Paola Cantù

Mathematik als >Größenlehre<

In seinem 1716 veröffentlichten *Mathematisches Lexikon* erklärte Christian Wolff einige grundlegende Mathematikbegriffe, die er aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzte, als er die deutsche Terminologie der Mathematik sowie der Philosophie einführte. Im folgenden Artikel werde ich zuerst Wolffs Übersetzung beider lateinischen Wörter >Quantitas< und >Magnitudo< als >Größe< und danach die Definition der Mathematik als Größenlehre analysieren. Ich werde die Behauptung aufstellen, dass Wolffs Übersetzung eine wichtige Rolle in der Begriffsbestimmung der Mathematik bei deutschsprachigen Wissenschaftlern des 18. und 19. Jahrhunderts spielte, weil sie entweder übernommen, zum Beispiel von Euler und Gauss, oder kritisiert worden ist, zum Beispiel von Kant, Bolzano und Hegel. Am Ende werde ich einige Stellen aus Grassmanns *Ausdehnungslehre* erläutern, da sein Kritizismus der üblichen Definition der Mathematik die mathematischen und philosophischen Nachwirkungen der Übersetzung von >Quantitäten< als >Größen< am besten hervorhebt.

I. >Quantitas< als >Größe< übersetzt

In dem *Mathematischen Lexicon* wird das Wort >Größe< folgenderweise eingeführt: >>Quantitas, eine Größe, heisset in der Mathematik alles, was sich vermehren und vermindern lässet<< (Wolff, Mathematisches Lexikon, S. 1143). >Größe< übersetzt also >Quantitas<. Da die Wörter >vermehren< und >vermindern< >mehr< und >minder< enthalten, bestimmen sie die Größe als etwas, dessen Anzahl geändert werden kann. Von einem etymologischen Standpunkt aus wird also die Größe eingeführt, als wäre sie durch die arithmetischen Operationen mit Zahlen (Addition und Subtraktion) charakterisierbar.[1] Im Wolffschen Text werden Größen auf algebraische Weise aufgefasst:

> >>Es sind die Quantitates in der That nichts anders als undeterminirte Zahlen, da man noch keine gewisse Eines setzet, darauf sie sich referiren. In der Algebra stellet man sie durch Buchstaben vor und verfähret im übrigen mit Ihnen wie mit anderen Zahlen. Und eben deswegen, weil sie undeterminirte Zahlen sind, kann von ihnen alles gesaget werden, was man von den Zahlen überhaupt erweiset.<< (Wolff, Mathematisches Lexikon, S. 1143)

1 In den *Regulae* hatte Descartes bereits >quantitas< als etwas erklärt, das vermehrt oder vermindert: >>Notandum est deinde, nihil ad istam aequalitatem reduci posse, nisi quod recipit majus et minus, atque illud omne per magnitudinis vocabulum comprehendi, adeo ut, postquam juxta regulam praecedentem difficultatis termini ab omni subjecto abstracti sunt, hic tantum deinceps circa magnitudines in genere intelligamus nos versari.<< (Descartes 1966, Regula XIV).

Größen sind undeterminierte Zahlen, also algebraische Quantitäten, mit denen man genau wie mit den Zahlen operieren kann. Das Wort >Größe< drückt aber nicht nur die Zahl aus, sondern auch das Ausmaß einer geometrischen Gestalt, die durch die Zahl vorstellbar ist, und zwar das Verhältnis zwischen der Gestalt und der Maßeinheit. So werden die lateinischen Wörter >Moles< und >Volumen< noch mal als Größe übersetzt, denn sie bezeichnen den von einem Körper eingenommenen Raum, das heißt die Ausdehnung des Körpers, >>den Raum, den der Körper nach seiner Länge, Breite und Dicke einnimmet<< (Wolff, Mathematisches Lexikon, S. 905).
Im *Mathematisches Lexikon* kommt das Wort >Größe< nochmals vor, als Wolff die Mathematik >Wissenschaft der Größen< bezeichnet:

> >>Mathematica seu Mathesis, die Mathematik, ist eine Wissenschaft alles auszumessen, was sich ausmessen läst. Insgemein beschreibet man sie *per scientiam quantitatum*, durch eine Wissenschaft der Größen, das heisset, aller derjenigen Dinge, die sich vergrössern oder verkleinern lassen.<< (Wolff, Mathematisches Lexikon, S. 864)

