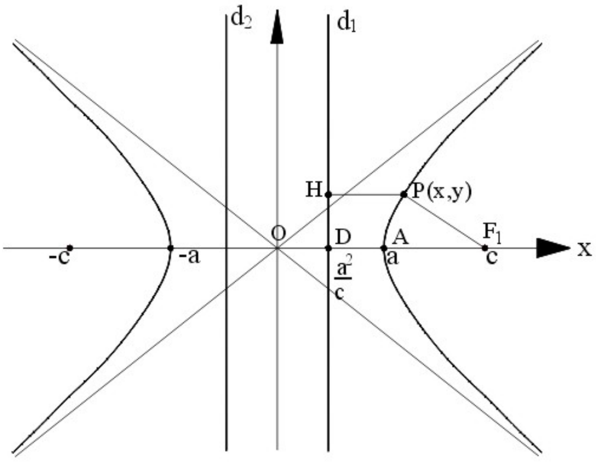
5.2.7 *Iperbole come luogo geometrico*

5.2.7.1 *I definizione – costanza del rapporto di distanze*

L'iperbole si è già espressa come luogo geometrico dei punti del piano il cui rapporto tra la distanza da un punto fisso detto fuoco e una retta detta direttrice è una costante maggiore dell'unità.

Si assume l'asse x passante per i due fuochi, l'asse y ortogonale a x e l'origine nel punto medio tra i due fuochi. Si ha:

fig.5.2.6



Vertici $V_1(a,0),\ V_2(-a,0)$

Fuochi $F_1(+c,0)\quad F_2(-c,0)$

Direttrici $x = \dfrac{a^2}{c} \qquad x = -\dfrac{a^2}{c}$

Eccentricità $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{d} > 1$

Luogo geometrico $\dfrac{PF_1}{PH} = e \qquad (5.2.38)$

$$\frac{(PF_1)^2}{(PH)^2} = e^2$$

$$\frac{(x-c)^2+y^2}{\left(\dfrac{a^2}{c}-x\right)^2} = \frac{c^2}{a^2} \qquad\qquad \frac{x^2+c^2-2cx+y^2}{a^4+c^2x^2-2ca^2x}\cdot c^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

$$a^2x^2+a^2c^2-2ca^2x+a^2y^2 = a^4+c^2x^2-2ca^2x$$

$$a^2y^2+a^2c^2-a^4 = c^2x^2-a^2x^2$$

$$a^2y^2+a^2\cdot\left(c^2-a^2\right) = \left(c^2-a^2\right)\cdot x^2$$

Poniamo $c^2-a^2=b^2$ *sostituendo*

$$a^2y^2+a^2b^2=b^2x^2 \qquad\qquad b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

dividendo per a^2b^2

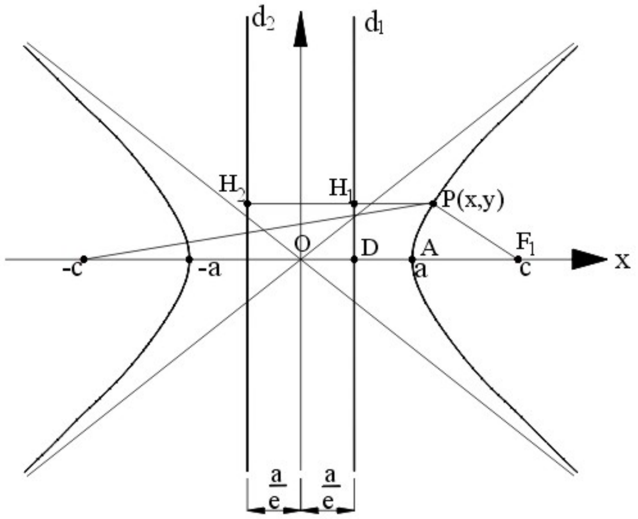
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.2.39)$$

L'equazione (5.2.39) soddisfa i luogo geometrico imposto dalla (5.2.38)

5.2.7.2 *II definizione – luogo come somma di distanze*

Si assumono i precedenti riferimenti

Fig.5.2.7



Vertici $V_1(a,0),\ V_2(-a,0)$

Fuochi $F_1(+c,0)$ $F_2(-c,0)$

Eccentricità

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{d} > 1$$

Direttrici $x = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{a}{e}$

$$x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{a}{e}$$

Per la precedente definizione di luogo geometrico riferita ad entrambe i fuochi si ha:

$$\frac{PF_2}{PH_2} = e \qquad\qquad \frac{PF_1}{PH_1} = e$$

da cui

$$PF_2 = PH_2 \cdot e \qquad\qquad PF_1 = PH_1 \cdot e$$

sottraendo membro a membro:

$$PF_2 - PF_1 = PH_2 \cdot e - PH_1 \cdot e \qquad\qquad PF_2 - PF_1 = (PH_2 - PH_1) \cdot e$$

ma $PH_2 - PH_1 = H_2H_1$

si ha: $PF_2 - PF_1 = H_2H_1 \cdot e$ (5.2.40)

dove dalla figura $H_2H_1 = 2\dfrac{a}{e}$

sostituendo nella (5.2.40)

$$PF_2 - PF_1 = 2\frac{a}{e} \cdot e$$

$$\boxed{PF_2 - PF_1 = 2a} \qquad (5.2.41)$$

Dalla espressione (5.2.41) si ha un'altra definizione dell'iperbole come luogo geometrico.

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti per i quali è costante la differenza della distanze da due punti fissi detti fuochi.

Con riferimento alla fig.5.2.7 sviluppando la (5.2.41) si ha:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

elevando al quadrato e sviluppando si ha:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2+4a^2+4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4cx-4a^2=4a\cdot\sqrt{(x.c)^2+y^2} \qquad cx-a^2=a\cdot\sqrt{(x.c)^2+y^2}$$

elevando al quadrato

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)$$

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2x^2-2cxa^2+a^2c^2+a^2y^2$$

$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

$$\left(c^2-a^2\right)\cdot x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right) \qquad b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

dividendo per a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Equazione che soddisfa la relazione del luogo geometrico espresso dalla (5.2.41)

5.2.8 *Iperbole equilatera*

L'iperbole equilatera è un'iperbole avente gli asintoti ortogonali

Le equazione degli asintoto sono:

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{b}x \\ y = -\dfrac{a}{b}x \end{cases} \qquad \begin{cases} a\,x - b\,y = 0 \\ a\,x + b\,y = 0 \end{cases}$$

per l'ortogonalità delle due rette deve essere:

$$a \cdot a - b \cdot b = 0 \qquad a^2 - b^2 = 0 \qquad a^2 = b^2$$

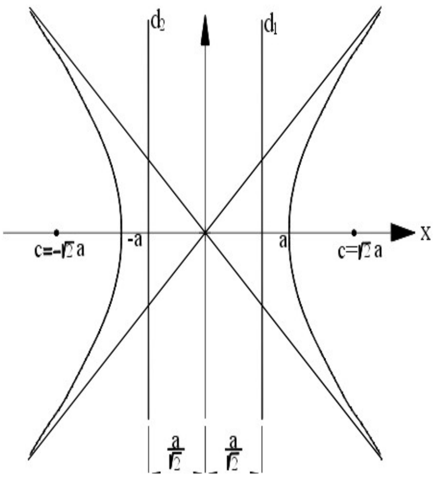
$$a = b \qquad (5.2.42)$$

L'equazione dell'iperbole equilatera è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad x^2 - y^2 = a^2 \qquad (5.2.43)$$

Con $a = b$ i parametri caratteristici dell'iperbole divengono

Fig.5.2.8



Vertici

$$sull'asse\ x \begin{cases} V_1(a,0) \\ v_2(-a,0) \end{cases} \qquad (5.2.44)$$

$$sull'asse\ y \begin{cases} V_{i1}(i\,a,\,0) \\ V_{i2}(-\,i\,a,0) \end{cases}$$

Asintoti

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{a}x \\ y = -\dfrac{a}{a}x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases} \qquad (5.2.45)$$

Bisettrici quadranti

Fuochi

$$sull'asse\ x \begin{cases} F_1(c,0) \\ F_2(-c,0) \end{cases} \qquad (5.2.46)$$

$$sull'asse\ y\ \begin{cases} F_{i1}(0,\, i\,c) \\ F_{i2}(0, -\, i\,c) \end{cases}$$

dove

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ essendo $a = b$ si ha: $c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2}$

$$c = \sqrt{2} \cdot a \qquad (5.2.47)$$

I fuochi sono nei punti

$$sull'asse\ x \begin{cases} F_1(\sqrt{2}\,a,\, 0) \\ F_2(-\sqrt{2}\,a,\, 0) \end{cases} \qquad (5.2.48)$$

$$sull'asse\ y\ \begin{cases} F_{i1}(0,\, i\sqrt{2}\,a) \\ F_{i2}(0, -\, i\sqrt{2}\,a) \end{cases}$$

Direttrici

$$x = \pm\, \frac{a^2}{c}$$

Per la (5.2.46) $c = \sqrt{2} \cdot a$ quindi $x = \pm\, \dfrac{a^2}{\sqrt{2}\,a}$

$$x = \pm\, \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad (5.2.49)$$

Eccentricità

$$e = \frac{c}{a}$$

Per la (5.2.46) $c = \sqrt{2} \cdot a$ quindi $e = \dfrac{\sqrt{2}\,a}{a}$

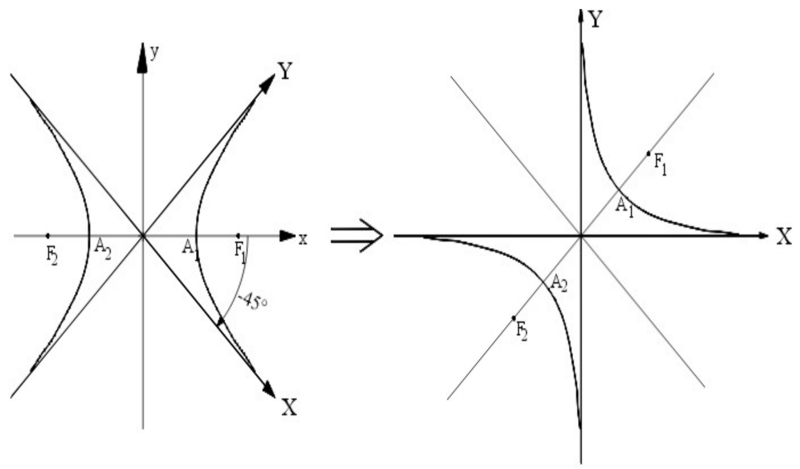
$$e = \sqrt{2} \qquad (4.2.50)$$

5.2.9 *Iperbole equilatera con gli assi cartesiani coincidenti con gli asintoti*

L'iperbole equilatera, fin qui studiata, ha gli asintoti ortogonali tra loro, e inclinati di $45°$ rispetto agli assi di riferimento. Ne viene che si possono scegliere gli asintoti come assi ortogonali di riferimento assumendo assi X,Y ruotati di $\pm\, 45°$ rispetto a quelli x,y precedentemente considerati.

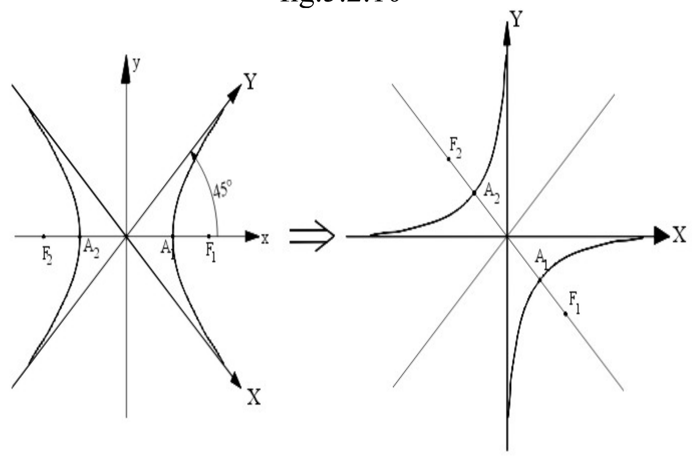
Così, scegliendo assi X,Y ruotati di $-\,45°$ rispetto agli assi x,y, si ottiene un'iperbole che ha come assi di riferimento gli asintoti, e posta nel primo e terzo quadrante (fig.5.2.9)

fig.5.2.9



Scegliendo invece assi X,Y ruotati di + $45°$ rispetto agli assi x,y, si ottiene un'iperbole che ha come assi di riferimento gli asintoti, e posta nel secondo e quarto quadrante (fig.5.2.9) fig.5.2.10

fig.5.2.10

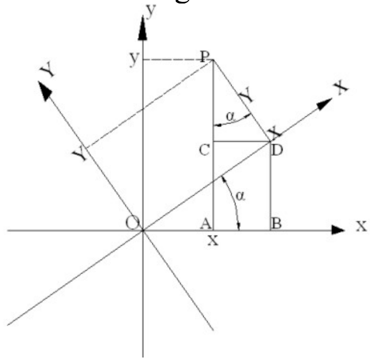


--------------------o--------------------

Ricordiamo
Rotazione di assi

Relazione delle coordinate x,y *di un punto* P *in funzione di quelle* X,Y *dello stesso punto degli assi ruotati di un anglo* α *rispetto ai primi*
Si ha, osservando la fig.5

