La Ricerca Operativa
e l'Algoritmo del Simplesso

Roberto Boggiani
Versione 4.0

17 aprile 2004

1 Massimi e minimi assoluti di funzioni lineari in due variabili con vincoli lineari

1.1 Introduzione

In questo paragrafo studieremo un caso particolare relativo alla ricerca dei massimi e dei minimi assoluti delle funzioni a due variabili e precisamente quello in cui

- la funzione di cui vogliamo trovare i massimi e i minimi assoluti è di tipo lineare ossia del tipo

$$f(x,y) = ax + by + c$$

con $a, b, c \in \Re$ ed a, b non contemporaneamente nulli

- i vincoli sono espressi da disequazioni di tipo lineare ossia del tipo:

$$m_i x + n_i y \leq p_i$$

$$m_i x + n_i y \geq p_i$$

con $m_i, n_i, p_i \in \Re$

1.2 Massimi e minimi assoluti di funzioni lineari

Data la funzione lineare il due variabili

$$f(x,y) = ax + by + c$$

con $a, b, c \in \Re$ ed a, b non contemporaneamente nulli non soggetta a vincoli e quindi avente come dominio $\Re^2$ sappiamo che una condizione necessaria per l'esistenza dei massimi o dei minimi assoluti è l'annullarsi delle derivate parziali prime. Nel nostro caso si avrà che:

$$f'_x(x,y) = a$$

$$f'_y(x,y) = b$$

ma non potendo a e b essere contemporaneamente nulli tale condizione non è mai verificata per cui la funzione data non potrà ammettere mai ne massimi me minimi assoluti.

1.3 Massimi e minimi assoluti di una funzione lineare con vincolo lineare

Data la funzione lineare il due variabili

$$f(x,y) = ax + by + c$$

con $a, b, c \in \Re$ ed a, b non contemporaneamente nulli supponiamo che essa sia soggetta al vincolo lineare

$$mx + ny + c = 0$$

con $x \in [k_1; k_2]$. Come abbiamo visto la ricerca dei massimi e dei minimi assoluti vincolati in questo caso si effettua semplicemente ricavando una variabile dal vincolo e sostituendola nella funzione $f(x, y)$ che diviene così funzione ad una variabile. Se ricaviamo allora la variabile y sia avrà che:

$$y = -\frac{c}{n} - \frac{m}{n}x$$

che sostituito nella funzione $f(x, y)$ porterà alla funzione ad una variabile

$$f(x) = ax - b\left(\frac{c}{n} + \frac{m}{n}x\right) + c$$

in cui $x \in [k_1; k_2]$ Notiamo allora che:

$$f'_x(x) = a - b\frac{m}{n}$$

che non potrà mai annullarsi. Quindi gli eventuali punti di massimo o di minimo assoluto potranno solamente trovarsi negli estremi del segmento:

$$(k_1, f(k_1))$$

$$(k_2, f(k_2))$$

1.4 Esistenza dei massimi e dei minimi assoluti per le funzioni lineari definite in regioni di piano

Essendo le funzioni lineari a due variabili un sottoinsieme delle funzioni a due variabili è applicabile anche ad esse il

Teorema 1.1 (di Weierstrass) *Una funzione a due variabili $f(x, y)$ definita in un insieme $A \subseteq \Re^2$ chiuso e limitato è dotata di minimo e di massimo assoluto.*

Possiamo quindi affermare che

- se il sistema dei vincoli lineari a cui è soggetta la funzione porta alla formazione di un insieme chiuso e limitato di $\Re^2$
- se la funzione $f(x, y)$ è di tipo lineare essa sarà sicuramente continua in tale regione di piano

saremo sicuramente certi per il teorema di certi per il teorema di Weierstrass della esistenza del massimo e del minimo assoluto di tale funzione.

1.5 Ricerca del massimo e del minimo assoluto di una funzione lineare in due variabili soggetta a vincoli lineari con il metodo grafico

Vogliamo ora procedere con un esempio alla determinazione del massimo e del minimo assoluto di una funzione lineare in due variabili utilizzando il metodo grafico.