In dem Zitat werden die Größen durch kontinuierliche anstatt diskreter Eigenschaften gekennzeichnet, weil sie als Dinge, die größer oder kleiner werden können, bezeichnet sind. Tatsächlich bezieht sich das Wort >Größe< sowohl auf stetige Körper als auch auf die Zahlen, die sie messen. Deshalb beschreibt Wolff die Größen als Dinge, die sich vergrößern sowie vermehren beziehungsweise verkleinern sowie vermindern lassen. In den Wolffschen Texten hat das Wort >Größe< keine privilegierte Beziehung zur Ausdehnung, sondern es kennzeichnet den Begriff von einem Etwas, das durch Zahlen bestimmbar ist. Die Mathematik ist also die Wissenschaft der Größen, insofern sie die Wissenschaft der messbaren Körper und deren numerischen Maßen ist.
Eine ähnliche Terminologie kommt in *Deutsche Metaphysik* vor. Das Wort >Größe< drückt einen allgemeinen Begriff aus, und zwar den inneren Unterschied ähnlicher Dinge:
>>Weil ähnliche Dinge ihrer Aehnlichkeit ohne Schaden nichts in sich haben können als die Grösse, dadurch sie unterschieden sind; so kann dieses zu einer Erklärung der Grösse dienen, daß sie der innere Unterschied ähnlicher Dinge sey […], nehmlich, wodurch ähnlicher Dinge unter einander unterschieden seyn können.<< (Wolff, Deutsche Metaphysik, II, § 21)
Die Größen werden durch eine Ausmessung unterschieden, <<denn wenn ich einem sagen soll, wie groß etwas ist; so muß ich ihm die Verhältniß sagen, die es zu einem gewissen Maasse hat, das ihm bekant ist.>> (Wolff, Deutsche Metaphysik, II, § 20). Zwei Größen werden also im Vergleich durch die Wörter >groß< oder >klein< bestimmt: >>was einem Theile des andern gleich ist, das ist kleiner: dessen Theil hingegen dem andern gantz gleich ist, das ist grösser.<< (Wolff, Deutsche Metaphysik, II, § 26). An einer folgenden Stelle wird die Größe als >>die Menge der Theile<< eines zusammengesetztes Dinges bestimmt:
>>Ein zusammengesetztes Ding kann grösser und kleiner werden. Denn weil die Theile nicht

nothwendig ihren Ort einnehemen (§. 50.); so können mehrere dazu, auch einige davon kommen. Da nun die Grösse in der Menge der Theile bestehet (§. 61.); so wird dadurch ein zusammengesetztes Ding grösser oder kleiner. Wo mehrere Theile hinzukommen, das wird grösser; wo einige davon kommen, das wird kleiner (§. 26.).<< (Wolff, Deutsche Metaphysik, II, § 65).

II. >Quantitas< und >magnitudo<

Von einem etymologischen Standpunkt aus gibt es einen Unterschied zwischen den Wörtern >vergrößern< und >vermehren<, weil sie eine stetige Erweiterung beziehungsweise eine diskrete Zunahme ausdrücken. In den Wolffschen Texten spielt ein solcher Unterschied keine Rolle, denn nach der Newtonschen Ansicht, die Wolff zu verbreiten versucht, sind alle Quantitäten durch ein numerisches Verhältnis ausdrückbar. Warum übersetzte Wolff >quantitas< dann als >Größe<? Warum führte er nicht das Wort >Quantität< ein, wie es bei anderen europäischen Sprachen geschah? Vergleichen wir zum Beispiel das englische Wort >quantity< oder das französische >quantité< oder das italienische >quantità<. Als Wolff ein einziges Wort für die verschiedenen Begriffe von >quantitas<, >magnitudo<, >moles< und >volumen< benutzt, verschleiert er die Differenz zwischen stetigen und diskreten Quantitäten und den Unterschied zwischen einem geometrischen und einem algebraischen Begriff. In der Tat hatte schon Leibniz beide Wörter >quantitas< und >magnitudo< benutzt, um einen allgemeinen Begriff von Quantität auszudrücken.[2] Noch früher hatte Euklid selbst in dem ersten und in dem fünften Buch der *Elemente* das griechische Wort >méghezos< mehrdeutig benutzt, um sowohl das Maß von geometrischen Entitäten als auch die Quantität mathematischer Verhältnisse auszudrücken.

