2.1 Parabola nella forma canonica

Studiamo con i metodi generali la conica nella espressione canonica

$$y = a x^2$$

Poniamo l'equazione nella forma:

$$a x^2 - y = 0$$

In coordinate omogenee

$$a x_1^2 - x_0 x_2 = 0$$

Tipo di conica

Matrice caratteristica $$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Discriminante $$\mathcal{a}_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$$

$$\mathcal{a}_{00} = a \cdot 0 - 0^2 = 0$$

La conica è una parabola. Essendo $\mathcal{a}_{00} = 0$ la conica è tangente alla retta impropria (due punti impropri coincidenti)

Punto improprio della conica

$$\begin{cases} a x_1^2 - x_0 x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$a x_1^2 = 0$ $\quad x_1 = 0$ $\quad x_2 = \rho$ con qualsiasi $\rho \neq 0$

Coordinate punto improprio $$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = \rho \end{cases}$$

Posto $\rho = 1$

Punto improprio parabola $P_\infty (0,0,1)$

Coincide con la direzione dell'asse y

Centro della conica

Come si è rilevato la retta impropria è tangente alla parabola, quindi essa è la polare del punto improprio.

Infatti la polare di $P_\infty(0,0,1)$ è

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

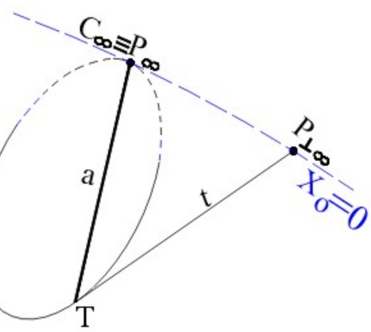
$$-\frac{1}{2}x_0 + 0\,x_1 + 0\,x_2 = 0 \qquad \text{da cui}$$

$$x_0 = 0$$

Quindi, essendo il punto improprio $P_\infty(0,0,1)$ della parabola polo della retta impropria esso è il centro della conica.

Asse della parabola

fig.6.1



La retta impropria, passando per il centro $P_\infty(0,0,1) \equiv C_\infty$ della conica, è un diametro della parabola, ed è coniugato rispetto a tutti gli altri diametri, in quanto questi sono polari di punti impropri che appartengono alla retta impropria stessa, contenente $P_\infty(0,0,1) \equiv C_\infty$.

Gli assi della conica sono i due diametri coniugati e ortogonali tra loro. Uno dei due diametri è la retta impropria che ha come polo il punto improprio $P_\infty(0,0,1) \equiv C_\infty$ della parabola; l'altro diametro sarà la polare del punto improprio $P_{\perp\infty}$ in direzione ortogonale a detto punto improprio $P_\infty(0,0,1) \equiv C_\infty$.

Per determinare l'asse, diverso dalla retta impropria si può procedere nella seguente maniera:

1. si determina il punto improprio della parabola $P_\infty(0,l,m)$;
2. si determina il punto improprio in direzione ortogonale $P_{\perp\infty}(0,m,-l)$;
3. si determina la polare del punto improprio $P_{\perp\infty}(0,m,-l)$ che è l'altro asse diverso dalla retta impropria.

Si procede secondo i tre punti precedenti

Il punto improprio della parabola si è già determinato

$$P_\infty(0,0,1)$$

Il punto improprio in direzione ortogonale è

$$P_\infty(0,1,0)$$

L'asse a è la polare di $P_\infty(0,1,0)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-0 \cdot x_0 + a \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \quad \text{da cui}$$

$$x_1 = 0$$

In coordinate non omogenee

$$x = 0$$

L'asse a della parabola è l'asse y

Vertici della parabola

Un vertice della parabola, come uno delle intersezione degli assi con la conica è il suo punto improprio. L'altro vertice si ottiene dall'intersezione dell'asse a con la conica effettuato in coordinate non omogenee

$$\begin{cases} y = a x^2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad y = 0 \quad \text{vertice } V_1(0,0)$$

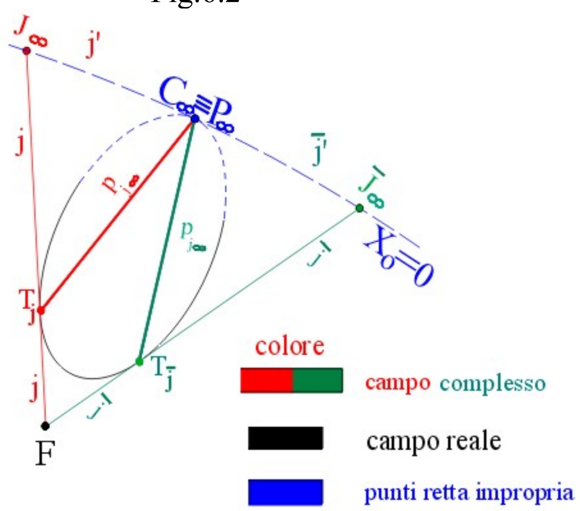
Un vertice è quindi $V_1(1,0.0)$ origine degli assi

L'altro vertice $V_{2\infty}(0,0.1)$ punto improprio parabola

Fuochi della parabola

I fuochi sono i quattro punti di intersezione delle tangenti alla conica condotte dai punti ciclici $J_\infty(0,1,i)$, $\bar{J}_\infty(0,1,-i)$.

Fig.6.2

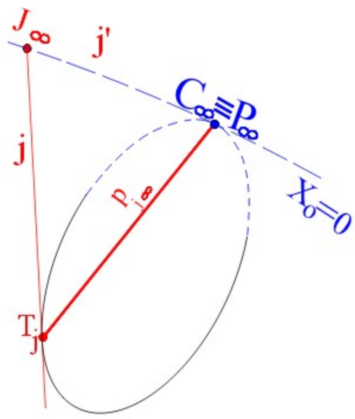


I punti ciclici appartengono alla retta impropria, che, nel caso della parabola, è tangente alla conica. Ne viene che due delle tangenti alla conica, $j', \overline{j}'$, condotte dai punti ciclici, coincidono con la retta impropria.

Si hanno così i seguenti punti di intersezione delle rette isotrope tangenti alla conica.

$j \cap \overline{j}$	fuoco reale F
$j' \cap \overline{j}'$	punto improprio della parabola $P_\infty \equiv C_\infty$
$j' \cap \overline{j}$	Punto ciclico $\overline{J}_\infty (0,1,-i)$
$j \cap \overline{j}'$	Punto ciclico $J_\infty (0,1,i)$

fig.6.3



Nella parabola vi è un solo fuoco F nel campo reale al finito; l'altro fuoco reale coincide con il punto improprio della conica.

