5 Elementi delle coniche espresse in forma canonica determinati con i metodi generali

5.1 Determinazione degli elementi dell'ellisse espressa in forma canonica

Primo caso con $a > b$

Nei paragrafi precedenti si è determinata l'equazione canonica dell'ellisse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.1.1)$$

Con i procedimenti generali, indicati nei paragrafi precedenti, vogliono determinare tutti gli elementi caratteristici riguardanti le proprietà affini e metriche.

5.1.1 Assi – centro – vertici

Gli assi, il centro e i vertici dell'equazione canonica dell'ellisse sono abbastanza noti. Qui , per esercitazione si vogliono, comunque determinare con i procedimenti generali.

Determinazione centro

L'equazione (5.1.1) si ponga nella forma:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \qquad (5.1.2)$$

In coordinate omogenee

$$b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2 b^2 x_0^2 = 0 \qquad (5.1.3)$$

Matrice caratteristica

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Il centro si può ottenere dalla intersezione di due diametri, polari di punti impropri. Come al solito, per convenienza, si intersecano le polari dei due punti impropri $P_{1\infty}(0,1,0)$ $P_{2\infty}(0,0,1)$

Polare di $P_{1\infty}(0,1,0)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 \cdot x_0 + b^2 x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \qquad x_1 = 0$$

diametro $x = 0$ (asse y)

Polare di $P_{1\infty}\,(0,0,1)$

$$(x_0 \quad x_1 \quad x_2)\cdot\begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$0\cdot x_0 + 0\cdot x_1 + a^2 x_2 = 0 \qquad x_2 = 0$$

diametro $y = 0$ (asse x)

Diametri $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ L'intersezione dà il centro

$C(0,0)$ origine degli assi cartesiani (5.1.4)

Determinazione assi della conica

Gli assi sono i due diametri coniugati e ortogonali

La condizione di coniugio e ortogonalità è:

$$a_{12}\,l^2 + (a_{22} - a_{11})\,l\,m - a_{12}\,m^2 = 0$$

Sostituendo si ha:

$$0\cdot l^2 + l\,m\cdot\left(a^2 - b^2\right) - 0\cdot m^2 = 0 \qquad \text{da cui}$$

$l\cdot m = 0$ si hanno le due soluzioni $\begin{cases} l = \rho & m = 0 \\ m = \rho & l = 0 \end{cases}$ con qualsiasi $\rho \neq 0$

Scelto $\rho = 1$ i punti impropri degli assi sono

$$\begin{cases} l = 1 & m = 0 \\ m = 1 & l = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_{1\infty}\,(0,1,0) \\ A_{2\infty}\,(0,0,1) \end{cases} \qquad (5.1.5)$$

L'equazione degli assi si ottiene congiungendo il centro con i punti impropri; oppure si scrivono le rette passanti per il centro $C(0,0)$ e con i parametri direttori $l.m$ indicati dai unti impropri:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \qquad m\cdot(x - x_0) - l\cdot(y - y_0) = 0$$

sostituendo

1° asse a_{s1} $\quad 0\cdot(x - 0) - 1\cdot(y - 0) = 0 \quad y = 0$ asse x (5.1.6)

2° asse a_{s2} $\quad 1\cdot(x - 0) - 0\cdot(y - 0) = 0 \quad x = 0$ asse y (5.1.7)

Gli assi della conica coincidono con gli assi cartesiani (come sicuramente era già noto)

Determinazione vertici

Sono le intersezioni degli assi con la conica

Intersezione asse x

$$\begin{cases} b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad x^2 = a^2 \qquad x = \pm a$$

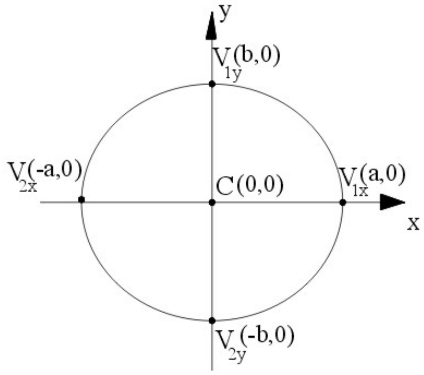
Vertici asse x $\begin{cases} V_{1x}(a,0) \\ V_{2x}(-a,0) \end{cases}$ (5.1.8)

Intersezione asse y

$$\begin{cases} b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \\ x = 0 \end{cases} \qquad y^2 = b^2 \qquad y = \pm b$$

Vertici asse y $\begin{cases} V_{1y}(b,0) \\ V_{2y}(-b,0) \end{cases}$ (5.1.9)

Fig.5.1.1



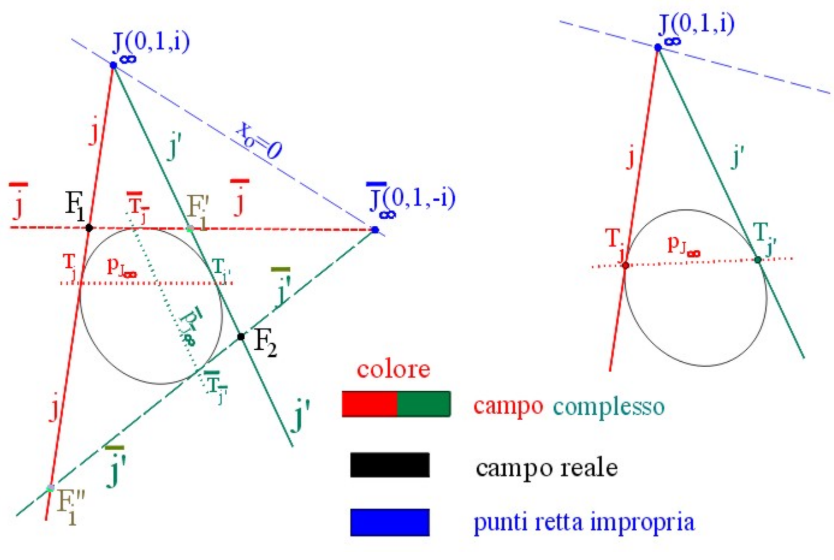
Centro $C(0,0)$

Vertici $\begin{cases} V_{1x}(a,0) \\ V_{2x}(-a,0) \end{cases}$

$\begin{cases} V_{1y}(b,0) \\ V_{2y}(-b,0) \end{cases}$

5.1.2 Determinazione dei fuochi

Fig.5.1.2



I fuochi sono i quattro punti di intersezione delle quattro rette isotrope, tangenti alla conica, condotte dai due punti ciclici $J_\infty(0,1,i)$, $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$.

