$$

Talvolta questa viene detta anche **prima velocità di fuga**, per distinguerla dalla **seconda velocità di fuga**, necessaria per permettere al corpo di uscire dal campo gravitazionale del Sole.

Per ottenerla basta sostituire nella (12-29) ad M ed a r la massa del Sole e la distanza del corpo dal Sole.

Infine esiste anche una **terza velocità di fuga**, necessaria per permettere al corpo di sfuggire al campo gravitazionale della galassia.

## CAP. 13 – I FLUIDI

### 13-1. La pressione e la densità

Con il termine fluidi intendiamo riferirci a tutte quelle sostanze che non posseggono una forma propria, ma assumono la forma del recipiente che li contiene.

Quindi i fluidi sono tutte le sostanze liquide o gassose.

Sono state riunite nell'unico termine fluidi perché sono sottoposte alle stesse leggi e proprietà.

Inoltre variando alcuni parametri, come la pressione e la temperatura, queste sostanze si trasformano spesso da liquide a gassose o viceversa.

Comunque esiste una importante differenza fra le sostanze liquide e quelle gassose: mentre i gas possono essere facilmente compressi o dilatati, i liquidi possono essere compressi solo in misura minima, sono incompressibili.

Occorre poi fare una precisazione: quando applichiamo una forza sulla superficie di un solido, questa può essere inclinata liberamente in tutte le direzioni. Ma quando applichiamo una forza sulla superficie di un fluido, questa deve essere sempre perpendicolare alla superficie stessa.

In caso contrario gli strati superficiali del fluido scorrerebbero gli uni sugli altri, senza coinvolgere gli strati più interni.

Dopo questa precisazione definiamo la **pressione** agente sulla superficie di un liquido, come **la forza normale alla superficie stessa divisa per tale superficie**.

$$\text{pressione} = \frac{\text{forza normale}}{\text{superficie}}$$

La densità di un fluido è invece il rapporto fra la massa del liquido e il suo volume

$$\text{densità} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

Il peso specifico è infine il rapporto fra peso del liquido e il suo volume

$$\text{peso specifico} = \frac{\text{peso}}{\text{volume}}$$

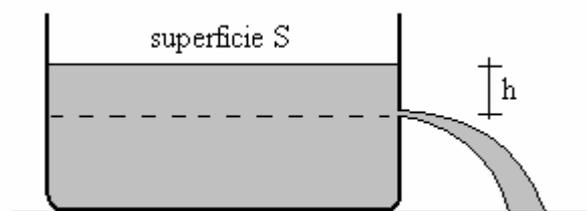
Indicando con  $\delta$  la densità e con  $p_s$  il peso specifico, possiamo scrivere

$$(13-1) \quad \delta = \frac{m}{V} \quad p_s = \frac{p}{V} = \frac{mg}{V} = \delta g$$

### 13-2. La legge di Stevin

Si abbia un recipiente cilindrico colmo di liquido con un piccolo foro ad una certa altezza da cui fuoriesce il liquido stesso. Sia  $h$  il dislivello fra la superficie libera del liquido nel recipiente, e la profondità alla quale si trova il foro.

Proponiamoci di calcolare la pressione dell'acqua nel punto del foro.



Prendiamo in considerazione il volume  $V$  del cilindro di liquido compreso fra la superficie libera e il foro.

La densità di questa porzione di liquido è  $\delta = \frac{M}{V} = \frac{M}{Sh}$  e quindi si ha  $M = \delta Sh$ .

Moltiplicando i due membri per l'accelerazione di gravità  $g$  si ottiene  
 peso =  $Mg = \delta Shg$

da cui, dividendo per  $S$ , si ha

$$(13-2) \quad \text{pressione} = \frac{\text{peso}}{S} = \delta hg$$

che rappresenta, appunto, la pressione ad una profondità  $h$ , e costituisce la legge di Stevin.

Dalla (13-2) risulta evidente che la pressione è la stessa per tutti i punti che si trovano alla stessa profondità dal pelo libero dell'acqua.

Più precisamente, se la superficie superiore del liquido è libera (come in figura), a tale pressione va aggiunta la pressione atmosferica  $p_0$  che grava sulla superficie libera del liquido.