Tracciamo le tangenti dal punto ciclico $J_\infty (0,1,i)$. Per far ciò si procede come al solito:

- si determina la polare p_j del punto ciclico $J_\infty (0,1,i)$
- si determinano i punti di intersezione della polare p_j con la conica. In questo caso vi sarà un punto T_j al finito, l'altro punto è il punto improprio $P_\infty \equiv C_\infty$ della parabola
- la tangente alla conica nel punto T_j è la polare di esso

Polare di $J_\infty (0,1,i)$

Equazione conica

$$a x_1^2 - x_0 x_2 = 0$$

polare p_j

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$-i\frac{1}{2}x_0 + a x_1 = 0$$

polare p_j $\quad x_1 = i\frac{1}{2a}x_0 \quad$ (6.1)

Intersezione della polare p_j *con la conica*

$$\begin{cases} a\,x_1^2 - x_0\,x_1 = 0 \\ x_1 = i\dfrac{1}{2a}x_0 \end{cases} \qquad (6.2)$$

Sostituendo sui ha:

$$a\left(i\frac{1}{2a}x_0\right)^2 - x_0x_2 = 0 \qquad\qquad -\frac{1}{4a}x_0^2 - x_0x_2 = 0$$

$$x_0\left(-\frac{1}{4a}x_0 - x_2\right) = 0 \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ -\dfrac{1}{4a}x_0 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{1}{4a}x_0 \end{cases} \qquad (6.2.3)$$

Si hanno due soluzioni. Sostituendo nella (6.2) si ha

Primo punto $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = i\dfrac{1}{2}x_0 \\ x_2 = \rho \end{cases}$ con $\rho \neq 0$ scelto $\rho = 1$ $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Punto improprio della parabola $P_\infty\,(0,0,1)$

Secondo punto $\begin{cases} x_0 = \rho \\ x_1 = i\dfrac{1}{2a}x_0 \\ x_2 = -\dfrac{1}{4a}x_0 \end{cases}$ con $\rho \neq 0$ scelto $\rho = 1$ $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = i\dfrac{1}{2a} \\ x_2 = -\dfrac{1}{4a} \end{cases}$

Secondo punto di intersezione $T_j\left(1,\, i\frac{1}{2},- \frac{a}{4}\right)$

Tangente j alla conica nel punto $T_j\left(1,\, i\frac{1}{2a},- \frac{1}{4a}\right)$, condotta dal punto ciclico $J_\infty\,(0,1,\,i)$

È la polare del punto $T_j\left(1,\, i\frac{1}{2},- \frac{a}{4}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ i\frac{1}{2a} \\ -\frac{1}{4a} \end{pmatrix} = 0$$

Tangente j $$\frac{1}{8a}x_0 + i\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0$$

Come noto alla tangente j condotta dal punto ciclico $J_\infty\left(0,1,\, i\right)$, vi corrisponde una tangente complessa e coniugata $\bar{j}$ condotta dal punto ciclico $\bar{j}_\infty\left(0,1,- i\right)$

Tangente $\bar{j}$ $$\frac{1}{8a}x_0 - i\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0$$

Il fuoco reale F è il punto di intersezione delle due tangenti complesse e coniugate $j\,,\,\bar{j}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{8a}x_0 + i\dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 = 0 \\ \dfrac{1}{8a}x_0 - i\dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 = 0 \end{cases}$$

in coordinate non omogenee

$$\begin{cases} \dfrac{1}{8a} + i\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y = 0 \\ \dfrac{1}{8a} - i\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$\frac{1}{4a} + 0 - y = 0 \quad \text{da cui}$$

$$y = \frac{1}{4a}$$

Sottraendo membro a membro

$$i\,x = 0 \qquad \text{da cui} \quad x = 0$$

Il fuoco reale ha coordinate $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{4a} \end{cases}$

Fuoco parabola $$F\left(0,\frac{1}{4a}\right) \qquad (6.3)$$

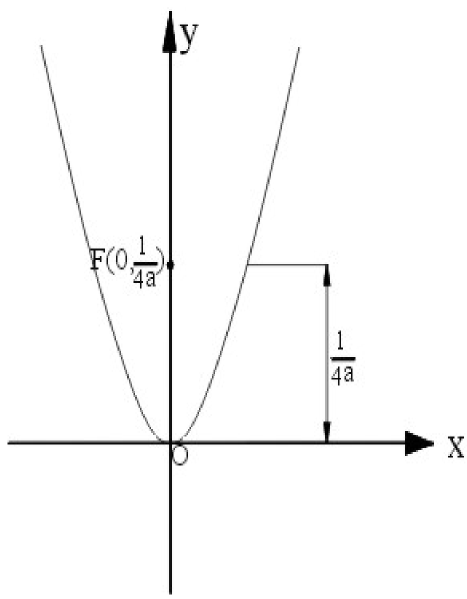


Fig.6.4

Direttrice della parabola

La direttrice è la polare del fuoco; in coordinate omogenee $F\left(1,0,\frac{1}{4a}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{4a} \end{pmatrix} = 0$$

$$-\frac{1}{8a}x_0 + 0 \cdot x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \qquad -\frac{1}{4a}x_0 - x_2 = 0$$

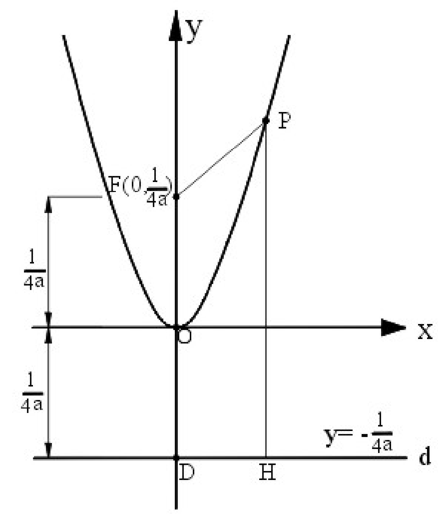
in coordinate non omogenee

$$-\frac{1}{4a} - y = 0$$

Equazione direttrice $\qquad y = -\frac{1}{4a} \qquad$ (6.4)

Eccentricità della parabola

Fig.6.5



Come esposto nei punti 4.5 – 4.6, le coniche sono caratterizzate dal valore di una costante e, denominata eccentricità, data dal rapporto tra la distanza PF di un punto P della curva dal fuoco F e quella PH dello stesso punto dalla direttrice d.

$$e = \frac{PF}{PH}$$

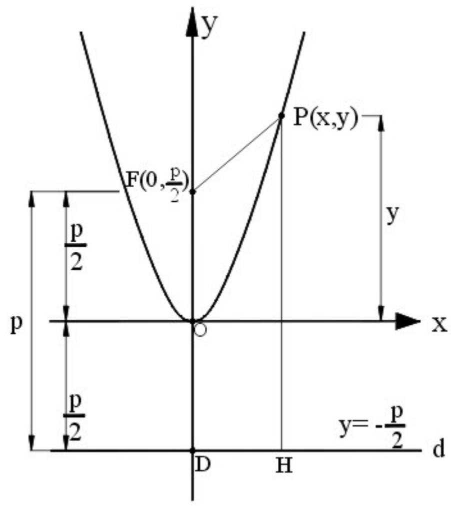
Considerato il vertice O della parabola, si ha:

$$e = \left|\frac{PO}{PD}\right| = \frac{\frac{a}{4}}{\frac{a}{4}} = 1$$

Come gia noto, le parabole hanno eccentricità $e = 1$

Parabola come luogo geometrico.

Fig.6.6



Da quanto esposto la parabola si può definire come il luogo geometrico dei punti del piano il cui rapporto costante e, denominato eccentricità, tra la distanza da un punto fisso detto fuoco F e quella da una retta denominata direttrice d è pari all'unità.

$$\frac{PF}{PH} = 1 \qquad (6.5)$$

Da cui:

$$PF = PH \qquad (6.6)$$

Dalla espressione (6,6) si può definire la parabola come:

il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F detto fuoco e da una retta d detta direttrice.

Si consideri la fig.6,6. Sia F il fuoco e "d" la retta direttrice, distanti p l'uno dall'altra. Si assumano, come riferimento, due assi cartesiani, con l'asse y passante per il fuoco F perpendicolare alla retta direttrice "d", l'origine O sull'asse y a metà distanza tra fuoco e direttrice, l'asse x, ovviamente, passante per l'origine e perpendicolare all'asse y.