In den ersten lateinischen Ausgaben von Euklids *Elemente*, die zwischen Ende des 15. und der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts erschienen, wurde das Wort >méghezos< manchmal als >quantitas< manchmal als >magnitudo< übersetzt. In einer 1482 veröffentlichten Lateinischen Übersetzung aus der arabischen Sprache, wurde >méghezos< als >quantitas< übersetzt, ebenso wie in der später von Scheubel herausgegebenen Edition. In den lateinischen Ausgaben von Zamberti (1505) und Commandino (1572), die aus der griechischer Sprache übersetzt wurden, kam das Wort >magnitudo< vor, das dem griechischen Wort besser entsprach; trotzdem merkten die Autoren, dass die Verhältnistheorie nicht nur mit >magnitudo< sondern auch mit anderen Quantitäten zu tun hatte. (Cantù, 2003, S. 80—86). Die Humanisten einigten sich über den Begriffsunterschied zwischen den Wörtern: die meisten merkten, dass >magnitudo< stetige Quantitäten bezeichnete, während

2 >>Accessere specimina Scientiae Generalis specialibus applicatae, quae asserta autoris etiam apud illos qui de rebus non nisi ab eventu judicant, credibiliora reddant; ea sunt I. Mathematica Generalis, de Magnitudine sive Quantitate, et Similitudine sive qualitate determinandis, qua Numerorum tam certorum quos Arithmetica tradit, quam incertorum quibus Algebra occupatur, calculus omnis novis artibus perficitur, absolvunturque quae hactenus visa sunt in potestate. II. Geometria, in qua Magnitudo et Similitudo situi applicantur.<< Vgl. Leibniz, 1890, S. 59.

>quantitas< sowohl stetige Quantitäten als auch Zahlen bezeichnete. >Quantitas< wurde also als ein allgemeiner Begriff betrachtet, der den besonderen Begriff von Größen enthielt. >Magnitudo<, genau wie das Wort >méghezos< in Aristoteles' *Metaphysik* und in Euklids *Elemente*, drückte die Größe von geometrischen Quantitäten, sowie Längen, Flächen, Volumen aus, während >Quantitas< sich auf den durch das Wort >tò posòn< ausgedrückten Begriff von Quantität bezog, der in Aristoteles *Metaphysik* Zahl, Größe, Rede und Zeit umfasste.

III. Mathematik als >scientia quantitatum< oder >Wissenschaft der Größen<

Durch das Wort >Quantitas< ausdrückten die Humanisten den Gegenstand der Verhältnistheorie aus, und zwar einen allgemeinen, Zahlen und Größen umfassenden Begriff, auf dessen Nützlichkeit schon Aristoteles in *Zweite Analytiken* hingewiesen hatte (Aristoteles, Analytica priora, I.5.74a). Unter dem Einfluss von Proclus betrachteten die Humanisten den Begriff von >quantitas< als Gegenstand einer allgemeinen mathematischen Wissenschaft, die Arithmetik und Geometrie umfasste. Dank den starken Entwicklungen der Algebra im 16. und 17. Jahrhundert wurde das Wort >quantitas< öfter gebraucht, um mathematische Gegenstände im allgemeinen zu bezeichnen. Gleichzeitig wurde das Bedürfnis nach einem einzigen Begriff, der geometrische Entitäten sowie Zahlen umfasste, von einem mathematischen Standpunkt aus gerechtfertigt, da ähnliche algebraische Gesetze für beide galten. Trotzdem wurde die Existenz eines solchen vereinigenden Begriffes in Frage gestellt, weil die Unterschiede zwischen stetigen und diskreten, dimensionalen und nicht-dimensionalen Entitäten wesentlich erschienen. So wurde das Wort >quantitas< manchmal auf Zahlen, manchmal auf algebraische Quantitäten, manchmal auf Quantität im allgemeinen bezogen, das heißt auf alles, was Gegenstand einer mathematischen Wissenschaft sein könnte. Mathematik wurde als >scientia quantitatum< erklärt und eine solche Definition breitete sich so aus, dass sie schon in Wolffschen Zeiten als die übliche Definition der Mathematik anerkannt wurde. Wolff nahm diese Definition an und übersetzte >scientia quantitatum< als >Wissenschaft der Größen<.