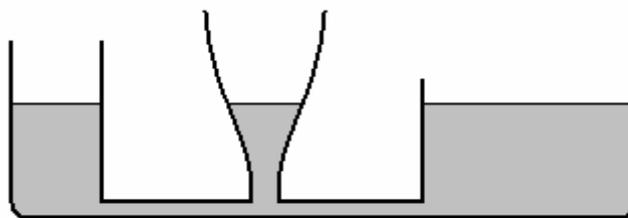
Quindi, in modo più completo, la legge deve essere scritta nel modo seguente

$$(13-3) \quad p = p_0 + \delta hg$$

o anche, indicando con  $\Delta p$  la differenza di pressione fra due generici livelli di profondità

$$(13-4) \quad \Delta p = \delta hg$$

Se due o più recipienti colmi di liquido sono comunicanti fra loro, allora le superfici libere del liquido nei vari recipienti assume sempre lo stesso livello (principio dei vasi comunicanti), qualunque sia la sezione e la forma dei singoli recipienti.



Se un tubo ad U contiene due differenti liquidi (non mescolabili) con densità rispettivamente pari a  $\delta_1$  e  $\delta_2$  (per esempio con  $\delta_1 < \delta_2$ ), allora i due livelli non si trovano più alla stessa altezza.

Indichiamo con  $h$  la differenza di livello fra A e B, e con  $d$  la differenza di livello fra B e C.

La pressione dei due liquidi al livello C è la stessa perché la superficie di separazione è in equilibrio.

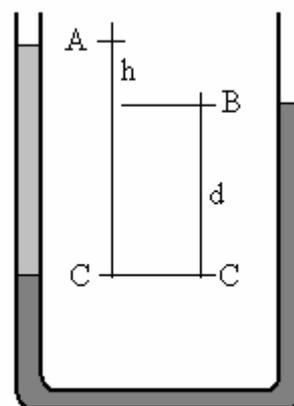
Applicando la (13-4) ad entrambi i liquidi si ha quindi in C

$$\delta_1 (h + d)g = \delta_2 dg$$

cioè

$$(13-5) \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{d}{h + d}$$

che ci permette, per esempio, conoscendo la densità di uno dei due liquidi, e misurando  $h$  e  $d$ , di ottenere la densità dell'altro liquido.



### 13-3. Principio di Pascal

Si abbia un recipiente cilindrico contenente un liquido, coperto da un pistone, ed applichiamo sul pistone una forza  $\vec{F}$ .

Se la superficie del pistone è  $S$ , ciò equivale ad applicare alla superficie libera del liquido una pressione  $p_0 = \frac{F}{S}$ .

Per effetto delle (13-3) e (13-4) la pressione esistente nel punto  $P$  è

$$p = p_0 + \delta hg$$

Dove  $p_0$  non è più la semplice pressione atmosferica, ma la somma di questa e di quella addizionale applicata sul pistone.

Si noti che essendo il liquido incompressibile, la sua densità resta costante.

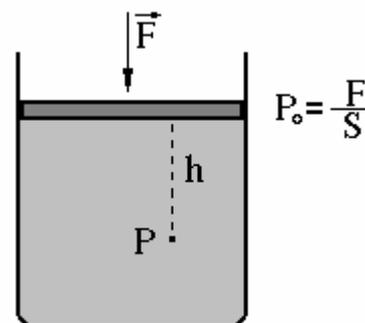
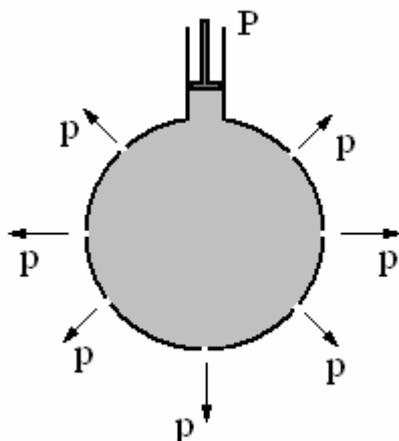
Questa nuova pressione  $p_0$  viene applicata a tutti i punti del liquido, **senza alcuna variazione**.

Inoltre si può mostrare come **questa pressione si trasmette in tutte le direzioni con la stessa intensità**.

Si abbia infatti una sfera cava contenente un liquido, munita di tanti piccoli fori, e di un piccolo cilindro con relativo pistone.

Applicando sul cilindro una pressione  $p$ , si può facilmente constatare che questa pressione si ripartisce in modo uguale in tutte le direzioni, in quanto i getti del liquido che fuoriescono dai fori, hanno tutti la stessa gittata.

Il principio di Pascal afferma appunto, che **una pressione applicata ad un fluido si trasmette inalterata ad ogni punto del fluido, e si ripartisce in modo uguale in tutte le direzioni**.



### 13-4. Principio di Archimede

Immergiamo **un corpo di massa  $M$**  in un liquido.