.

Dal riferimento assunto ne viene che:

- Il fuoco ha coordinate $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{p}{2} \end{cases}$ $\qquad F\left(0, \frac{1}{2}p\right) \qquad (6.7)$

- Equazione della direttrice è: $\qquad y = -\frac{1}{2}p \qquad (6.8)$

- L'origine O, essendo equidistante dal fuoco e dalla direttrice, appartiene alla parabola

Consideriamo un punto $P(x,y)$ generico delle curva; affinché appartenga alla parabola occorre che rispetti la condizione espressa dalla (6,6):

$$PF = PH \qquad (6.6)$$

dove:

$$PF = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} \qquad PH = \left|y + \frac{p}{2}\right|$$

sostituendo nella (6.6)

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|y+\frac{p}{2}\right|$$

elevando al quadrato

$$x^2+y^2-2\frac{p}{2}y+\frac{p^2}{4}=y^2+2\frac{p}{2}y+\frac{p^2}{4} \qquad x^2-py=py \qquad x^2=2py$$

$$y=\frac{1}{2p}x^2 \qquad (6.9)$$

Posto

$$a=\frac{1}{2p} \qquad (6.10)$$

l'equazione della parabola è nella forma canonica

$$y=ax^2 \qquad (6.11)$$

Dalla (6.10) la distanza p del fuoco dalla direttrice è espresso rispetto al coefficiente a:

$$p=\frac{1}{2a}$$

Sostituendo nella (6.7), (6.8) si ottiene il fuoco e l'equazione delle direttrice rispetto al coefficiente a

Fuoco $\qquad F\left(0,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a}\right) \qquad F\left(0,\frac{1}{4a}\right) \qquad (6.12)$

Direttrice $\qquad y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a} \qquad y=-\frac{1}{4a} \qquad (6.13)$

2.2 Studio della parabola nella forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

In coordinate omogenee

$$ax_1^2 + bx_0x_1 - x_0x_2 + cx_0^2 = 0$$

Tipo di conica

Matrice caratteristica $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} c & \frac{b}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{b}{2} & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Discriminante $\mathcal{a}_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$

$$\mathcal{a}_{00} = a \cdot 0 - 0^2 = 0$$

La conica è una parabola. Essendo $\mathcal{a}_{00} = 0$ la conica è tangente alla retta impropria (due punti impropri coincidenti)

Punto improprio della conica

Intersecando con la retta impropria

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_0x_1 - x_0x_2 + cx_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$a x_1^2 = 0$ $\quad x_1 = 0 \quad$ $x_2 = \rho$ con qualsiasi $\rho \neq 0$

Coordinate punto improprio $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = \rho \end{cases}$

Posto $\rho = 1$

Punto improprio parabola $P_\infty(0,0,1)$ (6.14)

Coincide con la direzione dell'asse y

Centro della conica

Come si è rilevato la retta impropria è tangente alla parabola, quindi essa è la polare del punto improprio.

Infatti la polare di $P_\infty(0,0,1)$ è

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & \frac{b}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{b}{2} & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$-\frac{1}{2}x_0 + 0x_1 + 0x_2 = 0$ da cui

$$x_0 = 0$$

Quindi, essendo il punto improprio $P_\infty(0,0,1)$ della parabola polo della retta impropria esso è il centro della conica.

$$P_\infty(0,0,1) = C_\infty \qquad (6.15)$$

Asse della parabola

Come si è precedentemente rilevato l'asse della parabola è la polare del punto improprio $P_{\perp\infty}$ in direzione ortogonale al punto improprio $P_\infty(0,0,1) \equiv C_\infty$ della conica.

Il punto improprio della parabola si è già determinato

$$P_\infty(0,0,1)$$

Il punto improprio in direzione ortogonale è

$$P_\infty(0,1,0)$$

L'asse a è la polare di $P_\infty(0,1,0)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & \frac{b}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{b}{2} & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\frac{b}{2}x_0 + a x_1 = 0 \qquad x_1 = -\frac{b}{2a}x_0$

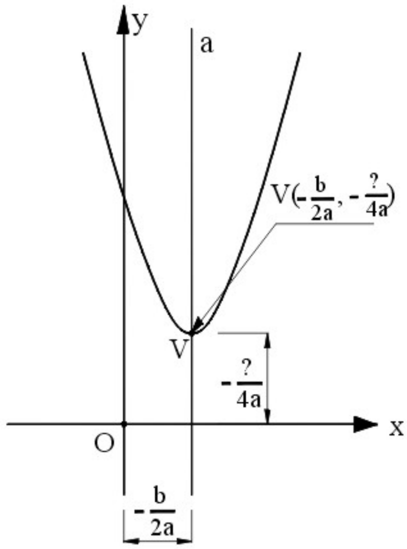
in coordinate non omogenee

$$x = -\frac{b}{2a} \qquad (6.16)$$

è una retta parallela asse y

Vertici della parabola

Fig.6.7



Un vertice della parabola, come uno delle intersezione degli assi con la conica è il suo punto improprio. L'altro vertice si ottiene dall'intersezione dell'asse a con la conica effettuato in coordinate non omogenee

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

$$y = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \qquad y = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \qquad y = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

Poniamo $\quad \Delta = b^2 - 4ac \quad$ si ha:

$$y = -\frac{\Delta}{4a} \qquad (6.17)$$

dalle (6.16). (6.17) si ha il vertice della parabola

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad (6.18)$$

Come noto, l'altro vertice della parabola è i lpunto improprio $V_{2\infty}(0,0.1)$

Fuochi della parabola

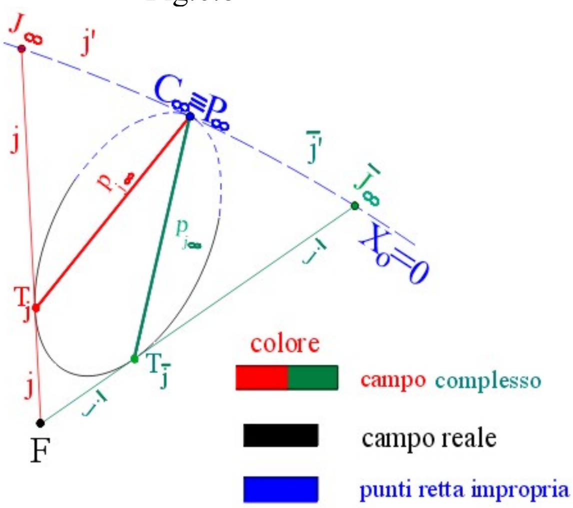
Per completezza si ripete qui ciò che è stato esposto nel punto precedente (potete anche saltare)

I fuochi sono i quattro punti di intersezione delle tangenti alla conica condotte dai punti ciclici $J_\infty(0,1,i)$, $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$.

I punti ciclici appartengono alla retta impropria, che, nel caso della parabola, è tangente alla conica. Ne viene che due delle tangenti alla conica, $j', \overline{j'}$, condotte dai punti ciclici, coincidono con la retta impropria.

Si hanno così i seguenti punti di intersezione delle rette isotrope tangenti alla conica.