Derselbe Ausdruck und dieselbe Erklärung der Mathematik findet man in Eulers Werken: >>[…] die Mathematic überhaupt nichts anders ist als eine Wißenschaft der Größen<<, wobei als Größe alles bezeichnet wird, >>welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder davon wegnehmen läßt<< (Euler, Algebra, § I.1.1—2). In einer um 1800 geschriebenem Schrift erklärte Gauss die Mathematik nochmals als >Wissenschaft der Größen<, obwohl er meinte, dass die Mathematik nicht die Größen an sich untersuchte, sondern eher die Beziehungen unter Größen. Nach seiner Meinung bestand der Unterschied zwischen Geometrie und Arithmetik darin, dass die Geometrie die geometrischen Beziehungen, dagegen die Arithmetik die arithmetischen Beziehungen unter Größen untersuchte:

>>Eine Grösse für sich kann noch kein Gegenstand einer wissenschaftlichen Untersuchung werden: die Mathematik betrachtet die Grössen nur in Beziehung auf einander. Die Beziehung der Grössen auf einander, die sie haben, nur insofern sie Grössen sind, nenne man arithmetische Beziehung. Bei geometrischen Grössen findet auch eine Relation in Ansehung der Lage Statt und diese nenne man geometrische Beziehung.<< (Gauss, 1929, § 2)

Gauss nahm also die übliche Definition der Mathematik als Wissenschaft der Größen an, modifizierte jedoch ihre Bedeutung. Nach seiner Meinung ist der Zweck der Mathematik >>Grössen, die zu bekannten Grössen oder zu denen bekannte Grössen bekannte Beziehungen haben, darzustellen<<.(Gauss, 1929, § 3)

IV. Kritik an der Definition der Mathematik als Größenlehre

Nachdem ich besprochen habe, warum Wolff die Mathematik als Größenlehre erklärte und ihre Gegenstände als algebraische Quantitäten betrachtete, bleibt noch festzustellen, ob die Wolffsche Terminologie bedeutende philosophische Folgen hatte. Als er das Wort >Größe< benutzt, um >quanta< sowie >quantitas<, stetige sowie unstetige Entitäten, Quantitäten sowie Maße zu bezeichnen, scheint er die entsprechenden begrifflichen Unterschiede zu verschleiern. Die Auswahl des Wortes >Größe<, um den allgemeinen Gegenstand der Mathematik zu bezeichnen, gibt die Veranlassung zu einer ontologischen Vorstellung der Wissenschaft, als ob sie Entitäten statt Verhältnisse beträfe. Und zwar kritisierten deutschsprachige Philosophen und Mathematiker die Wolffsche Definition der Mathematik, gerade weil ihnen das Wort >Größe< unangemessen schien. Ich werde hier nur kurz die von Kant, Bolzano und Hegel geübten Kritiken erwähnen, um Grassmanns Anmerkungen ausführlicher zu behandeln, die allerdings nicht nur terminologisch sondern vielmehr begrifflich sind.

Einige Stellen in *Kritik der reinen Vernunft* erweisen, dass zur Zeit Kants die Definition der Mathematik als >reine< oder >allgemeine Größenlehre< weit verbreitet war:

>>Was Chemiker beim Scheiden der Materien, was Mathematiker in ihrer *reinen Größenlehre* thun, das liegt noch weit mehr den Philosophen ob, damit er den Antheil, den eine besondere Art der Erkenntniß am herumschweifenden Verstandesgebrauch hat, ihren eigenen Werth und Einfluß sicher bestimmen könne<<. (Kant, KrV B, S. 870)

Der von den Mathematikern benutzte Begriff >Größe< wurde von Kant algebraisch betrachtet:

>>Da die Größe den Gegenstand der Mathematik ausmacht, und in Betrachtung derselben nur darauf gesehen wird, wie vielmal etwas gesetzt sei, so leuchtet deutlich in die Augen, daß diese Erkenntniß auf wenigen und sehr klaren Grundlehren der *allgemeinen Größenlehre* (welches eigentlich die allgemeine Arithmetik ist) beruhen müsse. Man sieht auch daselbst die Vermehrung und Verminderung der Größen, ihre Zerfällung in gleiche Factoren bei der Lehre

von den Wurzeln aus einfältigen und wenig Grundbegriffen entspringen<<. (Kant, 1900, S. 282)