In una ditta si producono due tipi di tessuti, il tipo A e il tipo B. Per la produzione vengono impiegate due macchine tessili diverse S e T e precisamente un metro del tipo A viene prodotto facendo lavorare 2 ore la macchina S e 3 ore la macchina T, mentre per il tipo B si deve far lavorare 3 ore la S e 2 ore la T. Tenendo conto che i turni degli operai coprono 14 ore di lavoro al giorno e che ogni metro del tipo A rende L. 60.000 e ogni metro del tipo B rende L. 80.000, si richiede qual'è la produzione in metri di ogni tipo di stoffa per cui si ha il massimo reddito giornaliero. Da tale problema possiamo facilmente ottenere il seguente modello matematico:

$$\begin{array}{l} \max 60.000x + 80.000y \\ \text{soggetto ai vincoli} \\ \begin{cases} 2x + 3y \leq 14 \\ 3x + 2y \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Tale modello riguarda la massimizzazione di una funzione lineare soggetta a dei vincoli di tipo lineare. I vincoli a cui essa è soggetta costituiscono quindi il dominio della nostra funzione. Con le tecniche relative alla ricerca dei domini delle funzioni a due variabili possiamo ricavare il dominio della funzione da massimizzare così come è evidenziato nella figura 1 Come certamente si noterà la funzione in due variabili $f(x, y)$ è definita in una regione di piano data da un poligono chiuso e limitato ed è in tutti i punti di tale poligono continua. Da tale constatazione in base a quanto detto si avrà che:

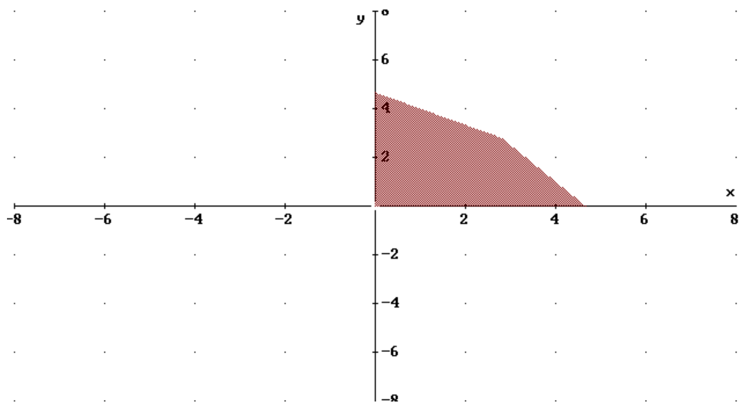

Figura 1: Dominio della funzione $f(x, y) = 60.000x + 80.000y$

- esistono per il teorema di Weierstrass sia il massimo che il minimo assoluto di tale funzione
- i relativi punti di massimo e di minimo assoluto non possono essere punti interni al poligono chiuso in quanto la funzione $f(x, y)$ è lineare
- quindi i punti di massimo e di minimo assoluto si potranno trovare solo ed esclusivamente sulla frontiera del poligono
- la frontiera come si nota è costituita esclusivamente da segmenti da segmenti e quindi la ricerca dei punti di massimo e di minim0 assoluti dovrà essere effettuata asclusivamente sugli estremi dei vari segmenti che costituiscono la frontiera del poligono

In definitiva, in questo caso, gli eventuali punti di massimo o di minimo assoluto si troveranno solo ed esclusivamente nei vertici del poligono le cui coordinate facilmenti calcolabili sono date da:

$$A\left(\frac{14}{3}; 0\right)\, B\left(\frac{14}{5}; \frac{14}{5}\right)\, C\left(0; \frac{14}{5}\right)\, O\,(0; 0)$$

Calcolando ora i valori di:

$$f(A) = 280000$$
$$f(B) = 392000$$
$$f(C) = 224000$$
$$f(O) = 0$$

si nota che:

- il punto di massimo assoluto sarà dato dal punto B a cui un massimo assoluto di 392.000
- il punto di minimo assoluto sarà dato dal punto O a cui un minimo assoluto di 0

1.6 Estensione al caso di più variabili

Sempre facendo riferimento al caso di funzioni lineari con vincoli di tipo lineare è impensabile considerare modelli che implicano l'uso di sole due variabili. Esistono infatti modelli che prevedono l'uso di una notevole mole di variabili anche se legate tra di loro da vincoli di tipo lineare. Il metodo grafico studiato in questo paragrafo non può essere ovviamente applicato a tali casi. Dobbiamo allora vedere quali sono gli strumenti che l'analisi matematica ci mette a disposizione per procedere alla trattazione e risoluzione di questi problemi di carattere complesso.