Fig.6.8



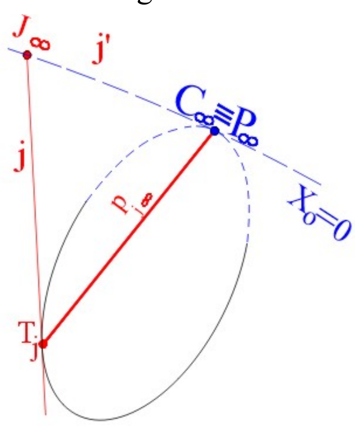
$j \cap \bar{j}$ — fuoco reale F

$j' \cap \bar{j}'$ — punto improprio della parabola $P_\infty \equiv C_\infty$

$j' \cap \bar{j}$ — Punto ciclico $\bar{J}_\infty (0,1,-i)$

$j \cap \bar{j}'$ — Punto ciclico $J_\infty (0,1,i)$

fig.6.9



Nella parabola vi è un solo fuoco F nel campo reale al finito; l'altro fuoco reale coincide con il punto improprio della conica.

Tracciamo le tangenti dal punto ciclico $J_\infty (0,1,i)$. Per far ciò si procede come al solito:

- si determina la polare p_j del punto ciclico $J_\infty (0,1,i)$
- si determinano i punti di intersezione della polare p_j con la conica. In questo caso vi sarà un punto T_j al finito, l'altro punto è il punto improprio $P_\infty \equiv C_\infty$ della parabola
- la tangente alla conica nel punto T_j è la polare di esso

Polare di $J_\infty (0,1,i)$

Equazione conica

$$ax_1^2 + b\,x_0 x_1 - x_0 x_2 + c\,x_0^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & \frac{b}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{b}{2} & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$x_0\left(\frac{b}{2} - i\frac{1}{2}\right) + a\,x_1 = 0 \qquad\qquad x_1 = \frac{1}{2a}(-b+i)\,x_0$$

In coordinate non omogenee

$$\textit{Polare } p_{j\infty} \qquad\qquad x = \frac{1}{2a}(-b+i) \qquad (6.19)$$

Intersezione della polare $p_{j\infty}$ con la conica

$$\begin{cases} ax_1^2 + b\,x_0x_1 - x_0x_2 + c\,x_0^2 = 0 \\ x_1 = \dfrac{1}{2a}(-b+i)\,x_0 \end{cases} \qquad (6.20)$$

sostituendo

$$a\frac{1}{4a^2}(-b+i)^2\,x_0^2 + b\,x_0^2\,\frac{1}{2a}(-b+i) - x_0x_2 + cx_0^2 = 0$$

$$x_0 \cdot \left[\frac{1}{4a}(-b+i)^2\,x_0 + b\,x_0\,\frac{1}{2a}(-b+i) - x_2 + cx_0\right] = 0$$

Si hanno due soluzioni

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = \left[\dfrac{1}{4a}\left(b^2 - 2bi + i^2\right) - \dfrac{b^2}{2a} + \dfrac{i\,b}{2a} + c\right] \cdot x_0 \end{cases}$$

Si hanno due soluzioni. Sostituendo nella (6.20) si ha

$$\textit{Primo punto} \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \dfrac{1}{2a}(-b+i)x_0 \\ x_2 = \rho \end{cases} \quad \text{con } \rho \neq 0 \qquad\qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = \rho \end{cases}$$

scelto $\rho = 1$
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Punto improprio della parabola $P_\infty(0,0,1)$

Secondo punto
$$\begin{cases} x_0 \neq 0 \\ x_1 = i\dfrac{1}{2a}(-b+i)x_0 \\ x_2 = \left[\dfrac{1}{4a}\left(b^2 - 2bi + i^2\right) - \dfrac{b^2}{2a} + \dfrac{ib}{2a} + c\right] \cdot x_0 \end{cases}$$

In coordinate non omogenee sviluppando

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2a}(-b+i) \\ y = \dfrac{b^2 - i2b - 1 - 2b^2 + i2b + 4ac}{4a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2a}(-b+i) \\ y = \dfrac{-b^2 - 1 + 4ac}{4a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2a}(-b+i) \\ y = \dfrac{-b^2 - (1 - 4ac)}{4a} \end{cases}$$

Si pone $b^2 - 4ac = \Delta$

Le coordinate del secondo punto di intersezione della polare $p_{j\infty}$ con la conica, nel campo reale al finito, sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2a}(-b+i) \\ y = \dfrac{-b^2 - \Delta}{4a} \end{cases} \qquad (6.21)$$

Secondo punto di intersezione $T_j\left(1,\ \dfrac{1}{2a}(-b+i),\ \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$ (6.22)

La tangente alla conica nel punto T_j è la polare di esso

Polare del punto $T_j\left(1,\ \frac{1}{2a}(-b+i),\ \frac{1-\Delta}{4a}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & \frac{b}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{b}{2} & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2a}(-b+i) \\ \frac{-1-\Delta}{4a} \end{pmatrix} = 0$$

con $\Delta = b^2 - 4ac$

Sviluppandosi ha:

$$x_0 \cdot \left[c + \frac{b}{4a}(-b+i) - \frac{1}{2} \cdot \frac{-1-b^2+4ac}{4a}\right] + x_1 \cdot \left[\frac{b}{2} + \frac{1}{2}(-b+i)\right] - \frac{1}{2}x_2 = 0$$

$$x_0 \cdot \left[\frac{8ac - 2b^2 + i2b + 1 + b^2 - 4ac}{8a}\right] + x_1 \cdot \left[\frac{b - b + i}{2}\right] - \frac{1}{2}x_2 = 0$$

$$\left[\frac{4ac - b^2 + 1 + i2b}{8a}\right] x_0 + i\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0$$

$$\left[\frac{1 - \left(b^2 - 4ac\right) + i2b}{8a}\right] x_0 + i\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \qquad \text{con} \qquad b^2 - 4ac = \Delta$$

$$\left[\frac{1 - \Delta + i2b}{8a}\right] \cdot x_0 + i\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0$$

Retta isotropa j

$$\left[\frac{1-\Delta}{8a} + \frac{ib}{4a}\right] \cdot x_0 + i\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \qquad (6.23)$$

Come noto, alla retta isotropa j, tangente alla conica, condotta dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$, vi corrisponde una retta $\bar{j}$ complessa e coniugata condotta dal punto ciclico $\bar{J}_\infty(0,1,-i)$

Retta isotropa $\bar{j}$

$$\left[\frac{1-\Delta}{8a} - \frac{ib}{4a}\right] \cdot x_0 - i\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \qquad (6.24)$$

Il fuoco F è l'intersezione delle due rette j e $\bar{j}$

$$F = j \cap \bar{j}$$

Intersezione $j \cap \bar{j}$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{1-\Delta}{8a} + \dfrac{ib}{4a}\right] \cdot x_0 + i\dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 = 0 \\ \left[\dfrac{1-\Delta}{8a} - \dfrac{ib}{4a}\right] \cdot x_0 - i\dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 = 0 \end{cases} \qquad (6.25)$$

Sommando membro a membro si ha:

$$2\frac{1-\Delta}{8a}x_0 - 2\frac{1}{2}x_2 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad x_2 = \frac{1-\Delta}{4a}x_0$$

In coordinate non omogenee:

$$y = \frac{1-\Delta}{4a}$$

Sottraendo la (6.25) membro a membro si ha:

$$2i\frac{b}{4a}x_0 + 2\frac{i}{2}x_1 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad x_1 = -\frac{b}{2a}x_0$$

In coordinate non omogenee:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Coordinate del fuoco F