Siano j,j' le tangenti condotte dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$ e $\overline{j},\overline{j'}$ quelle condotte da $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$, rispettivamente complesse coniugate di j,j'

L'intersezione tra la due coppie di rette $j\cap\overline{j}$ - $j'\cap\overline{j'}$ complesse coniugate forniscono due fuochi reali F_1,F_2, quelle tra le altre due coppie di rette, determinano due fuochi complessi $F_i'.F_i''$ e tra loro coniugati (la loro intersezione è su un asse della conica).

Per tracciare le tangenti alla conica, da un punto del piano (da $J_\infty(0,1,i)$ in figura), si può procedere come già indicato nei paragrafi precedenti:

a. Si determina la polare p_j del punto da cui si debbono tracciare le tangenti: in questo caso dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$ o $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$

b. Si determinano i punti di intersezione T_j,T_j' della polare p_{j_∞} con la conica, che sono anche i punti di tangenza delle tangenti condotte da $J_\infty(0,1,i)$ o $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$

c. Le polari dei punti di tangenza T_j,T_j' forniscono le tangenti j,j' in essi alla conica

Tangenti j,j' condotte dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$

Si sviluppa il procedimento indicato nei punti a,b,c

Polare p_{j_∞} del punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$

Equazione ellisse

$$b^2x_1^2+a^2x_2^2-a^2b^2x_0^2=0$$

equazione della polare di $J_\infty(0,1,i)$

$$\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-a^2b^2 & 0 & 0\\ 0 & b^2 & 0\\ 0 & 0 & a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}=0$$

$$0\cdot x_0+b^2x_1+ia^2x^2=0 \qquad b^2x+ia^2y=0 \qquad y=-\frac{b^2}{ia^2}\cdot x$$

polare p_{j_∞}
$$y=i\frac{b^2}{a^2}\cdot x \qquad (5.1.10)$$

Punti di intersezione $T_j,T_{j'}$ della polare con la conica

$$\begin{cases}b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\\ y=i\dfrac{b^2}{a^2}\cdot x\end{cases} \qquad (5.1.11)$$

$$b^2 x^2 + a^2\left(i\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2 \right)^2 = a^2b^2 \qquad b^2x^2 - a^2\frac{b^4}{a^4}x^2 = a^2b^2$$ dividendo per b^2

$$x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = a^2 \qquad\qquad a^2x^2 - b^2x^2 = a^4$$

$$\left(a^2 - b^2\right)\cdot x^2 = a^4 \qquad (5.1.12)$$

Si è supposto che sia:

$$a > b$$

sarà $\quad a^2 - b^2 > 0$

si pone $\quad a^2 - b^2 = c^2 \qquad (5.1.13)$

sostituendo la (5.1.13) nella (5.1.12) si ha:

$$c^2 x^2 = a^4 \qquad\qquad x^2 = \frac{a^4}{c^2}$$ da cui

$$x = \pm\frac{a^2}{c}\begin{cases} x_j = +\dfrac{a^2}{c} \\ x_{j'} = -\dfrac{a^2}{c}\end{cases}$$ coordinate x dei punti di intersezione $T_j, T_{j'}$

sostituendo nella (5.1.11) si ottengono le coordinate y di detti punti.
Si ha:

$$y = \begin{cases} y_j = i\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{a^2}{c} \\ y_{j'} = i\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\left(-\dfrac{a^2}{c}\right)\end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} y_j = i\dfrac{b^2}{c}\cdot \\ y_{j'} = -i\dfrac{b^2}{c}\end{cases} \qquad (5.1.14)$$

I punti $T_j, T_{j'}$ di intersezione della polare p_{j_∞} del punto ciclico $J_\infty\left(0,1,i\right)$ con la conica sono:

$$\begin{cases} T_j\left(\dfrac{a^2}{c}, i\dfrac{b^2}{c}\right) \\ T_{j'}\left(-\dfrac{a^2}{c}, -i\dfrac{b^2}{c}\right)\end{cases} \quad \text{in coordinate omogenee} \quad \begin{cases} T_j\left(1, \dfrac{a^2}{c}, i\dfrac{b^2}{c}\right) \\ T_{j'}\left(1, -\dfrac{a^2}{c}, -i\dfrac{b^2}{c}\right)\end{cases} \qquad (5.1.16)$$

Tangenti alla conica nei punti di intersezione $T_j, T_{j'}$ della polare p_{j_∞} con la conica

Le tangenti j, j' alla conica nei suoi punti di tangenza $T_j, T_{j'}$ sono le polari di essi.

Polare del punto $T_j\left(1,\dfrac{a^2}{c},i\dfrac{b^2}{c}\right)$

$$\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-a^2b^2 & 0 & 0\\ 0 & b^2 & 0\\ 0 & 0 & a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{a^2}{c}\\ i\dfrac{b^2}{c}\end{pmatrix}=0$$

$$-a^2b^2x_0+b^2\frac{a^2}{c}x_1+a^2i\frac{b^2}{c}x_2=0$$

$$-x_0+\frac{x_1}{c}+ix_2=0 \qquad -cx_0+x_1+ix_2=0 \qquad -c+x+iy=0$$

$$iy=-x+c \qquad y=-\frac{1}{i}x+\frac{1}{i}c$$

Tangente j $\qquad y=ix-ic \qquad$ (5.1.17)

Polare del punto $T_{j'}\left(1,-\dfrac{a^2}{c},-i\dfrac{b^2}{c}\right)$

$$\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-a^2b^2 & 0 & 0\\ 0 & b^2 & 0\\ 0 & 0 & a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -\dfrac{a^2}{c}\\ -i\dfrac{b^2}{c}\end{pmatrix}=0$$

$$-a^2b^2x_0-b^2\frac{a^2}{c}x_1-a^2i\frac{b^2}{c}x_2=0 \qquad -x_0-\frac{x_1}{c}-ix_2=0$$

$$-cx_0-x_1-ix_2=0 \qquad -c-x-iy=0 \qquad iy=-c-x \qquad y=-\frac{1}{i}x-\frac{1}{i}c$$

Tangente j' $\qquad y=ix+ic \qquad$ (5.1.18)

Tangenti j, j' *condotte dal punto ciclico* $J_\infty\,(0,1,i)$

$$\begin{cases} j\equiv & y=ix-ic\\ j'\equiv & y=ix+ic\end{cases} \qquad (5.1.19)$$

Tangenti j, j' condotte dal punto ciclico $\overline{J}_\infty\,(0,1,-i)$

Le tangenti dal punto ciclico $\overline{J}_\infty\,(0,1,-i)$, coniugato del precedente $J_\infty\,(0,1,i)$, sono rette le isotrope $\overline{j}, \overline{j}'$ coniugate delle precedenti j, j'.