Von einem philosophischen Standpunkt aus erklärte Kant verschiedene Bedeutungen des Begriffes von >quantitas<, die er durch unterschiedliche Wörter ausdrückte: >Quantität< bezeichnet den der Kategorie der Qualität entgegengesetzten Begriff, während >Größe< den mathematischen Begriff bezeichnet. Kant unterschied zwei verschiedene Bedeutungen des Wortes >Größe<: >quanta<, das heißt geometrische Dinge, und >quantitas<, das heißt den algebraischen Begriff der Quantität. So schrieb er in *Kritik der reinen Vernunft*:

>>Die Mathematik aber construirt nicht bloß *Größen (quanta)*, wie in der Geometrie, sondern auch die *bloße Größe (quantitatem)*, wie in der Buchstabenrechnung, wobei sie von der Beschaffenheit des Gegenstandes, der nach einem solchen Größenbegriff gedacht werden soll, gänzlich abstrahirt<<. (Kant, KrV, B, S. 745)

Auch Hegel unterschied zwischen >quanta<, das heißt Dingen deren Größe messbar ist, und >Quantität<, das heißt Größe im allgemeinen. Die Verwendung eines fremdes Wortes ist seiner Meinung nach notwendig, gerade weil die Mathematiker dem Wort >Größe< die besondere Bedeutung >quanta< zuschreiben:

>>Unter dem Ausdruck *Größe* wird das *Quantum*, wie an den gegebenen Beispielen, verstanden, nicht die *Quantität*, weswegen wesentlich dieser Name aus der fremden Sprache gebraucht werden muß<<. (Hegel, Wiss. der Logik, I.2: Anm.)

In den 1810 veröffentlichten *Beyträgen zur einer begründeteren Darstellung der Mathematik* bemerkte Bolzano, dass von einem sprachlichen Standpunkt aus die Definition der Mathematik als *Wissenschaft der Größe*, obwohl in jedem Lehrbuch zu finden, unangemessen wäre:

>>Dagegen in allen *neuern* Lehrbüchern der Mathematik wird die Erklärung aufgestellt: "*Die* Mathematik *sey die Wissenshchaft der Größen.*" […] Doch in der That ist diese Erklärung der Größe (§.2.), man mag sie nun so oder anders auslegen, dem Sprachgebrauche ganz zuwider.<< (Bolzano, 1810, § 1--3)

Wenn >Größe< sich auf ein aus mehreren gleichen Teilen bestehendes Ganzes oder auf etwas durch Zahlen bestimmbares bezöge, würden einige Zweige der Mathematik ausgeschlossen, wie zum Beispiel die Kombinationstheorie:

>>Wollen wir uns von dem Sprachgebrauche nicht allzu weit entfernen (was wir allerdings auch in den Wissenschaften nicht ohne Noth thun sollten); so müssen wir unter Größe ein *Ganzes, in wie fern es aus mehreren* gleichen *Theilen besteht*, oder noch allgemeiner, *etwas, welches durch Zahlen bestimmt werden kann*, verstehen. Diese Bedeutung des Wortes Größe vorausgesetzt, ist die gewöhnliche Erklärung der Mathematik, als einer Wissenschaft der Größen, freylich mangelhaft, und zwar *zu enge*. […] So kommt in vielen Aufgaben der *Combinationslehre* (dieses so wichtigen Theiles der allgemeinen Mathesis) der Begriff der Größe oder einer Zahl nicht

einmahl vor<<. (Bolzano, 1810, § 3)

Bolzano bemerkte weiterhin, dass wenn >Größe< sich auf alle Dinge bezöge, >auf welche der Begriff der Größe besonders anwendbar< wäre, dann würde die Wissenschaft der Größen viel zu viele Gegenstände haben und alle Wissenschaften als Zweige enthalten:

> >>Allein bey einer genauern Betrachtung zeigt es sich, daß auch selbst diese Erklärung verwerflich sey. *Anwendbar* ist einmahl der Begriff der Größe durchaus auf *alle* Gegenstände, selbst auf *Gedankendinge*. Wollte man also die bloße *Anwendbarkeit des Größenbegriffs* auf einen Gegenstand als einen hinreichenden Grund betrachten, die Lehre von demselben den mathematischen Disciplinen beyzuzählen; so würde man in der That alle Wissenschaften zur Mathematik zählen müssen.<< (Bolzano, 1810, § 4).

Einige Jahre später drückte Bolzano die Mehrdeutigkeit des Wortes >Größe< noch deutlicher aus: in engerem Sinne bezieht es sich nur auf stetige Größen, während in einem weiterem Sinne es sich auch auf unstetige Größen und deshalb auf Zahlen beziehen kann (Bolzano, 1975, § I.1).