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} \\ y = \dfrac{1-\Delta}{4a} \end{cases}$$

$$\textit{Fuoco} \quad F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right) \qquad (6.26)$$

Direttrice della parabola

La direttrice è la polare del fuoco $F\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$

Polare di $F\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & \dfrac{b}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{b}{2} & a & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2a} \\ \dfrac{-1-\Delta}{4a} \end{pmatrix} = 0$$

$$x_0\left(c-\frac{b^2}{4a}-\frac{1}{2}\frac{1-\Delta}{4a}\right)+x_1\left(\frac{b}{2}-a\frac{b}{2a}\right)-\frac{1}{2}x_2=0$$

$$x_0\left(c-\frac{b^2}{4a}-\frac{1-b^2+4ac}{8a}\right)+x_1\left(\frac{b}{2}-\frac{b}{2}\right)-\frac{1}{2}x_2=0$$

$$x_0\frac{8ac-2b^2-1+b^2-4ac}{8a}-\frac{1}{2}x_2=0$$

$$x_0\frac{4ac-b^2-1}{8a}-\frac{1}{2}x_2=0 \quad \text{da cui} \quad x_2=\frac{-1-b^2+4ac}{4a}x_0$$

$$x_2=-\frac{1+b^2-4ac}{4a}x_0 \qquad x_2=-\frac{1+\left(b^2-4ac\right)}{4a}x_0$$

posto $b^2-4ac=\Delta$

$$x_2=-\frac{1+\Delta}{4a}x_0$$

In coordinate non omogenee:

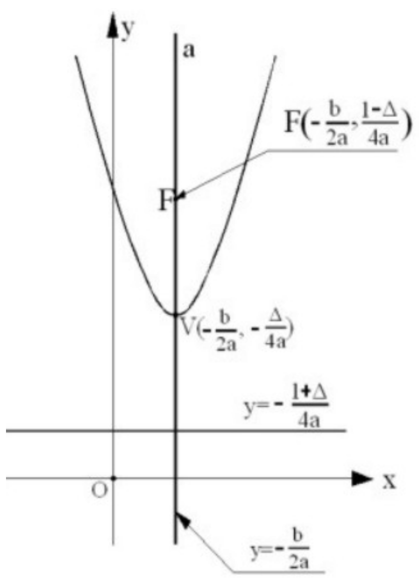
Direttrice d $\quad y=-\dfrac{1+\Delta}{4a}$ (6.27)

Retta parallela asse y

Elementi della parabola della parabola

Fig.6.10

$$y=ax^2+bx+c$$



Asse $\quad x=-\dfrac{b}{2a}$

Vertice $\quad V\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Fuoco $\quad F\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$

Direttrice $\quad y=-\dfrac{1+\Delta}{4a}$

Esercizio

Data la conica

$$13x^2 + 13y^2 - 10xy - 72 = 0$$

Determinare il tipo di conica e tutti i suoi parametri caratteristici: centro assi ecc.

--------------------o--------------------

Conica in coordinate omogenee

$$13x_1^2 + 13x_2^2 - 10x_1x_2 - 72x_0^2 = 0$$

Tipo di conica

Matrice caratteristica $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -72 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 13 \end{pmatrix}$

Discriminante $\mathfrak{a}_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$

$$\mathfrak{a}_{00} = 13 \cdot 13 - (-5)^2 = 144 > 0$$

La conica è un'ellisse

Centro della conica

Si ottiene dall'intersezione di due diametri, polari di punti impropri. Per semplicità si considerano le polari dei punti impropri degli assi cartesiani $X_\infty(0,1,0)$, $Y_\infty(0,0,1)$

Polare $X_\infty(0,1,0)$ $\quad \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -72 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$$0 \cdot x_0 + 13x_1 - 5x_2 = 0$$

in coordinate non omogenee

$$13x - 5y = 0$$

$$y = \frac{13}{5}x$$

Polare $Y_\infty(0,0,1)$ $\quad \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -72 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$0 \cdot x_0 - 5x_1 + 13x_2 = 0$$

in coordinate non omogenee

$$-5x + 13y = 0$$

$$y = \frac{5}{13}x$$

Coordinate del centro

Intersezione diametri $\begin{cases} y = \dfrac{13}{5}x \\ y = \dfrac{5}{13}x \end{cases}$ $\quad C(0,0) \quad$ (6.28)

Assi della conica

Gli assi della conica sono due diametri coniugati e ortogonali. La condizione di coniugio e ortogonalità per i loro parametri direttori è data dalla (4.1.6)

$$a_{12}\, l^2 + (a_{22} - a_{11})\, l\, m - a_{12}\, m^2 = 0$$

$$-5l^2 + (13-13)lm + 5m^2 = 0 \qquad -5l^2 + 5m^2 = 0 \qquad -5\left(\frac{l}{m}\right)^2 + 5 = 0$$

$$\left(\frac{l}{m}\right)^2 = 1 \qquad \frac{l}{m} = \pm 1$$

si hanno due soluzioni

$\begin{cases} l = \rho \quad m = \rho \\ l = \rho \quad m = -\rho \end{cases}$ con $\rho \neq 0$ scelto $\rho = 1$

Parametri direttori $\begin{cases} l = 1 \quad m = 1 \\ l = 1 \quad m = -1 \end{cases}$ (6.29)

punti impropri ortogonali

$$\begin{cases} A_{1\infty}\,(0,1,1) \\ A_{2\infty}\,(0,1,-1) \end{cases} \qquad (6.30)$$

Gli assi sono le rette passanti per il centro $C(0,0)$ e aventi i parametri direttori dati dalla (6.29)

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} \qquad y = x \qquad (6.31)$$

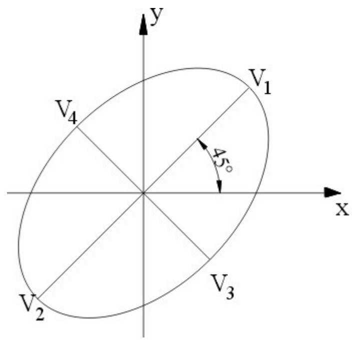
$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1} \qquad y = -x \qquad (6.32)$$

Gli assi dell'ellisse sono due rette inclinate rispettivamente: di 45°, bisettrice del primo e terzo quadrante; di –45° , bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Vertici dell'ellisse

I vertici sono le intersezioni degli assi con la conica

Fig.6.11



Vertici sull'asse $y = x$

$$\begin{cases} 13x^2 + 13y^2 - 10xy - 72 = 0 \\ y = x \end{cases} \qquad (6.33)$$

$$13x^2 + 13x^2 - 10x^2 - 72 = 0$$

$$16x^2 - 72 = 0 \qquad x^2 = \frac{72}{16} \qquad x^2 = \frac{9}{2}$$

$$x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad (6.34)$$

Si hanno i vertici sull'asse $y = x$

$$\begin{cases} V_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \\ V_2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \qquad (6.35)$$

Vertici sull'asse $y = -x$

$$\begin{cases} 13x^2 + 13y^2 - 10xy - 72 = 0 \\ y = -x \end{cases} \qquad (6.33)$$

$$13x^2 + 13x^2 + 10x^2 - 72 = 0 \qquad 36x^2 - 72 = 0 \qquad x^2 = \frac{72}{36}$$

$$x = \pm\sqrt{2} \qquad (6.36)$$

Si hanno i vertici sull'asse $y = -x$

$$\begin{cases} V_1\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \\ V_2\left(-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\right) \end{cases} \qquad (6.37)$$

Fuochi dell'ellisse

Sono i quattro punti di intersezione delle tangenti alla conica condotte dai punti ciclici $J_\infty(0,1,i)$, $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$. Vedi Fig6.12.