Si ha quindi

$$\begin{cases} \overline{j} \equiv \quad y = -i\,x + ic \\ \overline{j'} \equiv \quad y = -i\,x - i\,c \end{cases} \qquad (5.1.20)$$

Qui di seguito per esercizio dimostriamolo

---------------------------------------o---------------------------------------

Ovviamente questa parte, se a voi risulta ovvia, potete saltarla.

In breve

Polare $\overline{p}_{\overline{J}_\infty}$ del punto ciclico $\overline{J}_\infty\,(0,1,-i)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = 0$$

$$0 \cdot x_0 + b^2\,x_1 - ia^2\,x^2 = 0 \qquad b^2\,x - ia^2\,y = 0 \qquad y = \frac{b^2}{ia^2} \cdot x$$

polare $\overline{p}_{\overline{J}_\infty}$ $\qquad y = -i\,\dfrac{b^2}{a^2} \cdot x \qquad (5.1.21)$

Punti di intersezione $\overline{T}_{\overline{j}}, \overline{T}_{\overline{j}'}$ della polare $\overline{p}_{\overline{J}_\infty}$ con la conica

$$\begin{cases} b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2 \\ y = -i\,\dfrac{b^2}{a^2} \cdot x \end{cases}$$

$$b^2\,x^2 + a^2\left(-i\,\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2\right)^2 = a^2b^2 \qquad b^2x^2 - a^2\,\frac{b^4}{a^4}\,x^2 = a^2b^2 \qquad \text{dividendo per } b^2$$

$$x^2 - \frac{b^2}{a^2}\,x^2 = a^2 \qquad\qquad a^2x^2 - b^2x^2 = a^4$$

$$\left(a^2 - b^2\right) \cdot x^2 = a^4 \qquad (5.1.22)$$

posto $\qquad a^2 - b^2 = c^2 \qquad (5.1.23)$

sostituendo la (5.1.23) nella (5.1.22) si ha:

$$c^2 x^2 = a^4 \qquad x^2 = \frac{a^4}{c^2} \quad \text{da cui}$$

$$x = \pm \frac{a^2}{c} \begin{cases} x_j = +\dfrac{a^2}{c} \\ x_{j'} = -\dfrac{a^2}{c} \end{cases} \quad \text{coordinate x dei punti di intersezione } \overline{T}_{\overline{j}}, \overline{T}_{\overline{j'}}$$

Sostituendo nella (5.1.21) si ha

$$y = \begin{cases} y_j = -i\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{a^2}{c} \\ y_{j'} = -i\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \left(-\dfrac{a^2}{c}\right) \end{cases} \text{da cui} \quad \begin{cases} y_j = -i\dfrac{b^2}{c} \cdot \\ y_{j'} = +i\dfrac{b^2}{c} \end{cases} \qquad (5.1.24)$$

I punti $\overline{T}_{\overline{j}}, \overline{T}_{\overline{j'}}$ di intersezione della polare $\overline{p}_{\overline{J}_\infty}$ del punto ciclico $\overline{J}_\infty\,(0,1,-i)$ con la conica sono:

$$\begin{cases} T_j\left(\dfrac{a^2}{c}, -i\dfrac{b^2}{c}\right) \\ T_{j'}\left(-\dfrac{a^2}{c}, +i\dfrac{b^2}{c}\right) \end{cases} \text{in coordinate omogenee} \quad \begin{cases} T_j\left(1, \dfrac{a^2}{c}, -i\dfrac{b^2}{c}\right) \\ T_{j'}\left(1, -\dfrac{a^2}{c}, +i\dfrac{b^2}{c}\right) \end{cases} \qquad (5.1.26)$$

Tangenti alla conica nei punti di intersezione $\overline{T}_{\overline{j}}, \overline{T}_{\overline{j'}}$ della polare p_{j_∞} con la conica

Le tangenti $\overline{j}, \overline{j'}$ alla conica nei suoi punti di tangenza $\overline{T}_{\overline{j}}, \overline{T}_{\overline{j'}}$ sono le polari di essi.

Polare del punto $T_j\left(1, \dfrac{a^2}{c}, -i\dfrac{b^2}{c}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{a^2}{c} \\ -i\dfrac{b^2}{c} \end{pmatrix} = 0$$

$$-a^2b^2 x_0 + b^2\frac{a^2}{c} x_1 - a^2 i\frac{b^2}{c} x_2 = 0$$

$$-x_0 + \frac{x_1}{c} - i x_2 = 0 \qquad -c x_0 + x_1 - i x_2 = 0 \qquad -c + x - i y = 0$$

$$iy = x - c \qquad\qquad y = \frac{1}{i}x - \frac{1}{i}c$$

Tangente $\overline{j}$ $\qquad y = -ix + ic \qquad (5.1.27)$

Polare del punto $T_j\left(1, -\frac{a^2}{c}, +i\frac{b^2}{c}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a^2}{c} \\ +i\frac{b^2}{c} \end{pmatrix} = 0$$

$$-a^2b^2x_0 - b^2\frac{a^2}{c}x_1 + a^2 i\frac{b^2}{c}x_2 = 0 \qquad\qquad -x_0 - \frac{x_1}{c} + ix_2 = 0$$

$$-cx_0 - x_1 + ix_2 = 0 \qquad -c - x + iy = 0 \qquad iy = c + x \qquad y = \frac{1}{i}x + \frac{1}{i}c$$

Tangente $\overline{j}$ $\qquad y = -ix - ic \qquad (5.1.28)$

Tangenti $\overline{j}, \overline{j'}$ *condotte dal punto ciclico* $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$

$$\begin{cases} \overline{j} \equiv \quad y = -ix + ic \\ \overline{j'} \equiv \quad y = -ix - ic \end{cases} \qquad (5.1.29)$$

Come volevasi dimostrare le rette isotrope $\overline{j}, \overline{j'}$ tangenti alla conica , condotte dal punto ciclico $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$, sono rispettivamente complesse coniugate delle tangenti j, j' condotte dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$