V. Grassmanns Bemerkungen

In seinem Hauptwerk, das 1844 erschien, kritisierte Hermann Grassmann die übliche Definition der Mathematik aus zwei Gründen: erstens, weil das Wort >Größe< sich nur auf stetige Quantitäten bezöge, und zweitens, weil es dem Wort nicht gelänge, das wesentliche Kennzeichen der mathematischen Gegenstände auszudrücken, das heißt, dass sie nicht vorgegeben, sondern dazu aufgrund eines Gesetzes geworden sind. Grassmann, der bedeutenswerte Ereignisse im Rahme der sprachlichen Wissenschaften erreichte und deshalb am Ende seines Lebens Ehrendoktor der Universität Jena wurde, bewies durch ein sprachliches Argument, dass das Wort >Größe< sich nur auf stetige Quantitäten bezöge: er meinte, dass >vermehren< und >vermindern< dem Zahlenbegriff, während >vergrößern< und >verkleinern< dem Größenbegriff verbunden seien. So schrieb er:

> >>Der Begriff der Grösse wird in der Arithmetik durch den der Anzahl vertreten; die Sprache unterscheidet daher sehr wohl vermehren und vermindern, was der Zahl angehört, von vergrössern und verkleinern, was der Grösse.<< (Grassmann, Ausdehnungslehre, Einleitung, A, § 3, Anm.)

Indem Grassmann das, was Wolff nicht getrennt hatte, unterschied, wies er die Zurückführung der Geometrie auf die Algebra ab und kritisierte die Subsumtion unter eine einzige Gattung von geometrischen Gebilden und reellen Zahlen. Anders als Newton, der die Zahl als das abstrakte Verhältnis einer Quantität zu einer homogenen Quantität, die man als Einheit betrachtet, definierte, (Newton, 1728, S. 2), hielt Grassmann die Zahlen für Quantitäten, die durch Wiederholung einer Einheit erzeugt worden wären. Daher, meinte er, unterscheidet die Sprache mit Recht zwischen den diskreten Zahlen, die vermehren oder vermindern, und den stetigen Größen, die vergrößern oder

verkleinern. Zahlen sind diskret, weil sie durch zwei verschiedene >Denkakte< geworden sind: zuerst wird eine neue Einheit gesetzt und danach wird sie mit den vorher gesetzten Einheiten verknüpft. Die Größen sind im Gegenteil dazu stetig, weil sie durch einen einzigen >Denkakt< geworden sind, oder anders gesagt, weil die >Denkakte< des Setzens und des Verknüpfens in einen einzigen Denkakt verschmelzen, so dass es unmöglich ist, einen von dem anderen zu trennen. So schreibt Grassmann:

> >>Jedes durch das Denken gewordene […] kann auf zwiefache Weise geworden sein, entweder durch einen einfachen Akt des Erzeugens, oder durch einen zwiefachen Akt des Setzens und Verknüpfens. Das auf die erste Weise gewordene ist die stetige Form oder die Grösse im engeren Sinn, das auf die letztere Weise gewordene die diskrete oder Verknüpfungs-Form.<< (Grassmann, Ausdehnungslehre, Einleitung, B, § 4)

Grassmanns Meinung nach, wenn >Größe< nur stetige Quantitäten bezeichnet, wird der Ausdruck >Größenlehre< offensichtlich der gesamten Mathematik unangemessen, weil er wenigstens zwei wesentliche Zweige ausschließt, und zwar Arithmetik und Kombinatorik:

> >>Der Name Grössenlehre eignet nicht der gesammten Mathematik, indem derselbe auf einen wesentlichen Zweig derselben, auf die Kombinationslehre, keine Anwendung findet, und auf die Arithmetik auch nur im uneigentlichen Sinne.<< (Grassmann, Ausdehnungslehre, Einleitung, A, § 3)

Grassmanns Kritizismus ist der oben genannten Kritik Bolzanos ähnlich, obwohl letzterer die übliche Definition in seinem späteren Werk akzeptierte, vorausgesetzt, dass man den Begriff so ausdehnte, dass er noch Zahlen umfasste, während Grassmann statt der üblichen eine neue Definition der Mathematik einführte.[3] Die Mathematik wurde von Grassmann >Formenlehre< oder Wissenschaft der Denkformen genannt, das heißt Wissenschaft des vom Denken gesetzten Besonderen:

> >>Die reine Mathematik ist daher die Wissenschaft des besonderen Seins als eines durch das Denken gewordenen. Das besondere Sein, in diesem Sinne aufgefasst, nennen wir eine Denkform oder schlechtweg eine Form. Daher ist reine Mathematik Formenlehre.<< (Grassmann, Ausdehnungslehre, Einleitung, A, § 3)

Eine Form ist durch ihr Erzeugungsgesetz bestimmt: das Wort >Form< ist den mathematischen Gegenständen angemessen gerade deswegen, weil es mit dem Begriff des Formens und des Gestaltens verbunden ist, also mit dem Begriff des Werdens. Das Wort >Größe< bezieht sich auf bereits gegebene Dinge, denen der Mathematiker gegenübersteht, während das Wort >Form< sich auf etwas bezieht, das durch die Entstehung aus einem gegebenen Element intrinsisch bestimmt

3 Eigentlich hatte Bolzano in *Beyträge* eine neue Definition vorgeschlagen, die er aber in *Größenlehre* ablehnte (Cantù, 2003, S. 138--141).

wird. So werden die geometrischen Gestalten eigentlich nicht als mathematische Gegenstände betrachtet: ihnen entsprechen die extensiven Denkformen, deren Erzeugung durch die Bewegung eines Elementes bestimmt wird. Seitdem Formen durch ihre Erzeugungsgesetze, das heißt durch Funktionen, bestimmt werden, untersucht die Mathematik Beziehungen anstelle von Entitäten an sich.

Aus Grassmanns Definition der Mathematik folgt nicht, dass man Zahlen und stetige Quantitäten unter eine selbe Gattung subsumieren kann. Da die Erzeugungsgesetze der zwei Begriffe gegensätzlich waren, meinte Grassmann, dass es nützlich wäre, sie ausdrücklich zu unterscheiden, anstatt sie unter einem allgemeinen Begriff zu vereinigen.

VI. Abschließende Bemerkungen

Grassmanns Standpunkt und die Gründe seiner Kritik an der üblichen Definition der Mathematik sind einleuchtend, um die Folgen der Wolffschen terminologischen Auswahl zu beurteilen. Obwohl Wolff echte Gründe und Präzedenzfälle hatte, um >quantitas< als >Größe< zu übersetzen, hatte diese Auswahl, zusammen mit seinem hauptsächlich algebraischen Verständnis der Mathematik, bedeutende Folgen für die Auffassung der mathematischen Gegenstände und der Verhältnisse zwischen Algebra und Geometrie im 18. und 19. Jahrhundert, insbesondere bei deutschsprachigen Wissenschaftlern. Die Gleichsetzung von >quantitas< und >magnitudo<, die aus der algebraischen Tradition entstand, hatte einflussreiche Wirkungen sowohl von einem mathematischen als auch von einem epistemologischen Standpunkt aus.

Von einem mathematischen Standpunkt aus, gewährte jene Gleichsetzung die Anwendung von algebraischen Verfahren auf die Geometrie und die Bestimmung von stetigen geometrischen Gestalten mittels ihrer numerischen Maße. Der von Monge, Poncelet und Chasles im 19. Jahrhundert angefangene Streit um analytische versus synthetische Methode zeigt, wie problematisch die Relation zwischen algebraischem Kalkül und Geometrie war, insbesondere weil nicht allen Schritten des Kalküls eine geometrische Bedeutung entsprechen könnte. Grassmanns Widerlegung der Definition der Mathematik als Größenlehre soll also auf die Widerlegung jedes Versuchs, die Geometrie auf die Arithmetik zu gründen, zurückgeführt werden. Grassmanns Meinung nach, sollte jeder Zweig der Mathematik auf sich selbst gegründet werden: deshalb entwickelte er eine neue, von der Arithmetik unabhängige Theorie, welche die Entstehung der Vectortheorie und der Linearen Algebra förderte. Insbesondere sollte diese neue, Ausdehnungslehre genannte, Theorie als ein Mittel wirken, welches die Entgegensetzung zwischen analytischen und synthetischen Methoden aufheben und das Leibnizsche Projekt von einem geometrischen Kalkül ausführen könnte.