Fig.6.12

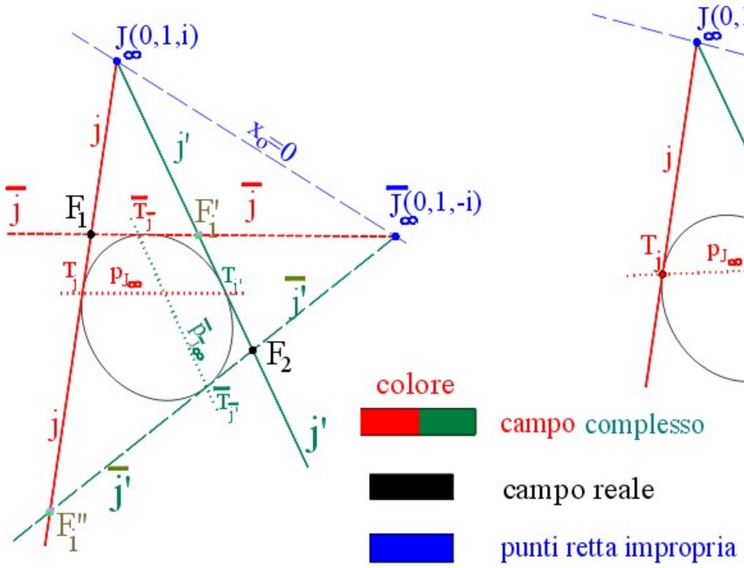
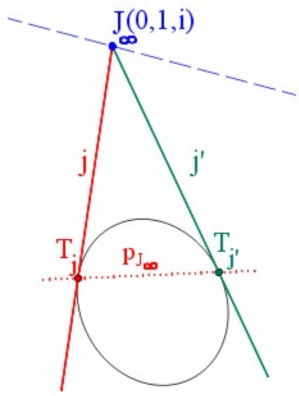


Fig.6.13



Come al solito, le tangenti si ottengono con lo stesso procedimento più volte esposto. Così per la tangente j condotta dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$ (vedi figura concettuale (Fig.6.13)

- si determina la polare $p_{j\infty}$ del punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$
- si determinano i punti di intersezione della polare p_j con la conica. In questo caso vi sarà un punto T_j al finito, l'altro punto è il punto improprio $P_\infty \equiv C_\infty$ della parabola
- la tangente alla conica nel punto T_j è la polare di esso

$$\textit{Polare di } J_\infty(0,1,i) \qquad \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -72 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$x_0 \cdot 0 + x_1(13 - i5) + x_2(-5 + i13) = 0 \qquad x_1(13 - i5) + x_2(-5 + i13) = 0$$

$$x_2 = x_1 \frac{13 - i5}{5 - i13}$$

in coordinate non omogenee

$$\textit{Polare } p_{J\infty} \qquad y = x\frac{13 - i5}{5 - i13} \qquad (6.38)$$

c

$$\begin{cases} 13x^2 + 13y^2 - 10xy - 72 = 0 \\ y = x\dfrac{13 - i5}{5 - i13} \end{cases} \qquad (6.39)$$

$$13x^2 + 13\frac{(13 - i5)^2}{(5 - i13)^2}x^2 - 10\frac{13 - i5}{5 - i13}x^2 - 72 = 0$$

$$x^2\,\frac{13(5 - i13)^2 + 13(13 - i5)^2 - 10(13 - i5)\cdot(5 - i13)}{(5 - i13)^2} - 72 = 0$$

$$x^2[325 - i1690 - 2197 + 2197 - i1690 - 325 + i1690 + i250] = 72\cdot(5 - i13)^2$$

$$-i1440x^2 = 72\cdot(5 - i13)^2 \qquad x^2 = -\frac{72}{i1440}(5 - i13)^2 \qquad x^2 = i\frac{1}{20}(5 - i13)^2$$

$$x = \sqrt{i}\,\frac{1}{\sqrt{20}}(5 - i13) \qquad (6.40)$$

--------------------o--------------------

Ricordiamo

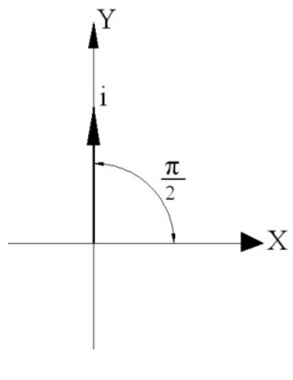
Sviluppo $\sqrt{i}$

Si applica la formula di De Moivre

$$z = \rho\,(\cos\varphi + i\,sen\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left|\rho^{\frac{1}{n}}\right|\cdot\left[\cos\frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi) + i sen\frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi)\right]$$

così: $$\sqrt{z} = \left|\sqrt{\rho}\right|\cdot\left[\cos\frac{\frac{\varphi}{2} + 2k\pi}{n} + i\,sen\frac{\frac{\varphi}{2} + 2k\pi}{n}\right]$$



per $z = i$ $\qquad \rho = 1$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{i} = \left|\sqrt{1}\right|\cdot\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\,sen\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right]$$

si hanno due soluzioni che si ripetono periodicamente

$k = 0$

$$\sqrt{i} = cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4} \qquad \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

$k = 1$

$$\sqrt{i} = cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) \qquad \sqrt{i} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{i} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

---------------------o--------------------

Sostituendo nella (6.39) i due valori della $\sqrt{i}$, si hanno le ascisse dei due punti di intersezione T_j, T_j' della polare $p_{J\infty}$ con la conica

$$\begin{cases} x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)\cdot\frac{1}{\sqrt{20}}(5 - i13) \\ x_{j'} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)\cdot\frac{1}{\sqrt{20}}(5 - i13) \end{cases}$$

Riunendo le due soluzioni

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)\cdot\frac{1}{\sqrt{20}}(5 - i13)$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{40}}(5 - i13 + i5 + 13) \qquad x = \pm\frac{1}{2\sqrt{10}}(18 - i8)$$

Ascisse dei, punti T_j, T_j' $$x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}(9 - i4) \qquad (6.41)$$

Sostituendo nel sistema (6.39) si ottengono le ordinate dei punti T_j, T_j'

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}(9 - i4)\cdot\frac{13 - i5}{5 - i13} \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{117 - i45 - i52 - 20}{5 - i13}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{97 - i97}{5 - i13} \qquad y = \pm\frac{97}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1 - i}{5 - i13} \qquad y = \pm\frac{97}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1 - i}{5 - i13}\cdot\frac{5 + i13}{5 + i13}$$

$$y = \frac{97}{\sqrt{10}} \cdot \frac{5 + i\,13 - i\,5 + 13}{194} \qquad y = \pm \frac{1}{2\sqrt{10}}(18 + i\,8) \qquad y = \pm \frac{2}{2\sqrt{10}}(9 + i\,4)$$

Ordinate dei, punti $T_j\,, T_j'$ $$x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}(9 + i\,4) \qquad (6.42)$$

Per le (6.41) e (6.42) i punti di intersezione $T_j\,, T_j'$ della polare $p_{J\infty}$ con la conica sono:

$$\begin{cases} T_j\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}(9 - i\,4),\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}(9 + i\,4)\right) \\ T_{j'}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}(9 - i\,4),\ -\dfrac{1}{\sqrt{10}}(9 + i\,4)\right) \end{cases} \qquad (6.43)$$