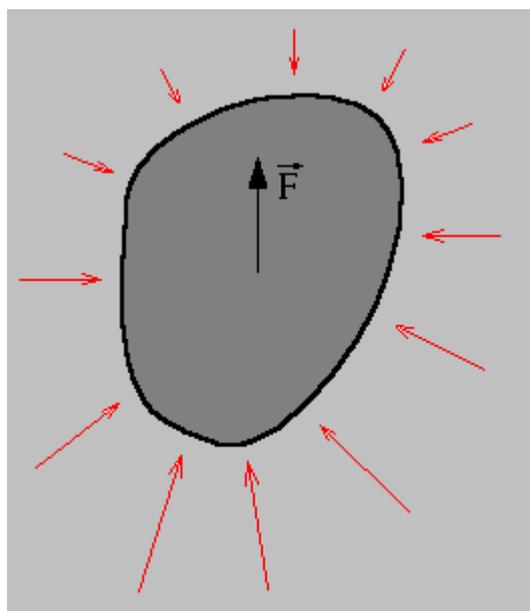
Su ogni punto della sua superficie agisce una pressione calcolabile ancora con le (13-3) e (13-4).

Quindi, vedi figura a fianco, i valori della pressione varieranno in funzione della profondità.

La parte inferiore del corpo sarà sottoposta ad una pressione maggiore rispetto a quella superiore.

La risultante di queste pressioni non è quindi nulla, ma ha un valore equivalente alla pressione che esercita una opportuna forza  $\vec{F}$  rivolta verso l'alto, che chiameremo **spinta**.

Prima di immergere il corpo, al suo posto c'era il liquido circostante, e questo stava in equilibrio: dunque la spinta ricevuta dal corpo equivale esattamente al peso del liquido che esso ha spostato, e di cui ha preso il posto.



La spinta  $\vec{F}$  deve essere applicata al baricentro del corpo (altrimenti essa darebbe luogo ad un momento e quindi ad una rotazione del corpo stesso).

Se il corpo è solo parzialmente immerso, la spinta  $\vec{F}$  deve essere applicata al baricentro della parte di liquido spostata. Questo punto viene anche detto **centro di spinta** (e coincide col baricentro del corpo solo se questo è totalmente immerso).

Il principio di Archimede afferma dunque che **un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso di fluido spostato**.

Per inciso, quando ci pesiamo su una bilancia, poiché ci troviamo immersi nell'aria che è un fluido, riceviamo una spinta verso l'alto pari al peso di aria spostata.

Il nostro peso effettivo andrebbe quindi leggermente aumentato, ma tale correzione è generalmente ignorata perché di minima entità.

Deve però essere tenuta presente, per esempio, nelle pesate di precisione che si eseguono in laboratorio.

## 13-5. La pressione atmosferica

Torricelli scoprì per primo che ponendo del mercurio in una bacinella, riempiendo poi una provetta di mercurio e immergendola capovolta nella bacinella (senza far entrare aria nella provetta), questa rimaneva piena di mercurio come è mostrato nella prima figura a sinistra.

Se però la provetta era molto lunga il livello del mercurio scendeva per fermarsi fino a formare una colonnina che aveva sempre la stessa altezza: 76 cm.

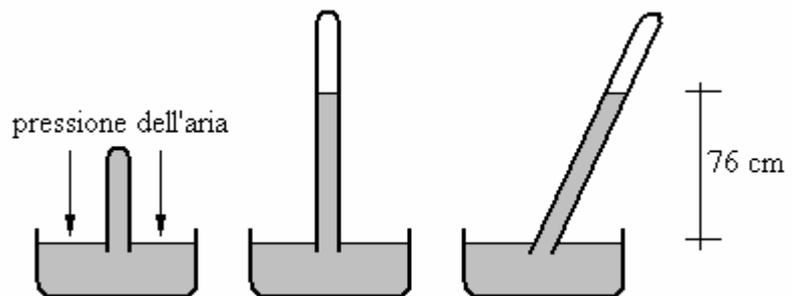
L'altezza della colonnina non variava se si prendeva una provetta

di diametro diverso o se (come mostra l'ultima figura) questa veniva inclinata.

La ragione per cui si verifica questo fenomeno è dovuta al fatto che il peso della colonna di mercurio controbilancia esattamente il peso della colonna d'aria esterna.

La pressione dell'aria è molto forte: si pensi che se al posto del mercurio mettiamo l'acqua, la colonna non è più alta 76 cm ma ben 10 metri !

Quando usiamo una ventosa (come uno stura lavandino) su una superficie liscia, e spingiamo il manico per far uscire l'aria contenuta sotto la ventosa, possiamo accorgerci di quanto sia forte la pressione atmosferica perché è proprio il suo effetto ad impedirci di staccare la ventosa dalla superficie alla quale ha aderito.