Fig.5.2.11



$$\begin{cases} x = OA = OB - AB \\ y = AP = AC + CP \end{cases} \qquad CA = BD \qquad \begin{cases} x = OA = OB - AB \\ y = AP = BD + CP \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Ysen\alpha \\ y = Xsen\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

--------------------o--------------------

Così, data l'iperbole equilatera:

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (2.5.51)$$

eseguiamo una rotazione di $-45°$ degli assi di riferimento.

$$\begin{cases} x = X\cos(-45) - Ysen(-45) \\ y = Xsen(-45) + Y\cos(-45) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y) \end{cases}$$

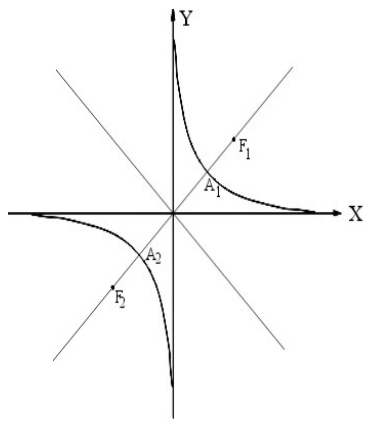
Sostituendo nella (5.2.51) si ha:

$$\frac{1}{2}(X + Y)^2 - \frac{1}{2}(-X + Y)^2 = a^2$$

$$\frac{1}{2}\left[X^2 + 2XY + Y^2 - X^2 + 2XY - Y^2\right] = a^2 \qquad \frac{1}{2}4XY = a^2$$ si ha

Equazione iperbole equilatera 1° - 3° quadrante

$$X\,Y = \frac{a^2}{2} \qquad (2.5.52)$$



Posta genericamente la costante

$$\frac{a^2}{2} = K$$

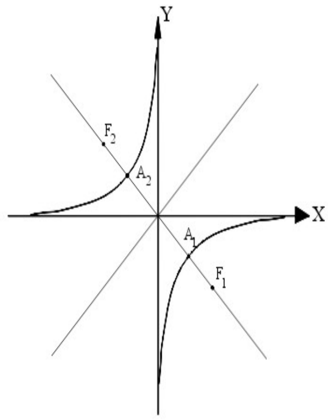
l'equazione di una iperbole equilatera con gli assi di riferimento coincidenti con gli asintoti si presenta nella forma:

$$X\,Y = K$$

$$Y = \frac{K}{X} \qquad (2.5.53)$$

Equazione iperbole equilatera 2° - 4° quadrante

Dalla equazione (2.5.51) dell'iperbole equilatera in forma canonica, con una rotazione degli assi di $+\ 45^\circ$ si ottiene l'equazione della curva ne *2° - 3°* quadrante:



$$X\,Y = -K$$

$$Y = -\frac{K}{X} \qquad (2.5.54)$$

5.2.9.1 *Parametri caratteristici dell'iperbole equilatera posta tra 1° - 3° quadrante*

Consideriamo l'equazione dell'iperbole (5.2.52), ottenuta dalla canonica attraverso una rotazione di $-\ 45^\circ$ degli assi.

$$X\,Y = \frac{a^2}{2}$$

fig.5.2.12

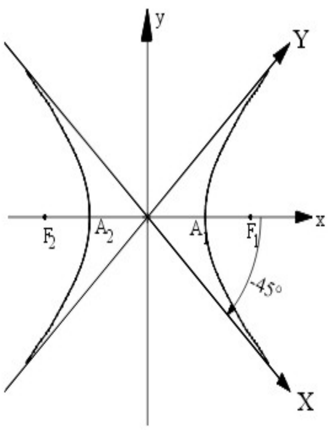
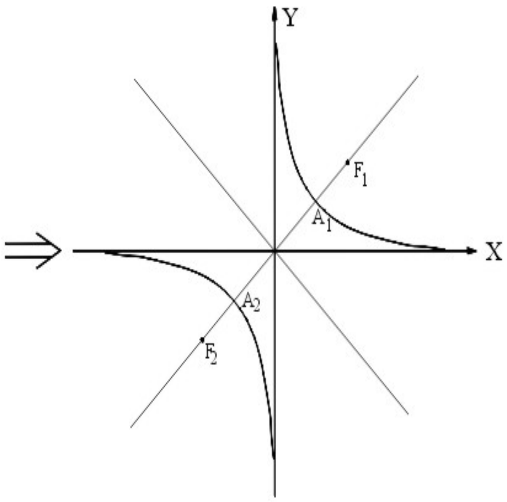


fig.5.2.13



Determiniamo i parametri caratteristici: assi, vertici, fuochi, direttrice, eseguendo la rotazione di $-\ 45^\circ$ sui parametri noti dell'iperbole espressa in forma canonica

Assi

Gli assi dell'iperbole corrispondente alla forma canonica (fig.5.2.12) coincidono con quelli di riferimento. E precisamente

Asse trasverso	*asse x*	$y = 0$	(2.5.55)
Asse non trasverso	*asse y*	$x = 0$	(2.5.56)

Eseguendo la rotazione di $-\ 45^\circ$ degli assi

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} X + \dfrac{1}{\sqrt{2}} Y \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} X + \dfrac{1}{\sqrt{2}} Y \end{cases}$$ sostituendo nelle (2.5.55) (2.5.56) si ha:

Asse trasverso

Sostituendo nella (2.5.55)

$$.-\frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{\sqrt{2}} Y = 0$$

$$Y = X \qquad (2.5.57)$$

retta per l'origine bisettrice 1° - 3° quadrante (fig.5.2.13)

Asse non traverso

Sostituendo nella (2.5.55)

$$.\frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{\sqrt{2}} Y = 0$$

$$Y = -X \qquad (2.5.58)$$

retta per l'origine bisettrice 2° - 4° quadrante (fig.5.2.13)

Fuochi

I fuochi dell'iperbole corrispondente alla forma canonica (fig.5.2.12), posti sull'asse traverso sono:

Fuoco $F_1(c,0)$ *coordinate* $\begin{cases} x = c \\ y = 0 \end{cases}$ (2.5.59)

Fuoco $F_2(-c,0)$ *coordinate* $\begin{cases} x = -c \\ y = 0 \end{cases}$ (2.5.60)

con $c = \sqrt{a^2 + a^2}$ $c = \sqrt{2}a$

Eseguendo la rotazione di $-45°$ degli assi

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} X + \dfrac{1}{\sqrt{2}} Y \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} X + \dfrac{1}{\sqrt{2}} Y \end{cases}$$ sostituendo nelle (2.5.59) – (2.5.60) si ha:

Fuoco F_1 *coordinate*

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y & (I) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y = 0 & (II) \end{cases}$$

Dalla *(II)* si ha

$$X = Y \qquad (2.5.61)$$

sostituendo nella *(I)* $\sqrt{2}\,a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}X \qquad 2a = 2X$ da cui

$X = a$ e per la (2.5.61) $Y = a$ si ha quindi:

Fuoco F_1 $\quad F_1(a,a) \qquad$ (2.5.61)

Fuoco F_2 *coordinate*

$$\begin{cases} -\sqrt{2}\,a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y & (I) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y = 0 & (II) \end{cases}$$

Dalla *(II)* si ha

$$X = Y \qquad (2.5.61)$$

sostituendo nella *(I)* $-\sqrt{2}\,a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}X \qquad -2a = 2X$ da cui

$X = -a$ e per la (2.5.61) $Y = -a$ si ha quindi:

Fuoco F_2 $\quad F_1(-a,-a) \qquad$ (2.5.62)

Vertici

I vertici dell'iperbole sono i punti di intersezione dell'asse trasverso con la conica

$$\begin{cases} XY = 0 \\ Y = X \end{cases} \qquad X^2 = \frac{a^2}{2} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ X_2 = -\dfrac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vertice V_1

coordinate $\begin{cases} X_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ Y_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$V_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \qquad (2.5.63)$$

Vertice V_2

coordinate $\begin{cases} X_1 = -\dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ Y_1 = -\dfrac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$V_2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \qquad (2.5.64)$$

Direttrici

Le direttrici dell'iperbole corrispondente alla forma canonica (fig.5.2.12) sono:

a. *Direttrice rispetto al fuoco F_1*

$$x = \frac{a^2}{c}$$

con $c = \sqrt{a^2 + a^2}$ $\quad c = \sqrt{2}\,a$ $\quad$ e quindi $x = \dfrac{a^2}{\sqrt{2}\,a}$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad (2.5.65)$$

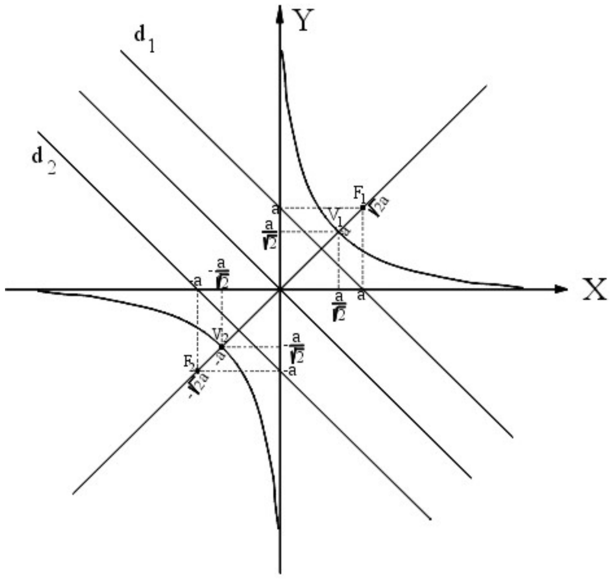
Effettuando la rotazione di -45°

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad X + Y - a = 0$$

direttrice d_1 $\qquad Y = -X + a$

fig.2.5.14



b. *Direttrice rispetto al fuoco* F_2

$$x = -\frac{a^2}{c}$$

con $\quad c = \sqrt{a^2 + a^2} \quad c = \sqrt{2}\,a \quad$ e quindi $\quad x = -\frac{a^2}{\sqrt{2}\,a}$

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}} \qquad (2.5.66)$$

Effettuando la rotazione di $-45°$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y = -\frac{a}{\sqrt{2}} \qquad\qquad X + Y + a = 0$$

direttrice d_2 $\qquad Y = -X + a \qquad$ (2.5.57)

5.2.10 *Studio con procedimento generale dell'iperbole equilatera nella forma generica*

$$Y = \frac{K}{X} \qquad (2.5.58)$$

Per esercizio studiamo la conica espressa dalla (2.5.58), determinandone con i metodi generali i parametri caratteristici

Poniamo l'equazione nella forma:

$$XY - K = 0$$

in coordinate omogenee:

$$X_1X_2 - K\,X_0 = 0$$

Tipo di conica

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Discriminante $\quad \mathcal{a}_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$

$$\mathcal{a}_{00} = 0 \cdot 0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} < 0$$

La conica è un'iperbole

Centro dell'iperbole

Si può ottenere dall'intersezione di due diametri, polari di due punti impropri. Per comodità si scelgono i due punti:

$$X_\infty\,(0{,}1{,}0),\ Y_\infty\,(0{,}0{,}1)$$

Polare di $X_\infty\,(0{,}1{,}0)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$0\,X_0 + 0\,X_1 + \frac{1}{2}X_2 = 0 \qquad X_2 = 0$$

$Y = 0$ asse X

Polare di $X_\infty\,(0{,}0{,}1)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$0\,X_0 + \frac{1}{2}X_1 + 0\,X_2 = 0 \qquad X_1 = 0$$

$$X = 0 \qquad \text{asse } Y$$

Il centro è l'intersezione dei due diametri:

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$Centro \qquad C(0,0) \qquad \textit{origine degli assi di riferimento} \quad (2.5.59)$$

Assi dell'iperbole

Sono i due diametri autoconiugati ortogonali tra loro.

La condizione di coniugio e ortogonalità è:

$$a_{12}\,l^2 + (a_{22} - a_{11})\,l\,m - a_{12}\,m^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}l^2 + (0 - 0)\,l\,m - \frac{1}{2}m^2 = 0 \qquad l^2 - m^2 = 0 \qquad \frac{l^2}{m^2} - 1 = 0$$

$$\frac{l}{m} = \pm 1 \qquad \begin{cases} l_1 = \rho & m_1 = \rho \\ l_2 = \rho & m_2 = -\rho \end{cases} \quad \text{con qualsiasi } \rho \neq 0$$

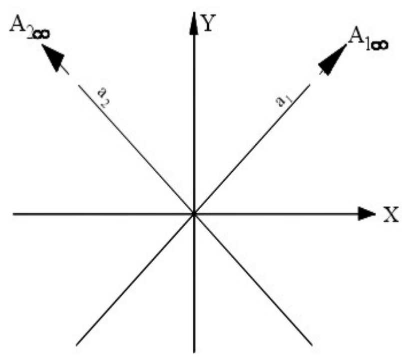
scelto $\rho = 1$ i punti impropri dei due assi sono $\begin{cases} A_{1\infty}(0,1,1) \\ A_{2\infty}(0,1,-1) \end{cases}$