Von einem epistemologischen Standpunkt aus, führt die Gleichsetzung von >quantitas< und

>magnitudo< von selbst zu der Bestimmung der Beschaffenheiten der geometrischen Gestalten mittels der Beschaffenheiten der reellen Zahlen, wie das der Fall bei der Kontinuität ist. Im Gegenteil, die Herstellung einer nicht-archimedischen Geometrie bei Giuseppe Veronese bewies, dass die Kontinuitätsbeschaffenheiten der reellen Zahlen zum Teil anders als die der geometrischen Gestalten sein könnten (Cantù, 1999, S. 84--89).

Schließlich, wie ich oben erwähnte, behinderte die Übersetzung der Wörter >quantitas< und >magnitudo< durch das einziges Wort >Größe< eine angemessene und vollständige Begriffsbestimmung der Gegenstände der Mathematik. Schon im 17. Jahrhundert hatten Descartes und Leibniz die Mathematik als Wissenschaft von Beziehungen erklärt, aber die von Wolff weiterverbreitete Definition privilegierte eine noch ontologische Konzeption der Mathematik, da >Größen< sich auf >quanta< statt Quantitäten im allgemeinen bezogen. Die Vitalität der deutschsprachigen Debatte über die angemessene Definition der Mathematik ist dann zum Teil auch auf die Wolffsche einseitige Ansicht der Mathematik zurückzuführen, wenn nicht sogar seiner terminologischen Auswahl zu verdanken.

Literaturverzeichnis

Aristoteles (1964), *Aristotelis analytica priora et posteriora*. Hrsg. v. W. D. Ross. Oxonii. Zitiert als >>Aristoteles, Analytica priora<< mit Angabe des Paragraphen.

Bolzano, Bernard (1810): *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik.* Prag

Bolzano, Bernard (1975): *Einleitung zur Grössenlehre und Erste Begriffe der allgemeinen Grössenlehre.* In: *Gesamtausgabe*. Nachgelassene Schriften. Bd. II.A.7: Stuttgart/Bad Cannstatt

Cantù, Paola (1999): *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria.* Milano

Cantù, Paola (2003): La *matematica da scienza delle grandezze a teoria delle forme*. Doktorarbeit. Genova

Descartes, René (1966): *Regulae ad directionem ingenii.* In: AT. Bd. 10: Paris

Euler, Leonhard (1911): *Vollständige Anleitung zur Algebra mit den Zusätzen von J. L. Lagrange.* In: *Leonhardi Euleri Opera omnia.* Bd. I.1: Leipzig/Berlin. Zitiert als >>Euler, Algebra<< mit Angabe des Paragraphen.

Gauss, Carl Friedrich (1929): *Zur Metaphysik der Mathematik*. In: *Werke.* Hrsg. v. d. Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 12: S. 57--61

Grassmann, Hermann Günther (1894): *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert.* In: *Gesammelte mathematische und physikalische Werke.* Bd. I.1: Leipzig. Zitiert als >>Grassmann, Ausdehnungslehre<< mit Angabe des Paragraphen.

Hegel, Georg Wilhelm Friedrich (1985): *Wissenschaft der Logik.* In: *Gesammelte Werke.* Hrsg. v. d.

Rheinisch-Westfalischen Akademie der Wissenschaften. Bd. 21: Hamburg. Zitiert als >>Hegel, Wiss. der Logik<< mit Angabe des Paragraphen.

Kant, Immanuel (1900): *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral*. In: *AA*. Bd. 1: Berlin

Kant, Immanuel (KrV B): *Kritik der reinen Vernunft*, 2. Auflage (1787). In: *AA*. Bd. 3: Berlin

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1890): *Initia et Specimina Scientiae Generalis*. In: *GP*. Bd. 7: Berlin

Newton, Isaac (1728): *Arithmetica universalis*. London

Wolff, Christian (Deutsche Metaphysik): *Vernünftige Gedancken von Gott, der Welt und der Seele des Menschen, auch allen Dingen überhaupt, den Liebhabern der Wahrheit mitgetheilet*. In: *GW*. Bd. I.2: 1983 (Nachdr. D. Ausg. Halle 1751)

Wolff, Christian (Mathematisches Lexikon): *Mathematisches Lexicon*. Darinnen die in allen Theilen der Mathematik üblichen Kunst-Wörter erkläret, und zur Historie der Mathematischen Wissenschaften dienliche Nachrichten ertheilet, auch die Schriften, wo iede Materie ausgeführet zu finden, angeführet werden. In: *GW*. Bd. I.11: 1978 (Nachdr. D. Ausg. Leipzig 1716)