Tangente alla conica nel punto T_j

Si ottiene determinando la polare del punto

Polare del punto T_j *(tangente j alla conica nel punto* T_j *) Fig.6.13*

In coordinate omogenee :

Equazione conica $$13x_1^2 + 13x_2^2 - 10x_1x_2 - 72x_0^2 = 0$$

Punto T_j $$T_j\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{10}}(9 - i\,4),\ \frac{1}{\sqrt{10}}(9 + i\,4)\right)$$

Polare di T_j $$(x_0 \quad x_1 \quad x_2) \cdot \begin{pmatrix} -72 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}(9 - i\,4) \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}(9 + i\,4) \end{pmatrix} = 0$$

$$-72x_0 + x_1 \cdot \left[13\frac{1}{\sqrt{10}}(9 - i\,4) - 5\frac{1}{\sqrt{10}}(9 + i\,4)\right] + x_2 \cdot \left[-5\frac{1}{\sqrt{10}}(9 - i\,4) + 13\frac{1}{\sqrt{10}}(9 + i\,4)\right] = 0$$

$$-72x_0 + x_1\frac{117 - i\,52 - 45 - i\,20}{\sqrt{10}} + x_2\frac{-45 + i\,20 + 117 + i\,52}{\sqrt{10}} = 0$$

$$-72x_0 + x_1 \cdot \left(\frac{72}{\sqrt{10}} - i\frac{72}{\sqrt{10}}\right) + x_2 \cdot \left(\frac{72}{\sqrt{10}} + i\frac{72}{\sqrt{10}}\right) = 0$$

Tangente j $$-x_0 + x_1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - i\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + x_2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}} + i\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0 \qquad (6.44)$$

Tangente $\bar{j}$ alla conica coniugata di j

Come si è dimostrato, alla tangente j alla conica, condotta dal punto ciclico $J_\infty\,(0,1,i)$, vi corrisponde una tangente $\bar{j}$, complessa coniugata, condotta dal punto ciclico $\bar{J}_\infty\,(0,1,-i)$. Si ha quindi

$$\text{Tangente } \bar{j} \qquad -x_0 + x_1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}} + i\frac{1}{\sqrt{10}} \right) + x_2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - i\frac{1}{\sqrt{10}} \right) = 0 \qquad (6.45)$$

Tangente alla conica nel punto $T_{j'}$

Equazione conica $\quad 13x_1^2 + 13x_2^2 - 10x_1x_2 - 72x_0^2 = 0$

Punto $T_{j'}$ $\quad T_j\left(1,\ -\frac{1}{\sqrt{10}}(9 - i4),\ -\frac{1}{\sqrt{10}}(9 + i4) \right)$

$$\text{Polare di } T_j \qquad \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -72 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}}(9 - i4) \\ -\frac{1}{\sqrt{10}}(9 + i4) \end{pmatrix} = 0$$

$$-72x_0 + x_1 \cdot \left[13\frac{1}{\sqrt{10}}(9 - i4) - 5\frac{1}{\sqrt{10}}(9 + i4) \right] + x_2 \cdot \left[-5\frac{1}{\sqrt{10}}(9 - i4) + 13\frac{1}{\sqrt{10}}(9 + i4) \right] = 0$$

$$-72x_0 + x_1\frac{117 - i52 - 45 - i20}{\sqrt{10}} + x_2\frac{-45 + i20 + 117 + i52}{\sqrt{10}} = 0$$

$$-72x_0 + x_1 \cdot \left(\frac{72}{\sqrt{10}} - i\frac{72}{\sqrt{10}} \right) + x_2 \cdot \left(\frac{72}{\sqrt{10}} + i\frac{72}{\sqrt{10}} \right) = 0$$

$$\text{Tangente } j' \qquad -x_0 + x_1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}} + i\frac{1}{\sqrt{10}} \right) + x_2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}} - i\frac{1}{\sqrt{10}} \right) = 0 \qquad (6.46)$$

Tangente $\bar{j}'$ alla conica coniugata di j'

Alla tangente j' alla conica, condotta dal punto ciclico $J_\infty\,(0,1,i)$, vi corrisponde una tangente, complessa coniugata $\bar{j}'$, condotta dal punto ciclico $\bar{J}_\infty\,(0,1,-i)$. Si ha quindi

$$\text{Tangente } \bar{j}' \qquad -x_0 + x_1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}} - i\frac{1}{\sqrt{10}} \right) + x_2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}} + i\frac{1}{\sqrt{10}} \right) = 0 \qquad (6.47)$$

Si hanno così le quattro tangenti alla conica $j, \bar{j}, j', \bar{j}'$, condotte dai punti ciclici $J_\infty\,(0,1,i)$. $\bar{J}_\infty\,(0,1,-i)$ date dalle rette (6.44), (6.45), (6.46), (6.47):

Tangente j $$-x_0+x_1\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+x_2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}+i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=0 \qquad (6.44)$$

Tangente $\bar{j}$ $$-x_0+x_1\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}+i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+x_2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=0 \qquad (6.45)$$

Tangente j' $$-x_0+x_1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}+i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+x_2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}-i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=0 \qquad (6.46)$$

Tangente $\bar{j}'$ $$-x_0+x_1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}-i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+x_2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}+i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=0$$

(6.47)

Fuochi reali

Sono le intersezioni delle rette isotrope, complesse coniugate, condotte dai punti ciclici $J_\infty\left(0,1,i\right)$. $\bar{J}_\infty\left(0,1,-i\right)$ e tangenti alla conica.

Fuoco F_1

Intersezione $j\cap\bar{j}$

$$\begin{cases}-x_0+x_1\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+x_2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}+i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=0\\ -x_0+x_1\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}+i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+x_2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=0\end{cases}$$

Sommando membro a membro:

$$-2x_0+2\frac{1}{\sqrt{10}}x_1+2\frac{1}{\sqrt{10}}x_2=0$$

in coordinate non omogenee:

$$-1+\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y=0 \qquad (6.48)$$

Sottraendo membro a membro:

$$-i\,2\frac{1}{\sqrt{10}}x_1+i\,2\frac{1}{\sqrt{10}}x_2=0$$

$$x_2=x_1$$

in coordinate non omogenee:

$$y=x \qquad (6.49)$$

Si ha il sistema:

$$\begin{cases} -1+\dfrac{1}{\sqrt{10}}x+\dfrac{1}{\sqrt{10}}y=0 \\ y=x \end{cases} \qquad (6.50)$$

$$-1+\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}x=0 \qquad -1+\frac{2}{\sqrt{10}}x=0 \qquad x=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Coordinate del fuoco F_1 $\qquad x=\dfrac{\sqrt{10}}{2} \qquad y=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$$F_1\left(\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \qquad (6.51)$$

Fuoco F_2

Intersezione $j'\cap\overline{j'}$

$$\begin{cases} -x_0+x_1\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}+i\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)+x_2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}-i\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=0 \\ -x_0+x_1\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}-i\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)+x_2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}+i\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro:

$$-2x_0-2\frac{1}{\sqrt{10}}x_1-2\frac{1}{\sqrt{10}}x_2=0$$

in coordinate non omogenee:

$$1+\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y=0 \qquad (6.52)$$

Sottraendo membro a membro:

$$i\,2\frac{1}{\sqrt{10}}x_1-i\,2\frac{1}{\sqrt{10}}x_2=0$$

$$x_2=x_1$$

in coordinate non omogenee:

$$y=x \qquad (6.53)$$

Si ha il sistema:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{\sqrt{10}}x+\dfrac{1}{\sqrt{10}}y=0 \\ y=x \end{cases} \qquad (6.54)$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}x=0 \qquad 1+\frac{2}{\sqrt{10}}x=0 \qquad x=-\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Coordinate del fuoco F_2 $\qquad x=-\frac{\sqrt{10}}{2} \qquad y=-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$$F_2\left(-\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \qquad (6.55)$$

I due fuochi F_1 F_2 sono sull'asse dell'ellisse $y=x$

Fuochi immaginari

Sono le intersezioni delle rette isotrope, non complesse coniugate, condotte dai punti ciclici $J_\infty(0,1,i)$. $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$ e tangenti alla conica.