2 I problemi decisionali e l'ottimizzazione

2.1 Introduzione

Negli ultimi trent'anni si è riscontrato un notevole sviluppo di teorie metodi e applicazioni per la soluzione dei cosiddetti problemi decisionali applicati a problemi fisico-tecnici o economico-organizzativi, problemi consistenti nella scelta della decisione migliore possibile sottoposto però a determinati vincoli. Questa tendenza è stata determinata dalla constatazione dei vantaggi economici che si possono ottenere con una appropriata decisione, per esempio nella allocazione di risorse costose e limitate o nella conduzione di un impianto industriale, e dalla dimostrazione pratica che tali problemi possono essere formulati e trattati in termini matematici. Un approccio che emerge quasi naturalmente quando si formula un problema decisionale che coinvolge la scelta dei valori di numerose variabili collegate, è quello di focalizzare l'attenzione su un singolo obbiettivo, scelto per quantificare le prestazioni e per misurare la qualità della decisione.

L'ottimizzazione del problema decisionale consiste allora nella ricerca della decisione ottima ossia nella massimizzazione o minimizzazione dell'obiettivo nell'ambito dei valori consentiti dai vincoli che possono limitare le variabili di decisione.

2.2 L'ottimizzazione del problema decisionale

Nel procedimento di ottimizzazione ci si limiterà a considerare il caso in cui

- è noto l'insieme di tutte le decisioni possibili
- è noto il costo (o il vantaggio) di ogni decisione
- l'insieme delle decisioni è rappresentato da un vettore $x \in \Re^n$ in cui ogni componente rappresenta una variabile di decisione
- il costo (o il vantaggio) corrispondente a queste decisioni è dato da una funzione ad n variabili a valori reali che dovrà essere massimizzata o minimizzata

Restano quindi esclusi da questa ottimizzazione importanti capitoli della moderna teoria della ottimizzazione e in particolare:

- l'ottimizzazione in presenza di incertezza
- il caso in cui vi siano più decisori
- il caso in cui vi siano più funzioni obiettivo

La metodologia che sarà utilizzata nella ricerca della decisione ottima è offerta dalla programmazione matematica.

3 Programmazione matematica

3.1 Introduzione

La programmazione matematica si occupa della ricerca della soluzione ottima dei problemi che possono essere così formulati:

- ricerca del
$$\min f(x) \text{ o } \max f(x)$$
- con il vincolo che
$$x \in X \subseteq \Re^n \quad n \geq 1$$

in cui

- $f(x)$ è una funzione a valori reali di $x \in X \subseteq \Re^n$ con $n \geq 1$ denominata **funzione obiettivo**
- $X \subseteq \Re^n$ è un dato sottoinsieme di $\Re^n$ generalmente assegnato attraverso un insieme di relazioni di uguaglianza e di disuguaglianza e denominato **insieme o regione ammissibile**
- $x \in X$ rappresenta un vettore di $\Re^n$ ossia una qualunque **decisione**

Vogliamo far notare che minimizzare $f(x)$ è equivalente a minimizzare

$$a + bf(x) \text{ con } b > 0$$

e che massimizzare $f(x)$ è equivalente a massimizzare

$$a + bf(x) \text{ con } b > 0$$

quindi l'aggiunta di costanti alla funzione obiettivo o il prodotto della stessa funzione obiettivo per costanti positive non modifica il problema di ottimo. Da questa semplice constatazione è immediato ricavare che un problema di minimizzazione può essere trasformato in un problema di massimizzazione basterà porre nella relazione $a + bf(x)$

- $a = 0$
- $b = -1$

3.2 Classificazione dei problemi di programmazione matematica

I problemi di programmazione matematica possono essere classificati facendo riferimento all'insieme $X \subseteq \Re^n$. Potremmo avere allora:

- problemi di programmazione vincolata se X è un sottoinsieme proprio di $\Re^n$ e cioè non coincidente con se stesso
- problemi di programmazione non vincolata se $X = \Re^n$

Un'altra classificazione di problemi di programmazione matematica è effettuata facendo riferimento alla funzione obiettivo $f(x)$. Potremmo avere allora:

- problemi di programmazione lineare
- problemi di programmazione quadratica
- problemi di programmazione convessa
- problemi di programmazione geometrica

D'ora in avanti studieremo esclusivamente le tecniche e le procedure relative alla programmazione lineare.

4 La programmazione matematica lineare

4.1 Introduzione

Tra i vari problemi di programmazione matematica che si possono incontrare quelli che rivestono un ruolo fondamentale sono quelli di tipo lineare. Si ha un problema di programmazione matematica lineare quando:

- la funzione obiettivo è di tipo lineare ossia

  $$f(x) = c'x$$

  con $c \in \Re^n$

- la regione ammissibile è scritta nella forma

  $$X = \{x : Ax = b \ x \geq 0\}$$

  con $b \in \Re^n$ vettore con coefficienti noti e A matrice con coefficienti noti

4.2 Posizione del problema

Un problema di programmazione lineare, come accennato nel precedente paragrafo, è un problema di minimizzazione (o di massimizzazione) di una funzione lineare soggetta a vincoli lineari (equazioni o disequazioni). La forma esatta di questi vincoli può variare da un problema all'altro ma, come si vedrà in seguito, qualsiasi problema di programmazione lineare potrà essere riportato alla seguente *forma standard*.

$$\min\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$$

soggetto ai vincoli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ed in cui

$$x_i \geq 0\, \forall\, i = 1..n$$

$$b_j \geq 0\, \forall\, j = 1..m$$

dove la funzione da minimizzare è detta funzione obiettivo.

4.3 Riduzione alla forma standard

I problemi di programmazione matematica formulati in modo diverso da quello prospettato nella forma standard possono sempre essere riportati in quella forma tenendo conto dei seguenti criteri:

- un problema di *massimizzazione* può essere convertito in uno di minimizzazione moltiplicando per -1 la funzione obiettivo

- i vincoli espressi come disuguaglianze del tipo $\leq$ possono essere trasformati in vincoli di uguaglianza introducendo delle variabili ausiliarie non negative dette *variabili di scarto* ad esempio se il vincolo è:

  $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

  aggiungendo la variabile di scarto x_{n+1} si ottiene:

  $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + a_{n+1} = b_1$$

  vincolo che risulta ora essere scritto in forma normale

- i vincoli espressi come disuguaglianze del tipo $\geq$ possono essere trasformati in vincoli di uguaglianza introducendo delle variabili ausiliarie non negative dette *variabili di surplus* ad esempio se il vincolo è:

  $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1$$

  togliendo la variabile di surplus x_{n+1} si ottiene:

  $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - a_{n+1} = b_1$$

  vincolo che risulta ora essere scritto in forma normale

- una incognita, supponiamo x_j non è vincolata ad essere maggiore o uguale a zero. In questo caso si sostituisce alla variabile non vincolata x_j la coppia di variabili non negative x_{j+1}, x_{j+2} ponendo:

  $$x_j = x_{j+1} - x_{j+2}$$

  e si esprime il problema con le nuove variabili ottenute.

4.4 Soluzioni di base

Il problema di programmazione lineare, scritto nella forma standard, così come indicato nel paragrafo 4.2, allo scopo di evitare soluzioni banali e/o difficoltà di natura non essenziale dovrà anche sottostare alle seguenti limitazioni:

- $n > m$ ossia il numero di variabili deve superare quello dei vincoli di uguaglianza
- le righe dei vincoli devono essere linearmente indipendenti

Con tali ipotesi esisterà allora almeno una soluzione del sistema formato dai vincoli lineari infatti basterà porre $n - m$ variabili pari a zero e risolvere il sistema avente m equazioni ed m incognite. Possiamo allora dare le seguenti definizioni:

Definizione 4.1 (Soluzione di base) *Prende il nome di* soluzione di base *una soluzione in cui $n - m$ variabili hanno valori pari a zero ed m variabili possono assumere qualunque valore.*

Definizione 4.2 (Soluzione di base non degenere) *Prende il nome di* soluzione di base non degenere *una soluzione in cui $n - m$ variabili hanno valori pari a zero ed m variabili hanno valori diversi da zero.*

Definizione 4.3 (Soluzione ammissibile) *Prende il nome di* soluzione ammissibile *quella che si ottiene risolvendo il sistema formato dai vincoli lineari in modo che le soluzioni siano valori maggiori o uguali a zero.*

Definizione 4.4 (Soluzione ammissibile di base) *Prende il nome di* soluzione ammissibile di base *una soluzione di base in cui $n - m$ variabili hanno valori pari a zero ed m variabili assumono valori non negativi ossia ≥ 0*

Definizione 4.5 (Soluzione ammissibile di base non degenere) *Prende il nome di* soluzione ammissibile di base non degenere *una soluzione di base in cui $n - m$ variabili hanno valori pari a zero ed m variabili assumono valori positivi ossia > 0*

4.5 Teorema fondamentale della Programmazione Lineare

Possiamo ora finalmente enunciare il teorema fondamentale della programmazione lineare:

Teorema 4.1 (teorema fondamentale della programmazione lineare) *Nel problema di programmazione lineare, scritto nella forma standard, così come indicato nel paragrafo 4.2, si avrà che:*

- *Se esiste una soluzione ammissibile, allora esiste una soluzione ammissibile di base*
- *Se esiste una soluzione ammissibile ottima, allora esiste una soluzione ammissibile ottima di base.*

Questo teorema ci permette di limitare la ricerca delle soluzioni ottime alle soluzioni di base, che sono in numero finito e al più pari a:

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

cioè pari al numero di scegliere m delle n colonne della matrice dei coefficienti dei vincoli. Questa è già una tecnica che ci consente di trovare la soluzione ottima anche se alquanto inefficace per il grande numero di calcoli da effettuare.

5 Algoritmo del simplesso

5.1 Descrizione dell'algoritmo del Simplesso

Per trovare la soluzione ottimale del problema di programmazione lineare scritto nella forma standard sarà allora necessario utilizzare un procedimento noto come *Algoritmo del simplesso.* Tale procedimento si attua in due distinte fasi:

prima fase: si utilizza la prima fase dell'algoritmo del simplesso se dato il problema scritto nella forma standard non si dispone di una soluzione ammissibile di base

seconda fase: si utilizza la seconda fase dell'algoritmo del simplesso se dato il problema nella forma si dispone di una soluzione ammissibile di base

5.2 Algoritmo del simplesso: seconda fase

Dato un problema di programmazione lineare scritto nella forma standard, così come indicato nel paragrafo 4.2, per iniziare la seconda fase dobbiamo per prima cosa disporre di una soluzione ammissibile di base e solo in questo caso possiamo iniziare la applicazione dell'algoritmo per la scelta della soluzione ottima. Vediamo come si procede con il seguente esempio già ridotto nella forma normale:

$$min\ -3x_1 - x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

soggetto ai vincoli

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6 \end{cases}$$

Tale problema di programmazione lineare ammette come è immediato notare la seguente soluzione ammissibile di base:

$$(0, 0, 0, 2, 5, 6)$$

Da tale soluzione ammissibile di base siamo allora in grado di procedere alla formazione del seguente primo tableau del simplesso:

$v.b.$	cf	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	0	2	1	1	1	0	0	2
x_5	0	1	2	3	0	1	0	5
x_6	0	2	2	1	0	0	1	6
c_j		-3	-1	-3	0	0	0	0
$r_j = c_j - z_j$		-3	-1	-3	0	0	0	0
$sol.$		0	0	0	2	5	6	**0**

Per la formazione del precedente tableau si noti che:

- le variabili di base non nulle sono state scritte nella prima colonna mentre il coefficiente con il quale esse sono presenti nella funzione obiettivo è stato scritto nella seconda colonna
- nelle altre colonne sono state riportate i coefficienti e i termini noti che si rilevano dal problema ridotto nella forma normale
- nella riga c_j sono stati inseriti sotto ad ogni variabile i coefficiente con cui quella variabile compare nella funzione obiettivo
- la riga $r_j = c_j - z_j$ si ottiene notando che il valore di z_j è ottenuto moltiplicando per ciascuna variabile i numeri che sono presenti nella colonna della stessa per i coefficienti delle variabili che si trovano in base.
- la riga *sol.* non fa altro che riportare la soluzione ammissibile di base trovata

A questo punto prima di procedere è opportuno enunciare i seguenti:

Teorema 5.1 (del miglioramento della soluzione id base) *Data una soluzione di base ammissibile e non degenere, con corrispondente valore della funzione obiettivo z_0, se per qualche j si ha che*

$$r_j = c_j - z_j < 0$$

allora esiste una soluzione ammissibile con valori dell'indice $z_1 < z_0$. Se la variabile x_j può entrare in base come stabilito nel teorema 5.2 questa nuova soluzione avrà un valore della funzione obiettivo $z_1 < z_0$, in caso contrario l'insieme delle soluzioni risulta non limitato e la funzione obiettivo può essere resa arbitrariamente piccola

Teorema 5.2 (delle variabili entranti e uscenti dalla base) *Data una soluzione di base ammissibile e non degenere, con corrispondente valore della funzione obiettivo z_0, se per qualche j si ha che*

$$r_j = c_j - z_j < 0$$

la variabile x_j può entrare nella base se uno o più rapporti tra i valori di b_i e la colonna dei coefficienti della variabile x_j sono non negativi. Per determinare la variabile che deve uscire dalla base, di tali rapporti non negativi si sceglierà il più piccolo il quale dalla sua riga evidenzierà la variabile che deve uscire dalla base. Se per nessun valore negativo di r_j i rapporti sono non negativi la funzione obiettivo può essere resa arbitrariamente piccola e quindi il problema dato non ha soluzioni.

Teorema 5.3 (della condizione di ottimalità) *Se per qualche soluzione di base ammissibile risulta*

$$r_j = c_j - z_j \geq 0$$

per tutti gli j, allora tale soluzione è ottima

Notiamo allora che nel primo tableau vi sono tre valori negativi di r_j e quindi una qualunque delle corrispondenti variabili potrebbe entrare in base. Scegliamo come variabile entrante in base x_2 anche se in generale conviene prendere la variabile che presenta il valore di r_j più piccolo. Per scegliere la variabile uscente dalla base calcoliamo i seguenti rapporti:

- $\frac{2}{1} = 2$
- $\frac{5}{2} = 2.5$
- $\frac{6}{2} = 3$

Dobbiamo allora scegliere il rapporto più piccolo non negativo, per cui esce dalla base la variabile x_4. Si deve quindi effettuare una operazione di pivot sull'elemento $(1,2)$. Tale operazione consiste nel trasformare l'elemento di posto $(1,2)$ nel numero 1 moltiplicando tutta la riga per il reciproco del numero di posto $(1,2)$ e di portare a zero tutti gli altri elementi della matrice che si trovano nella stessa colonna di tale elemento operando esclusivamente operazioni elementari di riga ossia sommando o sottraendo ad una riga un'altra moltiplicata per una opportuna costante diversa da zero. In tal modo si perviene al secondo tableau del simplesso:

v.b.	cf	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_2	-1	2	1	1	1	0	0	2
x_5	0	-3	0	1	-2	1	0	1
x_6	0	-2	0	-1	-2	0	1	2
c_j		-3	-1	-3	0	0	0	0
$r_j = c_j - z_j$		-1	0	-2	1	0	0	2
sol.		0	2	0	0	1	2	**-2**