--o--

Riassumendo si ha:

Tangenti dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$ $\qquad \begin{cases} j \equiv \quad y = ix - ic \\ j' \equiv \quad y = ix + ic \end{cases} \qquad (5.1.19)$

Tangenti dal punto ciclico $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$ $\qquad \begin{cases} \overline{j} \equiv \quad y = -ix + ic \\ \overline{j'} \equiv \quad y = -ix - ic \end{cases} \qquad (5.1.29)$

Fuochi reali

I fuochi reali $F_1 . F_2$ si ottengono dalle intersezioni delle due coppie di rette isotrope $j \cap \bar{j}$, $j' \cap \overline{j'}$ complesse e coniugate

Fuoco F_1:

intersezione $j \cap \bar{j}$
$$\begin{cases} j \equiv \quad y = ix - ic \\ \bar{j} \equiv \quad y = -ix + ic \end{cases} \qquad (5.1.30)$$

$$ix - ic = -ix + ic \qquad x - c = -x + c \qquad 2x = 2c \qquad x = c$$

sostituendo in una delle (5.1.30) si ha: $y = 0$

Le coordinate del fuoco sono
$$\begin{cases} x = c \\ y = 0 \end{cases}$$

Dove per le (5.1.13), (5.1.23) è:
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$Fuoco \ F_1(c, 0)$$

Fuoco F_2:

intersezione $j' \cap \overline{j'}$
$$\begin{cases} j' \equiv \quad y = ix + ic \\ \overline{j'} \equiv \quad y = -ix - ic \end{cases} \qquad (5.1.31)$$

$$ix + ic = -ix - ic \qquad x + c = -x - c \qquad 2x = -2c \qquad x = -c$$

sostituendo in una delle (5.1.31) si ha: $y = 0$

Le coordinate del fuoco sono
$$\begin{cases} x = -c \\ y = 0 \end{cases}$$

Dove per le (5.1.13), (5.1.23) è:
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$Fuoco \ F_2(-c, 0)$$

Fuochi complessi coniugati

I fuochi reali $F_i' . F_i''$ si ottengono dalle intersezioni delle due coppie di rette isotrope $j \cap \overline{j'}$, $j' \cap \bar{j}$ complesse ma non coniugate

Fuoco F_i':

intersezione $j' \cap \bar{j}$
$$\begin{cases} j' \equiv \quad y = ix + ic \\ \bar{j} \equiv \quad y = -ix + ic \end{cases} \qquad (5.1.32)$$

Sommando membro a membro si ha:
$$2y = 2ic \quad \text{da cui} \quad y = ic$$

sostituendo in una delle (5.1.32) si ha:
$$x = 0$$

Le coordinate del fuoco sono $\begin{cases} x = 0 \\ y = ic \end{cases}$

Dove per le (5.1.13), (5.1.23) è:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$Fuoco\ F_i'(0,ic)$$

$Fuoco\ F_i''$:

intersezione $j \cap \overline{j'}$ $\begin{cases} j' \equiv & y = ix - ic \\ \overline{j} \equiv & y = -ix - ic \end{cases}$ (5.1.32)

Sommando membro a membro si ha:

$2y = -2ic$ da cui $y = -ic$

sostituendo in una delle (5.1.32) si ha:

$$x = 0$$

Le coordinate del fuoco sono $\begin{cases} x = 0 \\ y = -ic \end{cases}$

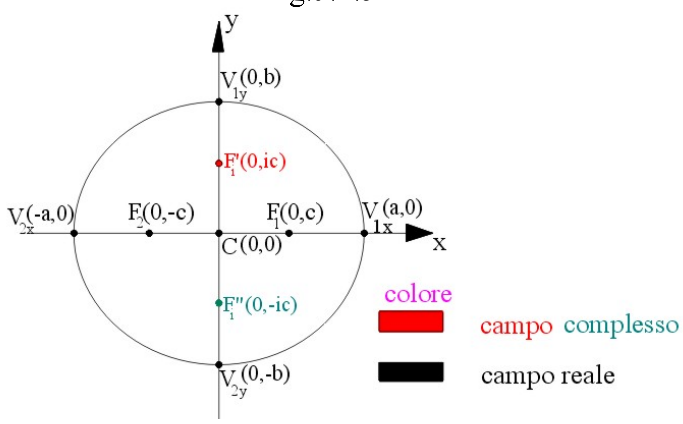
Dove per le (5.1.13), (5.1.23) è:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$Fuoco\ F_i''(0,-ic)$$

Il fuoco $F_i''(0,-ic)$ è un punto complesso coniugato di $F_i'(0,ic)$

Fig.5.1.3



Nel caso che l'ellisse abbia il semiasse $a > b$ i due fuochi complessi coniugati sono sull'asse y. La retta passante per essi è l'asse reale y $x = 0$

Infatti la retta passante per i due punti è:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (x - x_1)\cdot(y_2 - y_1) = (y - y_1)\cdot(x_2 - x_1)$$

sostituendo, $F_i'(0,ic)\ F_i''(0,-ic)$

$$(x - 0)\cdot(-ic - ic) = (y - ic)\cdot(0 - 0) \qquad -2ic\,x = 0 \qquad x = 0$$

5.1.3 *Elementi dell'ellisse con* $a < b$

5.1.3.1 Centro – assi – vertici

Eseguendo i procedimenti di calcolo di cui al punto 5.1.1 si ottengono gli stessi risultati

Assi della conica $\begin{cases} \text{asse x} & y = 0 \\ \text{asse y} & x = 0 \end{cases}$

Centro origine $C(0,0)$

Vertici $\begin{cases} V_{1x}(a,0) \\ V_{12x}(-a,0) \\ V_{1y}(0,b) \\ V_{1x}(0,-b) \end{cases}$ Con $a < b$

5.1.3.2 Fuochi

Il procedimento è identico al caso con $a > b$ di cui al punto "5.1.2", con gli stessi risultati fino alla espressione (5.1.12) ove si deve tener conto delle diverse dimensioni dei semiassi a,b. In questo caso si considera $a < b$