Gli assi sono le rette passanti per il centro $C(0,0)$ e con parametri direttori corrispondenti ai due punti impropri $A_{1\infty}(0,1,1)$, $A_{2\infty}(0,1,-1)$

$$\begin{cases} \dfrac{X - X_0}{l_1} = \dfrac{Y - Y_0}{m_1} \\[2ex] \dfrac{X - X_0}{l_2} = \dfrac{Y - Y_0}{m_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{X - 0}{1} = \dfrac{Y - 0}{1} \\[2ex] \dfrac{X - 0}{1} = \dfrac{Y - 0}{-1} \end{cases}$$

fig.2.5.15

$$\begin{cases} asse\ a_1 & Y = X \\ asse\ a_2 & Y = -X \end{cases} \qquad (2,5,60)$$



Gli assi sono le bisettrici del 1° - 3° quadrante e 2° - 4° quadrante.

Vertici dell'iperbole

Sono i punti di intersezione degli assi con la conica

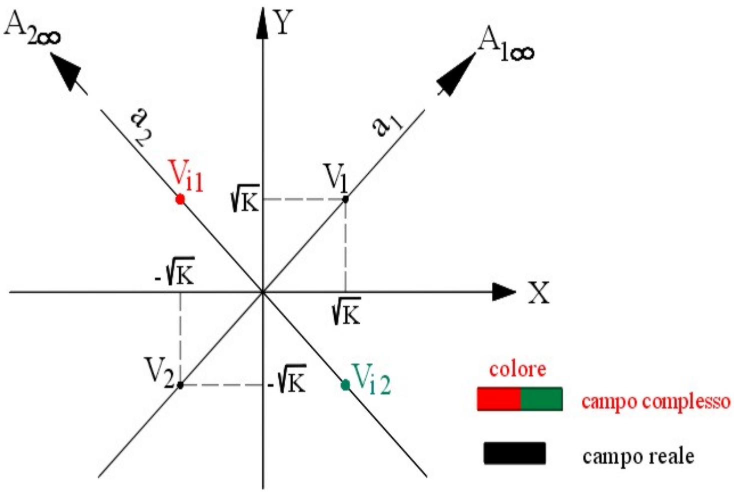
Vertici sull'asse a_1

$$\begin{cases} XY = K \\ Y = X \end{cases} \qquad X^2 = K \qquad X = \pm\sqrt{K} \qquad Y = \pm\sqrt{K}$$

Si hanno due vertici reali e distinti sull'asse a_1 traverso che interseca la conica

$$V_1\left(\sqrt{K},\sqrt{K}\right) \qquad V_2\left(-\sqrt{K},-\sqrt{K}\right) \qquad (2.5.61)$$

fig.2.5.16



Vertici sull'asse a_2

$$\begin{cases} XY = K \\ Y = -X \end{cases} \qquad -X^2 = K \qquad X^2 = -K \qquad X = \pm\sqrt{-K}$$

$$X = \pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{K} \qquad X = \pm i\sqrt{K} \qquad Y = \mp i\sqrt{K}$$

Si hanno due vertici complessi e coniugati sull'asse a_2 non traverso che non interseca la conica

$$V_{i1}\left(-i\sqrt{K},i\sqrt{K}\right) \qquad V_{i2}\left(i\sqrt{K},-i\sqrt{K}\right) \qquad (2.5.62)$$

L'intersezione dei due punti complessi coniugati è l'asse non traverso reale dell'iperbole

Asintoti dell'iperbole

Sono le tangenti ai punti impropri della conica e quindi le polari di essi rispetto alla conica.

Punti impropri della conica

$$\begin{cases} X_1X_2 - K X_0 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \qquad X_1X_2 = 0 \qquad \begin{cases} X_1 = \rho \quad X_2 = 0 \\ X_1 = 0 \quad X_2 = \rho \end{cases} \qquad \text{con } \rho \neq 0$$

posto $\rho = 1$ i punti impropri si possono esprimere

$$A_{1\infty}(0,1,0) \qquad A_{2\infty}(0,0,1)$$

Le tangenti sono le polari dei punti impropri della conica.

Polare di $A_{1\infty}(0,1,0)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$0\,X_0 + 0\,X_1 + \frac{1}{2}X_2 = 0 \qquad X_2 = 0$$

$$Y = 0 \quad \text{asse } X$$

Polare di $A_{2\infty}(0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

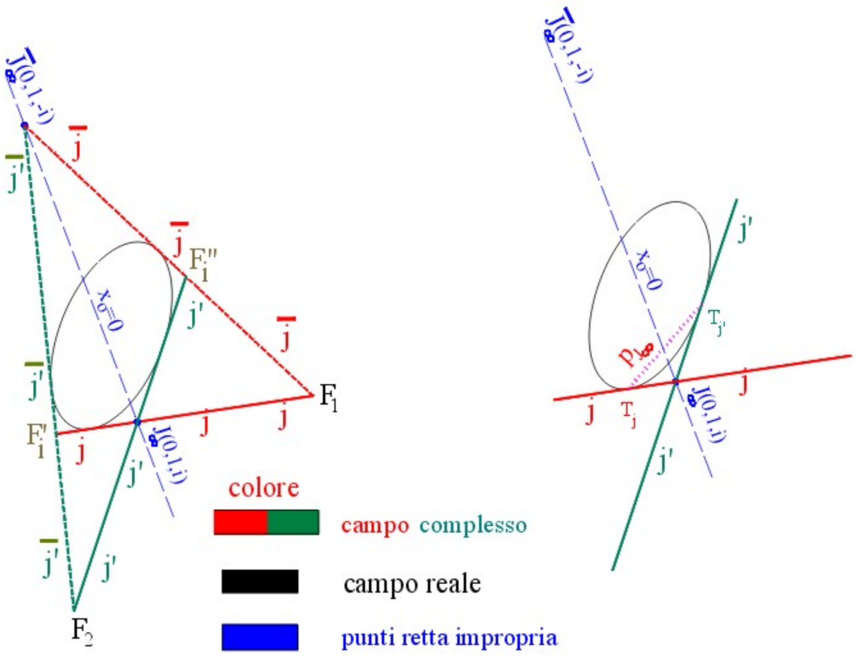
$$0\,X_0 + \frac{1}{2}X_1 + 0\,X_2 = 0 \qquad X_1 = 0$$

$$X = 0 \quad \text{asse } Y$$

Gli asintoti dell'iperbole coincidono con gli assi cartesiani di riferimento

Fuochi dell'iperbole

Sono le quattro intersezioni tra le tangenti alla conica condotte dai punti ciclici $J_\infty(0,1,i)$, $\overline{J_\infty}(0,1,-i)$