Con procedimento analogo a quello descritto sopra decidiamo di far entrare in base x_3 e in seguito ai calcoli effettuati esce di base x_5. Dobbiamo allora fare una operazione di pivot sull'elemento di posto $(2,3)$ pervenendo al seguente nuovo tableau del simplesso

v.b.	cf	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_2	-1	5	1	0	3	-1	0	1
x_3	-3	-3	0	1	-2	1	0	1
x_6	0	-5	0	0	-4	1	1	3
c_j		-3	-1	-3	0	0	0	0
$r_j = c_j - z_j$		-7	0	0	-3	2	0	4
sol.		0	1	1	0	0	3	**-4**

Con procedimento analogo a quello descritto sopra decidiamo di far entrare in base x_1 (scelta obbligata) e in seguito ai calcoli effettuati esce di base x_2. Dobbiamo allora fare una operazione di pivot sull'elemento di posto $(1,1)$ pervenendo al seguente nuovo tableau del simplesso

v.b.	cf	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	-3	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
x_3	-3	0	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
x_6	0	0	1	0	-1	0	1	4
c_j		-3	-1	-3	0	0	0	0
$r_j = c_j - z_j$		0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{27}{5}$
sol.		$\frac{1}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	0	0	4	$-\frac{27}{5}$

Non essendoci valori di r_j negativi la soluzione così trovata è soluzione ottima.

5.3 Algoritmo del simplesso: prima fase

Si effettua la prima fase dell'algoritmo del simplesso se dal problema originario non siamo in grado ricavarci alcuna soluzione ammissibile di base per poter iniziare la seconda fase del simplesso. La prima fase consiste allora:

- nel creare un modello artificiale aggiungendo una variabile artificiale ad ogni equazione della forma standard
- in tale modello artificiale la funzione da minimizzare sarà data dalla funzione che si ottiene sommando tra di loro le variabili artificiali aggiunte al problema originario
- applicare al modello artificiale così ottenuto la seconda fase del simplesso

Si potranno allora presentare i seguenti casi:

- se il simplesso applicato al modello artificiale fa uscire di base tutte le variabili artificiali introdotte e il minimo della funzione obiettivo vale zero allora abbiamo ottenuto una soluzione ammissibile di base e quindi possiamo applicare l'algoritmo del simplesso seconda fase alla funzione originaria da minimizzare ed utilizzando come tableau iniziale quello finale ottenuto dalla prima fase eliminando però da esso le colonne in cui compaiono le variabili artificiali
- se il simplesso applicato al modello artificiale non fa uscire di base una o tutte le variabili artificiali introdotte e quindi il valore della funzione obiettivo non vale zero il problema originario non ha soluzioni

Per completezza segnaliamo anche il caso che si può verificare in cui una o più variabili artificiali introdotte restano in base ma con valore zero ottenendo una soluzione degenere. Tale caso verrà svolto e spiegato mediante applicazioni all'elaboratore.

Come esempio si desidera risolvere il seguente problema di programmazione lineare già ridotto alla forma standard:

$$min\,-2x_1-4x_2-x_3$$

soggetto ai vincoli

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=4 \\ 3x_1+3x_2+x_3=3 \end{cases}$$

Non intravedendo alcuna soluzione di base ammissibile dobbiamo applicare la prima fase del simplesso la quale consisterà nel risolvere con la seconda fase del simplesso il seguente problema artificiale:

$$min\,x_4+x_5$$

soggetto ai vincoli

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+x_4=4 \\ 3x_1+3x_2+x_3+x_5=3 \end{cases}$$

dal quale è immediato ricavare la prima soluzione ammissibile di base $(0,0,0,4,3)$ Si potranno allora verificare due casi:

- se dalla soluzione di tale problema artificiale escono di base le variabili artificiali aggiunte ossia x_4 e x_5 e quindi il valore della funzione obiettivo vale zero abbiamo trovato una soluzione ammissibile di base con cui iniziare la seconda fase del simplesso con la funzione obiettivo originaria ossia $min\,-2x_1-4x_2-x_3$ ed come tableau iniziale il tableau finale ottenuto dalla prima fase eliminando in esso le colonne in cui compaiono le variabili artificiali aggiunte
- se dalla soluzione di tale problema artificiale non escono di base una o tutte le variabili artificiali aggiunte ossia x_4 e x_5 e quindi il valore della funzione obiettivo non vale zero il problema originario non ha soluzioni

Indice