## 13-6. Il martinetto idraulico

Consideriamo un dispositivo come in figura: due recipienti sono collegati fra loro da un condotto contenente un liquido.

Nei due recipienti ci sono due pistoni scorrevoli aventi rispettivamente superfici  $S_1$  e  $S_2$ .

Applichiamo sul recipiente di sinistra una forza  $F_1$  e cerchiamo di determinare quale forza  $F_2$  sia necessaria per bilanciarla.

In situazione di equilibrio prendendo in

considerazione una sezione arbitraria del condotto

di comunicazione, le pressioni provenienti da sinistra e da destra devono bilanciarsi: deve essere  $p_1 = p_2$ .

Quindi si avrà

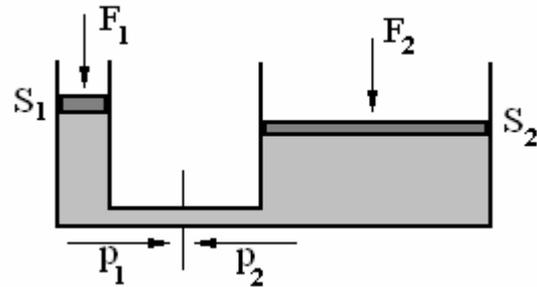
$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

cioè

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

E dunque se per esempio la superficie  $S_2$  è 300 volte maggiore della superficie  $S_1$  (se i pistoni sono circolari basta che il raggio sia circa 17 volte più grande), allora applicando sul pistone di sinistra una forza di 5 Kg si può sollevare sul pistone di destra un oggetto del peso di 1500 Kg cioè per esempio un'automobile.

Questo dispositivo infatti è comunemente usato nelle officine meccaniche.



## 13-7. Equazione di Bernoulli

Si abbia un liquido contenuto in un condotto di forma irregolare arbitraria, come quello indicato nella figura.

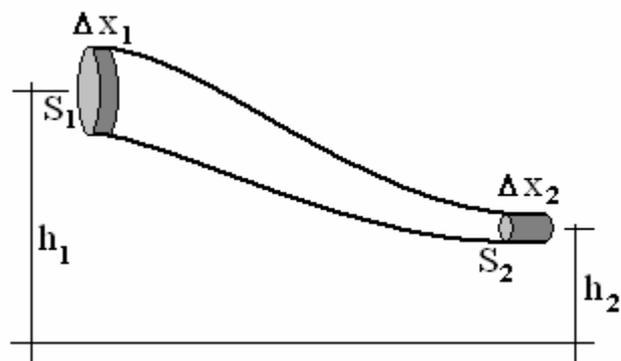
Esercitiamo una spinta  $F_1$  nella parte superiore sinistra.

Ricordando che il liquido è incompressibile, una certa quantità di liquido (corrispondente al cilindro colorato più scuro) si sposterà e nella estremità opposta corrisponderà ad un secondo cilindro (con spessore maggiore perché la base è minore).

I volumi dei due cilindri devono essere uguali:  $V_1 = V_2 = V$ .

I lavori necessari per spostare i due cilindri sono rispettivamente

$$\begin{cases} L_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 S_1 \Delta x_1 = p_1 V_1 \\ L_2 = -F_2 \Delta x_2 = -p_2 S_2 \Delta x_2 = -p_2 V_2 \end{cases}$$



Dove il secondo lavoro è negativo perché il liquido si oppone allo spostamento.

Il lavoro totale è quindi

$$L = L_1 + L_2 = (p_1 - p_2)V$$

Questo lavoro si trasforma in energia meccanica (energia cinetica ed energia potenziale):

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \\ E_p = mgh_2 - mgh_1 \end{cases}$$

Quindi complessivamente si ha

$$L = E_c + E_p$$

$$(p_1 - p_2)V = \left( \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \right) + (mgh_2 - mgh_1)$$

Dividendo entrambi i membri per V (e ricordando che  $\frac{\text{massa}}{\text{volume}} = \text{densità}$ ), avremo

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\delta v_2^2 - \frac{1}{2}\delta v_1^2 + \delta gh_2 - \delta gh_1$$

$$(13-6) \quad p_1 + \frac{1}{2}\delta v_1^2 + \delta gh_2 = p_2 + \frac{1}{2}\delta v_2^2 + \delta gh_1 = \text{costante}$$

Cioè in ogni sezione del conduttore la somma della pressione, dell'energia cinetica per unità di volume, e dell'energia potenziale per unità di volume, è costante.

La (13-6) prende il nome di equazione di Bernouilli.