Per tracciare le tangenti alla conica, da un punto del piano (da $J_\infty(0,1,i)$ in figura), si può procedere come già indicato nei paragrafi precedenti:

a. Si determina la polare p_j del punto da cui si debbono tracciare le tangenti: in questo caso dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$ o $\bar{J}_\infty(0,1,-i)$

b. Si determinano i punti di intersezione T_j, T_j' della polare p_{j_∞} con la conica, che sono anche i punti di tangenza delle tangenti condotte da $J_\infty(0,1,i)$ o $\bar{J}_\infty(0,1,-i)$

c. Le polari dei punti di tangenza T_j, T_j' forniscono le tangenti j, j' in essi alla conica

Tangenti j, j' condotte dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$

Si sviluppa il procedimento indicato nei punti a,b,c

Equazione iperbole

$$X_1 X_2 - K X_0 = 0$$

Polare p_{j_∞} del punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$0 X_0 + \frac{1}{2} i X_1 + \frac{1}{2} X_2 = 0 \qquad i X_1 + X_2 = 0$$

$$i\,X + Y = 0 \qquad\qquad Y = -i\,X$$

Punti di intersezione $T_j , T_{j'}$ *con la conica*

$$\begin{cases} X\,Y = K & (2.5.63) \\ Y = -i\,X & (2.5.64) \end{cases} \qquad -i\,X^2 = K \quad X^2 = \frac{K}{-i} \qquad\qquad X^2 = iK$$

$$X = \sqrt{i}\,\sqrt{K} \qquad (2.5.65)$$

---------------------o--------------------

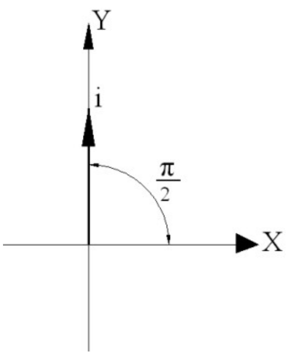
Sviluppo $\sqrt{i}$

Si applica la formula di De Moivre

$$z = \rho\left(cos\varphi + i\,sen\varphi\right)$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left|\rho^{\frac{1}{n}}\right| \cdot \left[cos\frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi) + isen\frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi)\right]$$

così: $$\sqrt{z} = \left|\sqrt{\rho}\right| \cdot \left[cos\frac{\frac{\varphi}{2} + 2k\pi}{n} + i\,sen\frac{\frac{\varphi}{2} + 2k\pi}{n}\right]$$



per $z = i \qquad \rho = 1$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{i} = \left|\sqrt{1}\right| \cdot \left[cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\,sen\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right]$$

si hanno due soluzioni che si ripetono periodicamente

$k = 0$

$$\sqrt{i} = cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4} \qquad\qquad \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

$k = 1$

$$\sqrt{i} = cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) \qquad \sqrt{i} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{i} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

---------------------o--------------------

Sostituendo nella (2.5.65) si hanno le ascisse dei due punti di intersezione T_j, T_j'

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\cdot\sqrt{k} \\ X_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\cdot\sqrt{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(1+i)\cdot \\ X_2 = \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(-1-i) \end{cases}$$

sostituendo nella (2.5.64) si hanno le ordinate dei due punti T_j, T_j'

$$\begin{cases} Y_1 = -i\cdot\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(1+i)\cdot \\ Y_2 = (-i)\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(-1-i) \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_1 = \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(1-i)\cdot \\ Y_2 = \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(-1+i) \end{cases}$$

I punti di intersezione della polare p_{j_∞} sono:

$$T_{j\infty}\left[\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(1+i),\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(1-i)\right] \qquad T_{j'\infty}\left[\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(-1-i),\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(1-i)\right] \qquad (2.5.66)$$

Si possono ora determinare le tangenti j, j' alla conica condotte dal punto ciclico $J_\infty\,(0,1,i)$ date dalle polari dei due punti T_j, T_j'

Polare del punto $T_{j\infty}\left[1,\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(1+i),\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(1-i)\right]$

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(1+i) \\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(1-i) \end{pmatrix} = 0$$

tangente j $$-K X_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(1-i)X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(1+i)X_2 = 0 \qquad (2.5.67)$$

$$\textit{Polare del punto} \quad T_{j\infty}\left[1,\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(-1-i),\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(-1+i)\right]$$

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(-1-i) \\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cdot(-1+i) \end{pmatrix} = 0$$

$$\textit{tangente } j' \qquad -K\,X_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(-1+i)\,X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(-1-i)\,X_2 = 0 \qquad (2.5.68)$$

Come noto e si è rilevato nei punti precedenti, le tangenti condotte dal punto ciclico $\bar{J}_\infty(0,1,-i)$ sono rette coniugate delle tangenti (2.5.67), (2.5.68) condotte dal punto ciclico $J_\infty(0,1,+i)$

$$\textit{tangente } \bar{j} \qquad -K\,X_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(1+i)\,X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(1-i)\,X_2 = 0 \qquad (2.5.69)$$

$$\textit{tangente } \bar{j}' \qquad -K\,X_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(-1-i)\,X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(-1+i)\,X_2 = 0 \qquad (2.5.70)$$

Fuochi reali

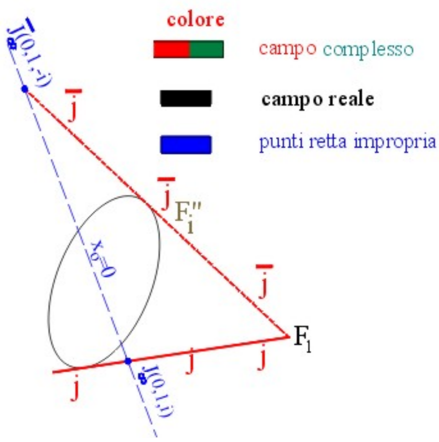
Sono le intersezioni delle rette isotrope complesse coniugate tangenti alla conica:

F_1 intersezione $j \cap \bar{j}$

F_1 intersezione $j \cap \bar{j}$

Fuoco $F_1 \quad j \cap \bar{j}$

Fig.2.5.18



$$\begin{cases} -K\,X_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(1-i)\,X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(1+i)\,X_2 = 0 \\ -K\,X_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(1+i)\,X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(1-i)\,X_2 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$-2KX_0 + \sqrt{\frac{K}{2}}X_1 + \sqrt{\frac{K}{2}}X_2 = 0 \qquad (2.5.71)$$

sottraendo membro a membro

$$-i\sqrt{\frac{K}{2}}X_1 + i\sqrt{\frac{K}{2}}X_2 = 0 \qquad\qquad -X_1 + X_2 = 0$$

$$X_1 = X_2 \qquad (2.5.72)$$

Facendo sistema con (2.5.71), (2.5.72) in ccordinate non omogenee

$$\begin{cases} -2K + \sqrt{\frac{K}{2}}X + \sqrt{\frac{K}{2}}X = 0 \\ x = y \end{cases} \qquad (2.5.73)$$

$$-2K + \sqrt{\frac{K}{2}}X + \sqrt{\frac{K}{2}}X = 0 \qquad -2K + 2\sqrt{\frac{K}{2}}X = 0 \qquad X = \frac{K}{\sqrt{\frac{K}{2}}} \qquad X = \sqrt{2}\frac{K}{\sqrt{K}}$$

$$x = \sqrt{2K}$$

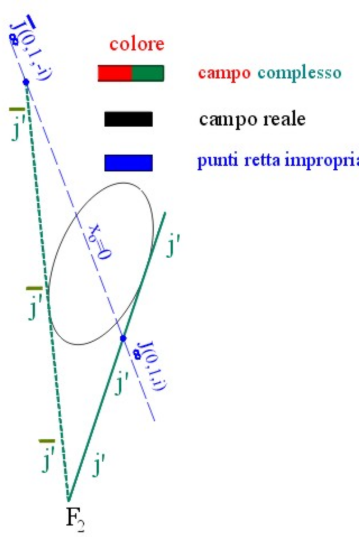
e per la (2.5.73) si hanno le coordinate del fuoco

$$Coordinate\ fuoco\ F_1 \qquad \begin{cases} X = \sqrt{2K} \\ Y = \sqrt{2K} \end{cases}$$

$$F_1\left(\sqrt{2K}, \sqrt{2K}\right) \qquad (2.5.74)$$

$$Fuoco\ F_2 \quad j \cap \bar{j}$$

Fig.2.5.19



$$\begin{cases} -K X_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(-1+i)X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(-1-i)X_2 = 0 \\ -K X_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(-1-i)X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(1+i)X_2 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$-2KX_0 - \sqrt{\frac{K}{2}}X_1 - \sqrt{\frac{K}{2}}X_2 = 0 \qquad (2.5.75)$$

sottraendo membro a membro

$$+i\sqrt{\frac{K}{2}}X_1 - i\sqrt{\frac{K}{2}}X_2 = 0$$

$$X_1 - X_2 = 0$$

$$X_1 = X_2 \qquad (2.5.76)$$

Facendo sistema con (2.5.75), (2.5.76) in ccordinate non omogenee

$$\begin{cases} -2K - \sqrt{\dfrac{K}{2}}X - \sqrt{\dfrac{K}{2}}Y = 0 \\ x = y \end{cases} \qquad (2.5.77)$$

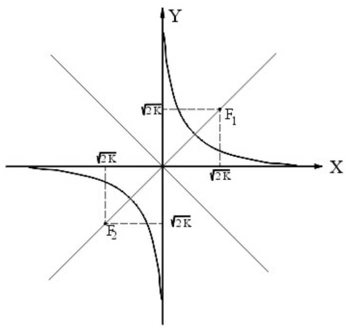
$$-2K - \sqrt{\frac{K}{2}}X - \sqrt{\frac{K}{2}}X = 0 \qquad -2K - 2\sqrt{\frac{K}{2}}X = 0 \qquad X = -\frac{K}{\sqrt{\dfrac{K}{2}}} \qquad X = -\sqrt{2}\frac{K}{\sqrt{K}}$$

$$X = -\sqrt{2K}$$

e per la (2.5.77) si hanno le coordinate del fuoco

$$Coordinate\ fuoco\ F_2 \qquad \begin{cases} X = -\sqrt{2K} \\ Y = -\sqrt{2K} \end{cases} \qquad F_2\left(-\sqrt{2K}, -\sqrt{2K}\right) \qquad (2.5.78)$$

fig.5.2.20



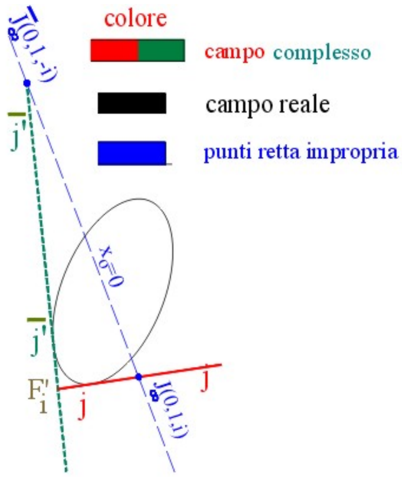
Occorre notare che i due fuochi reali F_1, F_2 sono sull'asse traverso
$y = x$

Fuochi complessi coniugati
Sono le intersezioni delle rette isotrope complesse non coniugate tangenti alla conica:

F_{i1} intersezione $j \cap \bar{j}'$

F_{i2} intersezione $j' \cap \bar{j}$

fig.3.5.21



Fuoco $F_{i1} \quad j \cap \bar{j}'$

$$\begin{cases} -KX_0 + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{K}{2}}(1-i)X_1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{K}{2}}(1+i)X_2 = 0 \\ -KX_0 + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{K}{2}}(-1-i)X_1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{K}{2}}(-1+i)X_2 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$-2KX_0 - i\sqrt{\frac{K}{2}}X_1 + i\sqrt{\frac{K}{2}}X_2 = 0 \qquad (2.5.79)$$

sottraendo membro a membro

$$\sqrt{\frac{K}{2}}X_1 + \sqrt{\frac{K}{2}}X_2 = 0 \qquad\qquad X_1 + X_2 = 0$$

$$X_1 = -X_2 \qquad (2.5.80)$$

Facendo sistema con (2.5.79), (2.5.80) in coordinate non omogenee

$$\begin{cases} -2K - i\sqrt{\frac{K}{2}}\,X + i\sqrt{\frac{K}{2}}\,Y = 0 \\ Y = -X \end{cases} \qquad (2.5.81)$$

$$-2K - i\sqrt{\frac{K}{2}}\,X - i\sqrt{\frac{K}{2}}\,Y = 0 \quad -2K - 2i\sqrt{\frac{K}{2}}\,x = 0 \qquad X = -\frac{K}{i\sqrt{\frac{K}{2}}} \quad X = i\sqrt{2}\,\frac{K}{\sqrt{K}}$$