Per completezza si ripete il procedimento

Tangenti j, j' *condotte dal punto ciclico* $J_\infty(0,1,i)$

Si sviluppa il procedimento indicato nei punti a,b,c

Polare p_{j_∞} *del punto ciclico* $J_\infty(0,1,i)$

Equazione ellisse

$$b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2b^2x_0^2 = 0$$

equazione della polare di $J_\infty(0,1,i)$

$$(x_0 \quad x_1 \quad x_2) \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$0 \cdot x_0 + b^2 x_1 + ia^2 x^2 = 0 \qquad b^2 x + ia^2 y = 0 \qquad y = -\frac{b^2}{ia^2} \cdot x$$

polare p_{j_∞} $$y = i\frac{b^2}{a^2} \cdot x \qquad (5.1.33)$$

Punti di intersezione $T_j, T_{j'}$ *della polare con la conica*

$$\begin{cases} b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \\ y = i\dfrac{b^2}{a^2}\cdot x \end{cases} \qquad (5.1.34)$$

$$b^2 x^2 + a^2\left(i\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2\right)^2 = a^2b^2 \qquad b^2x^2 - a^2\frac{b^4}{a^4}x^2 = a^2b^2 \qquad \text{dividendo per } b^2$$

$$x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = a^2 \qquad a^2x^2 - b^2x^2 = a^4$$

$$\left(a^2 - b^2\right)\cdot x^2 = a^4 \qquad (5.1.35)$$

$$-\left(b^2 - a^2\right)\cdot x^2 = a^4 \qquad (5.1.36)$$

Essendo $a < b$ si pone:

$$b^2 - a^2 = c^2$$

sostituendo nella (5.1.36):

$$-c^2x^2 = a^4 \qquad x^2 = -\frac{a^4}{c^2}$$

$$x = \pm i\frac{a^2}{c} \begin{cases} x_1 = i\dfrac{a^2}{c} \\ x_1 = -i\dfrac{a^2}{c} \end{cases} \text{coordinate x dei punti di intersezione } T_j, T_{j'}$$

sostituendo nella (5.1.34) si ottengono le coordinate y di detti punti.
Si ha:

$$y = \begin{cases} y_j = i\dfrac{b^2}{a^2}\cdot i\dfrac{a^2}{c} \\ y_{j'} = i\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\left(-i\dfrac{a^2}{c}\right) \end{cases} \text{da cui} \quad \begin{cases} y_j = -\dfrac{b^2}{c}\cdot \\ y_{j'} = \dfrac{b^2}{c} \end{cases} \qquad (5.1.37)$$

I punti $T_j, T_{j'}$ di intersezione della polare p_{j_∞} del punto ciclico $J_\infty\left(0,1,i\right)$ con la conica sono:

$$\begin{cases} T_j\left(i\dfrac{a^2}{c}, -\dfrac{b^2}{c}\right) \\ T_{j'}\left(-i\dfrac{a^2}{c}., \dfrac{b^2}{c}\right) \end{cases} \text{in coordinate omogenee} \quad \begin{cases} T_j\left(1, i\dfrac{a^2}{c}, -\dfrac{b^2}{c}\right) \\ T_{j'}\left(1, -i\dfrac{a^2}{c}, \dfrac{b^2}{c}\right) \end{cases} \qquad (5.1.38)$$

Tangenti alla conica nei punti di intersezione $T_j, T_{j'}$ della polare p_{j_∞} con la conica

Le tangenti j, j' alla conica nei suoi punti di tangenza $T_j, T_{j'}$ sono le polari di essi.

Polare del punto $T_j\left(1, i\dfrac{a^2}{c}, -\dfrac{b^2}{c}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i\dfrac{a^2}{c} \\ -\dfrac{b^2}{c} \end{pmatrix} = 0$$

$$-a^2b^2\,x_0 + ib^2\,\frac{a^2}{c}x_1 - a^2\,\frac{b^2}{c}x_2 = 0$$

$$-x_0 + i\frac{x_1}{c} - x_2 = 0 \qquad\qquad -c\,x_0 + ix_1 - x_2 = 0$$

Tangente j $\qquad -c + ix - y = 0 \qquad$ (6.1.39)

Polare del punto $T_{j'}\left(1, -i\dfrac{a^2}{c}, \dfrac{b^2}{c}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i\dfrac{a^2}{c} \\ \dfrac{b^2}{c} \end{pmatrix} = 0$$

$$-a^2b^2\,x_0 - ib^2\,\frac{a^2}{c}x_1 + a^2\,\frac{b^2}{c}x_2 = 0$$

$$-c\,x_0 - ix_1 + x_2 = 0 \qquad\qquad -x_0 - i\frac{x_1}{c} + x_2 = 0$$

Tangente j' $\qquad -c - ix + y = 0 \qquad$ (5.1.40)

Tangenti j, j' *condotte dal punto ciclico* $J_\infty\,(0,1,i)$

$$\begin{cases} j \equiv \quad -c + ix - y = 0 \\ j' \equiv \quad -c - ix + y = 0 \end{cases} \qquad (5.1.41)$$

Tangenti $\overline{j}, \overline{j'}$ *condotte dal punto ciclico* $J_\infty\,(0,1,-i)$

Le tangenti alla conica $\overline{j}, \overline{j'}$, condotte dal punto ciclico $J_\infty\,(0,1,-i)$ sono le rette complesse e coniugate di quelle, indicate in (5.1.41), condotte dal punto ciclico $J_\infty\,(0,1,i)$

$$\begin{cases} \overline{j} \equiv \quad -c - ix - y = 0 \\ \overline{j'} \equiv \quad -c + ix + y = 0 \end{cases} \qquad (5.1.42)$$

Fuochi reali F_1, F_2

Sono dati dalle intersezioni delle due coppie di rette isotrope complesse e coniugate

Fuoco F_1 *- intersezione* $j' \cap \overline{j'}$

$$\begin{cases} j' \equiv & -c - ix + y = 0 \\ \overline{j'} \equiv & -c + ix - y = 0 \end{cases} \qquad (5.1.43)$$

Sommando membro a membro:

$$-2c + 2y = 0 \qquad\qquad y = c$$

sottraendo membro a membro

$$-2ix = 0 \qquad\qquad x = 0$$

Fuoco $F_1(0,c)$ (5.1.44)

Fuoco F_2 *- intersezione* $j \cap \overline{j}$

$$\begin{cases} j \equiv & -c + ix - y = 0 \\ \overline{j} \equiv & -c - ix - y = 0 \end{cases} \qquad (5.1.45)$$

Sommando membro a membro:

$$-2c - 2y = 0 \qquad\qquad y = -c$$

sottraendo membro a membro

$$2ix = 0 \qquad\qquad x = 0$$

Fuoco $F_2(0,-c)$ (5.1.46)