Si hanno le intersezioni

F_{i1} intersezione $j\cap\overline{j'}$

F_{i2} intersezione $j'\cap\overline{j}$

Fuoco F_{i1}

Intersezione $j\cap\overline{j'}$

$$\begin{cases} -x_0+x_1\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+x_2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}+i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=0 \\ -x_0+x_1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}-i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+x_2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}+i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro:

$$-2x_0-i2\frac{1}{\sqrt{10}}x_1+i2\frac{1}{\sqrt{10}}x_2=0$$

in coordinate non omogenee:

$$-1-i\frac{1}{\sqrt{10}}x+i\frac{1}{\sqrt{10}}y=0 \qquad (6.56)$$

Sottraendo membro a membro:

$$2\frac{1}{\sqrt{10}}x_1+2\frac{1}{\sqrt{10}}x_2=0$$

$$x_2=-x_1$$

in coordinate non omogenee:

$$y = -x \tag{6.57}$$

Si ha il sistema:

$$\begin{cases} -1 - i\dfrac{1}{\sqrt{10}}x + i\dfrac{1}{\sqrt{10}}y = 0 \\ y = -x \end{cases} \tag{6.58}$$

$$-1 - i\frac{1}{\sqrt{10}} - i\frac{1}{\sqrt{10}} = 0 \qquad 1 + i\frac{2}{\sqrt{10}}x = 0 \qquad x = -\frac{1}{i}\frac{\sqrt{10}}{2} \qquad x = i\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Coordinate del fuoco F_{i1} $\quad x = i\dfrac{\sqrt{10}}{2} \qquad y = -i\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$$F_{i1}\left(i\frac{\sqrt{10}}{2}, -i\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \tag{6.59}$$

Fuoco F_{i2}

Intersezione $j' \cap \bar{j}$

$$\begin{cases} -x_0 + x_1\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}} + i\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) + x_2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}} - i\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0 \\ -x_0 + x_1\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}} + i\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) + x_2\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}} - i\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro:

$$-2x_0 + i2\frac{1}{\sqrt{10}}x_1 - i2\frac{1}{\sqrt{10}}x_2 = 0$$

in coordinate non omogenee:

$$-1 + i\frac{1}{\sqrt{10}}x - i\frac{1}{\sqrt{10}}y = 0 \tag{6.60}$$

Sottraendo membro a membro:

$$-2\frac{1}{\sqrt{10}}x_1 - 2\frac{1}{\sqrt{10}}x_2 = 0$$

$$x_2 = -x_1$$

in coordinate non omogenee:

$$y = -x \tag{6.61}$$

Si ha il sistema:

$$\begin{cases} -1+i\dfrac{1}{\sqrt{10}}x-i\dfrac{1}{\sqrt{10}}y=0 \\ y=-x \end{cases} \qquad (6.62)$$

$$-1+i\frac{1}{\sqrt{10}}x+i\frac{1}{\sqrt{10}}x=0 \qquad -1+i\frac{2}{\sqrt{10}}x=0 \qquad x=\frac{1}{i}\frac{\sqrt{10}}{2} \qquad x=-i\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Coordinate del fuoco F_{i2} $\quad x=-i\dfrac{\sqrt{10}}{2} \quad y=i\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$$F_{i2}\left(-i\frac{\sqrt{10}}{2},\ i\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \qquad (6.63)$$

I due fuochi immaginari $F_{i1},\ F_{i2}$ sono punti complessi coniugati la cui retta di congiunzione è l'asse reale della conica $y=-x$

Direttrici della conica

Sono le polari dei fuochi.
Consideriamo solamente i fuochi reali

Polare del fuoco $F_1\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

In coordinate omogenee:

$$F_1\left(1,\ \frac{\sqrt{10}}{2},\ \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

$$Polare \qquad (x_0 \quad x_1 \quad x_2)\cdot\begin{pmatrix} -72 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 13 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix}=0$$

$$-72x_0+\left(13\frac{\sqrt{10}}{2}-5\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\cdot x_1+\left(-5\frac{\sqrt{10}}{2}+13\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\cdot x_2=0$$

$$-72x_0+4\sqrt{10}x_1+4\sqrt{10}x_1=0 \qquad -18x_0+\sqrt{10}x_1+\sqrt{10}x_1=0$$

In coordinate omogenee

Direttrice d_1 $\qquad \sqrt{10}x+\sqrt{10}y-18=0 \qquad y=-x+\dfrac{18}{\sqrt{10}}$

È una retta parallela all'asse dell'ellisse $y = -x$

Polare del fuoco $F_2\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

In coordinate omogenee:

$$F_1\left(1, -\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

$$Polare \qquad \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -72 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ \frac{-\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$-72x_0 + \left(-13\frac{\sqrt{10}}{2} + 5\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cdot x_1 + \left(5\frac{\sqrt{10}}{2} - 13\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cdot x_2 = 0$$

$$-72x_0 - 4\sqrt{10}x_1 - 4\sqrt{10}x_1 = 0 \qquad 18x_0 + \sqrt{10}x_1 + \sqrt{10}x_1 = 0$$

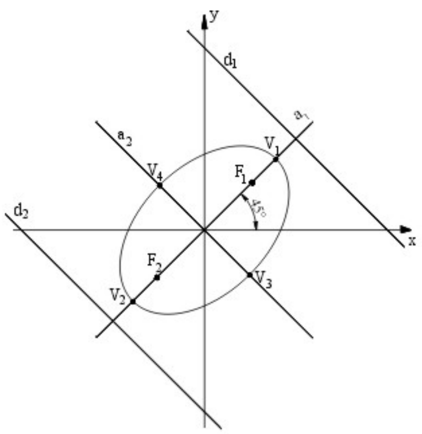
In coordinate omogenee

$$Direttrice\ d_2 \qquad \sqrt{10}x + \sqrt{10}y + 18 = 0 \qquad y = -x - \frac{18}{\sqrt{10}}$$

È una retta parallela all'asse dell'ellisse $y = -x$

Parametri della conica

Fig.6.14



$$Assi \quad \begin{cases} a_1 & y = x \\ a_2 & y = -x \end{cases}$$

$$Centro \quad C(0, 0)$$

$$Vertici \quad \begin{cases} V_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \\ V_2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} V_3\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \\ V_4\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

$$Direttrici \quad \begin{cases} d_1 & y = -x + \frac{18}{\sqrt{10}} \\ d_2 & y = -x - \frac{18}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Indietro... [clic per precedente](#)

Indietro... [Clic per la pagina iniziale](#)