$$X = i\sqrt{2K}$$

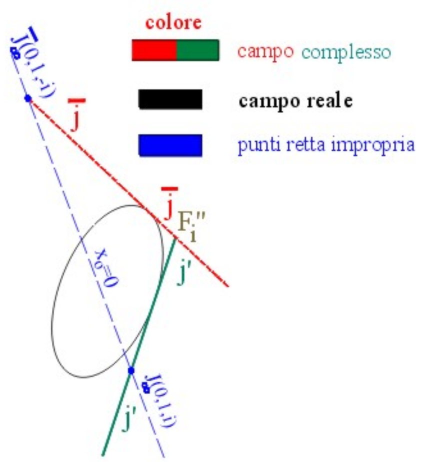
e per la (2.5.81) si hanno le coordinate del fuoco

$$\textit{Coordinate fuoco } F_{i1} \qquad \begin{cases} X = i\sqrt{2K} \\ Y = -i\sqrt{2K} \end{cases}$$

$$F_{i1}\left(i\sqrt{2K}, -i\sqrt{2K}\right)$$

Fuoco $F_{i2} \quad j' \cap \bar{j}$

Fif.2.5.22



$$\begin{cases} -K X_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(-1+i)X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(-1-i)X_2 = 0 \\ -K X_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(1+i)X_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{2}}(1-i)X_2 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$-2KX_0 + i\sqrt{\frac{K}{2}}X_1 - i\sqrt{\frac{K}{2}}X_2 = 0 \qquad (2.5.79)$$

sottraendo membro a membro

$$-\sqrt{\frac{K}{2}}X_1 - \sqrt{\frac{K}{2}}X_2 = 0 \qquad\qquad -X_1 - X_2 = 0$$

$$X_1 = -X_2 \qquad (2.5.80)$$

Facendo sistema con (2.5.79), (2.5.80) in coordinate non omogenee

$$\begin{cases} -2K + i\sqrt{\frac{K}{2}}X - i\sqrt{\frac{K}{2}}Y = 0 \\ Y = -X \end{cases} \qquad (2.5.81)$$

$$-2K + i\sqrt{\frac{K}{2}}x + i\sqrt{\frac{K}{2}}X = 0 \qquad -2K + 2i\sqrt{\frac{K}{2}}X = 0 \qquad X = \frac{K}{i\sqrt{\frac{K}{2}}} \qquad X = -i\sqrt{2}\frac{K}{\sqrt{K}}$$

$$X = -i\sqrt{2K}$$

e per la (2.5.81) si hanno le coordinate del fuoco

Coordinate fuoco F_{i2} $\quad \begin{cases} X = -i\sqrt{2K} \\ Y = +i\sqrt{2K} \end{cases}$

$$F_{i2}\left(-i\sqrt{2K}, +i\sqrt{2K}\right)$$

Occorre osservare che i due fuochi $F_{i1}\left(i\sqrt{2K}, -i\sqrt{2K}\right)$, $F_{i2}\left(-i\sqrt{2K}, +i\sqrt{2K}\right)$ sono due punti complessi coniugati appartenenti all'asse reale non traverso della iperbole.

Infatti la retta per i due punti è:

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_2}\frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1} \qquad \text{sostituendo si ha}$$

$$\frac{X - i\sqrt{2K}}{-i\sqrt{2K} - i\sqrt{2K}} = \frac{Y + i\sqrt{2K}_1}{i\sqrt{2K} + i\sqrt{2K}} \qquad \frac{X - i\sqrt{2K}}{-2i\sqrt{2K}} = \frac{Y + i\sqrt{2K}_1}{2i\sqrt{2K}}$$

$$-X + i\sqrt{2k} = Y + i\sqrt{2k}$$

$$Y = -X$$

Direttrici dell'iperbole

Sono le polari dei fuochi

Fuoco $F_1\left(1, \sqrt{2K}, \sqrt{2K}\right)$

Polare di F_1 $\quad \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2K} \\ \sqrt{2K} \end{pmatrix} = 0$

$$-K x_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2K}x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2K}x_2 = 0$$

In coordinate non omogenee

$$\sqrt{2K}x + \sqrt{2K}y - 2K = 0 \qquad y = -x + \frac{2K}{\sqrt{2K}}$$

Direttrice d_1 $\qquad y = -x + \sqrt{2K}$

Fuoco $F_2\left(1, -\sqrt{2K}, -\sqrt{2K}\right)$

Polare di F_1 $\quad \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2K} \\ -\sqrt{2K} \end{pmatrix} = 0$

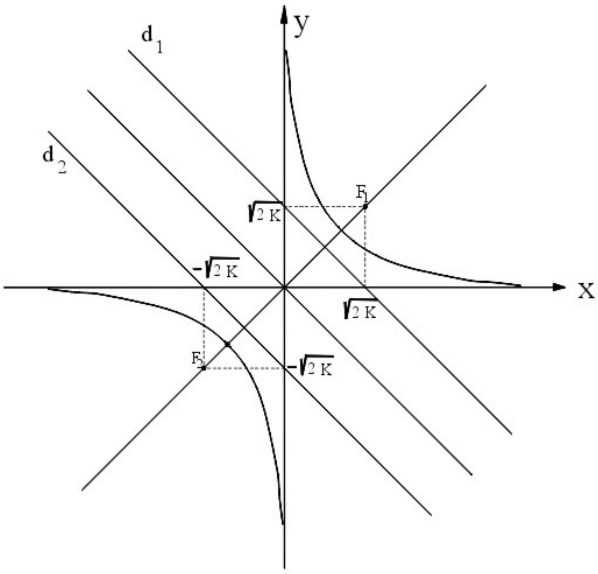
$$-K x_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2K}x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2K}x_2 = 0$$

In coordinate non omogenee

$$\sqrt{2K}x + \sqrt{2K}y + 2K = 0 \qquad y = -x - \frac{2K}{\sqrt{2K}}$$

Direttrice d_3 $\qquad y = -x - \sqrt{2K}$

Fig.6.15



Si osservi che, ponendo $K = \frac{a^2}{2}$ si ottengono gli stessi risultati ottenuti con la forma canonica.

Così, il fuoco $F_1\left(\sqrt{2K}, \sqrt{2K}\right)$, per $K = \frac{a^2}{2}$ si ha:

$$F_1\left(\sqrt{2\frac{a^2}{2}}, \sqrt{2\frac{a^2}{2}}\right) \qquad F_1(a,a) \quad \text{e così via….}$$

Avanti... Clic per continuare

Indietro... clic per precedente

Indietro... Clic per la pagina iniziale