Fuochi complessi F_i', F_i''

Sono dati dalle intersezioni delle due coppie di rette isotrope non coniugate $j' \cap \overline{j}$, $j \cap \overline{j'}$

Fuoco F_i' *- intersezione* $j' \cap \overline{j}$

$$\begin{cases} j' \equiv & -c - ix + y = 0 \\ \overline{j} \equiv & -c - ix - y = 0 \end{cases} \qquad (5.1.47)$$

Sommando membro a membro:

$$-2c - 2ix = 0 \qquad ix = -c \qquad x = -\frac{1}{i}c \qquad x = ic$$

sottraendo membro a membro

$$2y = 0 \qquad y = 0$$

Fuoco $F_i'(ic,0)$ (5.1.48)

Fuoco $F_i^{'}$ *- intersezione* $j' \cap \overline{j}$

$$\begin{cases} j \equiv \quad -c + ix - y = 0 \\ \overline{j'} \equiv \quad -c + ix + y = 0 \end{cases} \qquad (5.1.49=$$

Sommando membro a membro:

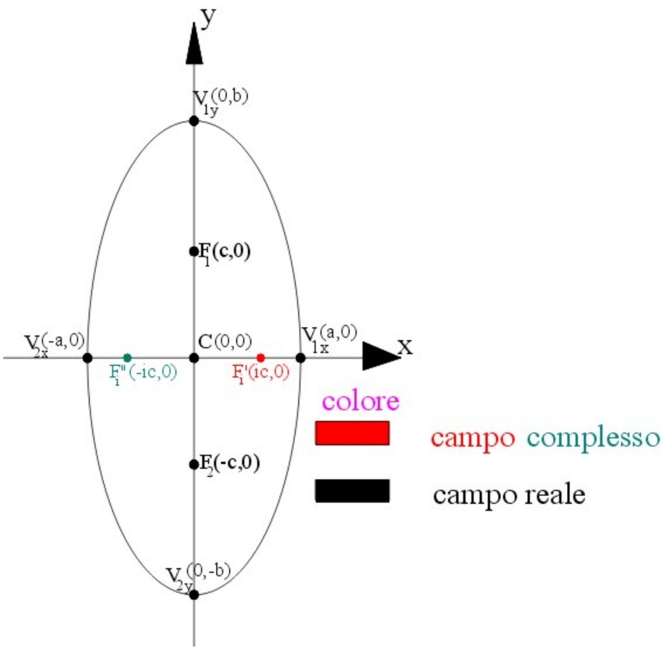
$$-2c + 2ix = 0 \qquad ix = +c \qquad x = \frac{1}{i}c \qquad x = -ic$$

sottraendo membro a membro

$$-2y = 0 \qquad y = 0$$

Fuoco $F_i^{''}(-ic, 0)$ (5.1.50)

Fig.5.1.4



Rammentiamo che i due fuochi $F_i^{'}(ic,0)$, $F_i^{''}(-ic,0)$ sono punti complessi coniugati, la retta per essi è reale corrispondente all'asse x

5.1.4 Direttrice – eccentricità dell'ellisse

Direttrice

La direttrice è la polare del fuoco.
L'equazione dell'ellisse è

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \qquad (5.1.51)$$

In coordinate omogenee

$$b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2 b^2 x_0^2 = 0 \qquad (5.1.52)$$

Prendiamo in esame ellisse con $a > b$
Consideriamo il fuoco reale $F_1(c,0)$
Polare di $F_1(c,0)$

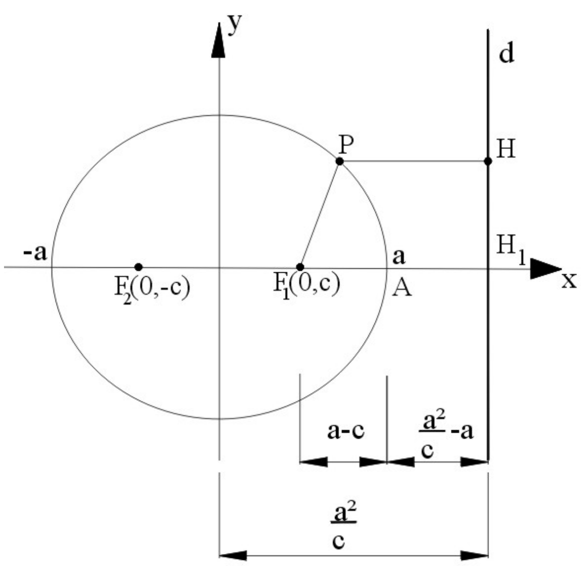
$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-a^2b^2x_0 + b^2c\,x_1 + 0\,x_2 = 0 \qquad -a^2x_0 + c\,x_1 = 0 \qquad -a^2 + c\,x = 0$$

Equazione direttrice d

$$x = \frac{a^2}{c} \qquad (5.1.53)$$

Fig.5.1.5



Considerando l'altro fuoco $F_2(0,-c)$ si ottiene una direttrice come polare di esso. Eseguendo lo stesso procedimento si ottiene l'equazione della direttrice:

$$x = -\frac{a^2}{c} \qquad (5.1.54)$$

Eccentricità dell'ellisse

L'eccentricità è il rapporto costante tra la distanza di un punto della conica dal fuoco e quella dalla direttrice,

Riferendoci alla figura fig.5.1.5, per qualsiasi punto P appartenente alla conica si ha:

$$e = \frac{\overline{F_1P}}{\overline{PH}} \qquad (5.1.55)$$

Considerando il vertice A dell'ellisse si ha:

$$e = \frac{\overline{F_1A}}{\overline{AH}} \qquad (5.1.56)$$

dove

$$F_1A = a - c \qquad AH = \frac{a^2}{c} - a$$

sostituendo nella (5.1.55)

$$e = \frac{a-c}{\frac{a^2}{c} - a} = \frac{a-c}{\frac{a^2 - ca}{c}} = \frac{a-c}{\frac{a(a-c)}{c}}$$

$$e = \frac{c}{a} \qquad (5.1.57)$$

La due espressione dell'equazione della direttrice

Con l'introduzione dell'eccentricità e si può esprimere rispetto a questa l'equazione della direttrice.

Come polare del fuoco $F_1(c,0)$ l'equazione determinata della direttrice è (supponendo $a > b$):

$$x = \frac{a^2}{c} \qquad (5.1.57) \qquad \textit{retta parallela all'asse y}$$

si può scrivere

$$x = \frac{a^2}{c} = a \cdot \frac{a}{c} \qquad \text{ma} \quad \frac{c}{a} = e \quad \text{quindi} \quad \text{si ha:}$$

$$x = \frac{a}{e}$$

Equazione direttrice $$\begin{cases} x = \dfrac{a^2}{c} \\ x = \dfrac{a}{e} \end{cases} \qquad (5.1.57)$$

Forma dell'ellisse e valori dei parametri caratteristici in base all'eccentricità e

Nello studio del fascio di coniche, di costante k, aventi gli stessi fuochi e direttrici si è determinata l'espressione dell'eccentricità e

$$e = k \cdot \left(a^2 + b^2\right)$$

L'eccentricità e è una costante caratteristica della conica, da cui dipende il tipo e la forma e i parametri di essa.

Il discriminante che individua il tipo di conica, individuato precedentemente è:

$$\alpha_{00} = 1 - e^2 \qquad (5.1.58)$$

Si ha un'ellisse per:

$\alpha_{00} > 0$ quindi $0 < e < 1$

Consideriamo i limiti, inferiore e superiore

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \qquad (5.1.59)$$

Limite inferiore $e = 0$

Osservando la (5.1.59) si ha:

$$e = 0 \quad \text{per} \quad a = b$$

La conica diviene una circonferenza di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad x^2 + y^2 = a^2$$

È circonferenza con centro nell'origine e raggio a

Osservando la (5.1.59)

$$e \to 0 \quad \text{per} \quad c \to 0$$

Così i fuochi $F_1(0,c)$, $F_1(0,-c)$ dell'ellisse con ascisse $\pm c$ tendono all'origine degli assi, al centro della circonferenza per $e \to 0$

L'equazione della direttrice è

$$x = \frac{a}{e} \qquad (5.1.60)$$

per $e \to 0$ $x \to \infty$

Portando l'equazione (5.1.60) in coordinate omogenee

$$x_1 = \frac{a}{e} x_0 \qquad \frac{e}{a} x_1 = x_0$$

per $e \to 0$ $x_0 = 0$

Al limite, nella circonferenza con $e = 0$ la direttrice è la retta impropria

Ciò d'altra parte è evidente. Essendo la direttrice la polare del fuoco, che, in questo caso coincide con il centro, tale polare è la retta impropria.

Verso il limite superiore $e \to 1$

Nell'espressione (5.1.59) dell'eccentricità poniamo in evidenza la a

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = a \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}{a}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad (5.1.61)$$

Dalla (5.1.60) si evidenzia che:

l'eccentricità $e \to 1$ quando $\frac{b}{a} \to 0$

Ossia l'eccentricità tende all'unità quando, per intenderci, l'ellisse risulta più schiacciata sull'asse maggiore (a, nel caso in esame)

Osserviamo le posizioni, relative ai vertici, dei fuochi e della direttrice all'aumentare dell'eccentricità e, corrispondente al diminuire del rapporto $\frac{b}{a}$

Posizione dei fuochi

I fuochi $F_1(0,c)$, $F_1(0,-c)$ hanno ascisse

$$\pm c = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm a \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

per $\frac{b}{a} \to 0$ si ha $\pm c \to \pm a$

All'aumentare dell'eccentricità e i fuochi si allontanano dal centro e si avvicinano ai vertici $V_1(a,0)$, $V_2(-a,0)$

Posizione delle direttrici

Si è riscontrato che:

per $e \to 0$ la direttrice tende all'infinito $x \to \infty$, alla retta impropria $x_0 = 0$

L'equazione delle direttrice dei due fuochi $F_1(0,c)$, $F_1(0,-c)$ si possono scrivere:

$$x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \pm\frac{a^2}{a \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}$$

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \qquad (5.1.61)$$

ricordiamo che per $e \to 1$ $\quad \frac{b}{a} \to 0$

Ne viene che, considerando l'espressione (5.1.61), per $e \to 1$ l'equazione della direttrice tende a divenire

$$x = \pm a$$

All'aumentare dell'eccentricità e le direttrici all'infinito per $e = 0$ si avvicinano ai vertici $V_1(a,0)$, $V_2(-a,0)$ per $e \to 1$

5.1.5 Ellisse come luogo geometrico

Per l'ellisse si possono dare due definizioni come luogo geometrico del piano

5,1.5.1 *I definizione – rapporto tra distanze*

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante il rapporto $e < 1$ tra la distanza da un punto fisso F detto fuoco e quella da una retta d detta direttrice. Il rapporto e, denominato eccentricità, è minore dell'unità.

Nei paragrafi precedenti si è determinata l'equazione canonica dell'ellisse e dei suoi parametri geometrici.

Supposto $a > b$

Equazione $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Assi $\quad \begin{cases} asse\ x & y = 0 \\ asse\ y & x = 0 \end{cases}$

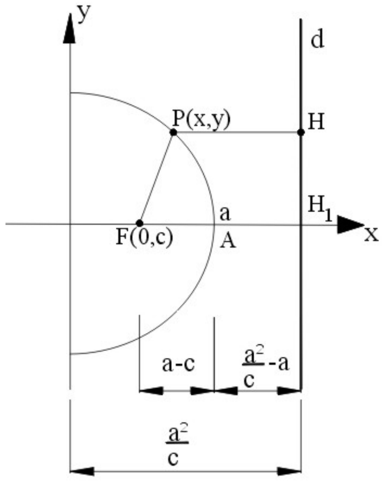
Vertici $\quad \begin{cases} V_{1x}(a,0) \\ V_{2x}(-a,0) \\ V_{1y}(0,b) \\ V_{1y}(0,-b) \end{cases}$

Fuochi reali $\quad \begin{cases} F_1(c,0) \\ F_2(-c,0) \end{cases} \qquad con \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Equazione direttrice $\quad \begin{cases} x = \frac{a^2}{c} \\ x = \frac{a}{e} \end{cases}$

Eccentricità $\quad e = \frac{c}{a}$

Fig.5.1.6



Ciò premesso troviamo l'equazione canonica dell'ellisse dalla costanza del rapporto tra la distanza $\overline{PF}$ del punto generico $P(x,y)$ della curva dal fuoco $F(c,0)$ e quella $\overline{PH}$ dalla direttrice d (fig.5.1.6)

Equazione del luogo:

$$\frac{PF}{PH} = e \qquad (5.1.62)$$

con $\qquad e = \frac{c}{a}$

direttrice $\qquad x = \frac{a^2}{c}$

dalla fig.5.1.6 si ha:

$$PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$PH = \frac{a^2}{c} - x$$

sostituendo nella (5.1.62)

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{c}{a}$$ elevando al quadrato

$$\frac{(x-c)^2 + y^2}{\left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2} = \frac{c^2}{a^2} \qquad\qquad \frac{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}{\frac{(a^2 - cx)}{c^2}} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\left(a^2x^2 - 2ca^2x + c^2a^2 + a^2y^2\right)\cdot c^2 = c^2\left(a^4 - 2ca^2x + c^2x^2\right)$$

$$a^2x^2 + c^2a^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 \qquad\qquad a^2x^2 - c^2 + a^2y^2 = a^4 - c^2a^2$$

$$\left(a^2 - c^2\right)\cdot x^2 + a^2y^2 = a^2\cdot\left(a^2 - c^2\right)$$

Si pone:

$$a^2 - c^2 = b^2$$

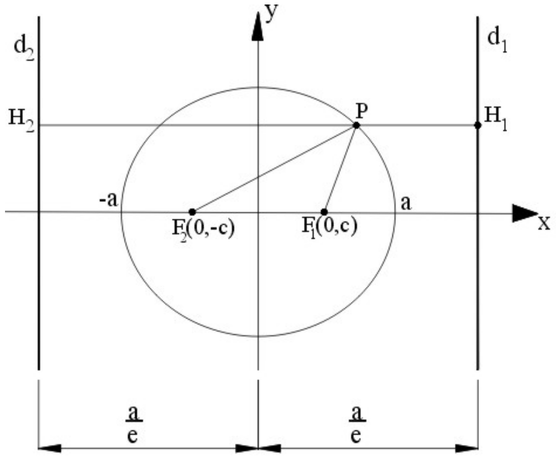
sostituendo nella (5.1.63) si ha

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$ da cui si ha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

5,1.5.2 *II definizione – somma tra distanze*

fig.5.1.7



Si prenda in esame l'ellisse riportata in figure (fig.5.1.7) e consideriamo i due fuochi F_1, F_2 con le rispettive direttrici d_1, d_2. L'eccentricità e si potrà esprimere rispetto al fuoco F_1 e direttrice d_1, oppure rispetto a F_2, d_2.

Si ha:

$$\frac{PF_1}{PH_1} = e \quad \text{da cui:}$$

$$PF_1 = e \cdot PH_1 \qquad (5.1.64)$$

oppure:

$$\frac{PF_2}{PH_2} = e \quad \text{da cui:}$$

$$PF_2 = e \cdot PH_2 \qquad (5.1.65)$$

sommando membro a membro la (5.1.64) con la (5.1.65) si ha:

$$PF_1 + PF_2 = e \cdot PH_1 + e \cdot PH_2$$

$$PF_1 + PF_2 = e \cdot (PH_1 + PH_2) \qquad (5.1.66)$$

ricordiamo che la direttrice è una retta parallela all'asse delle ordinate distante $\frac{a}{e}$ da esso.

Quindi:

$$PH_1 + PH_2 = 2 \cdot \frac{a}{e}$$

sostituendo nella (5.1.66)

$$PF_1 + PF_2 = e \cdot 2\frac{a}{e}$$

Si ha per l'ellisse la relazione di luogo geometrico

$$PF_1 + PF_2 = 2a \qquad (5.1.67)$$

Dalla relazione (5.1.67) determinata, per l'ellisse si può dare la seguente definizione come luogo geometrico.

Definizione

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti detti fuochi.

Si è assunto l'asse x passante tra i due fuochi F_1, F_2, l'asse ortogonale y nel punto medio di essi. Si sono indicati con $\pm c$ le ascisse dei due fuochi. Si ha:

$$PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$PF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

sostituendo nella (5.1.67)

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + \left(x^2 + 2cx + c^2 + y^2\right) - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-4cx - 4a^4 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^4$$

elevando ancora al quadrato

$$a^2\left(x^2 + 2cx + c^2 + y^2\right) = c^2x^2 + a^4 + 2ca^2x$$

$$a^2x^2 + 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4 + 2ca^2x$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4 \qquad a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\left(a^2 - c^2\right).x^2 + a^2y^2 = a^2 \cdot \left(a^2 - c^2\right)$$

si pone:

$$a^2 - c^2 = b^2$$

sostituendo nella (5.1.68)

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ da cui dividendo per a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

5.2 Determinazione degli elementi dell'iperbole espressa in forma canonica

Si è determinata l'equazione dell'iperbole in forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.2.1)$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

in coordinate omogenee

$$b^2x_1^2 - a^2x_2^2 - a^2b^2 = 0$$

Determiniamo i parametri caratteristici utilizzando i metodi generali per le coniche.

5.2.1 *Centro dell'iperbole*

Matrice caratteristica

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$$

Il centro si può ottenere dalla intersezione di due diametri, polari di punti impropri. Come al solito, per convenienza, si intersecano le polari dei due punti impropri $P_{1\infty}(0,1,0)$ $P_{2\infty}(0,0,1)$

Polare di $P_{1\infty}(0,1,0)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 \cdot x_0 + b^2x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \qquad x_1 = 0$$

diametro $x = 0$ (asse y)

Polare di $P_{1\infty}(0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 - a^2x_2 = 0 \qquad x_2 = 0$$

diametro $y = 0$ (asse x)

Diametri $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ L'intersezione dà il centro

$C(0,0)$ origine degli assi cartesiani (5.2.3)

5.2.2 *Assi dell'iperbole*

Gli assi sono i due diametri coniugati e ortogonali

La condizione di coniugio e ortogonalità è:

$$a_{12}\, l^2 + (a_{22} - a_{11})\, l\, m - a_{12}\, m^2 = 0$$

Sostituendo si ha:

$$0 \cdot l^2 + l\, m \cdot \left(a^2 + b^2\right) - 0 \cdot m^2 = 0$$ da cui

$l \cdot m = 0$ si hanno le due soluzioni $\begin{cases} l = \rho & m = 0 \\ m = \rho & l = 0 \end{cases}$ con qualsiasi $\rho \neq 0$

Scelto $\rho = 1$ i punti impropri degli assi sono

$\begin{cases} l = 1 & m = 0 \\ m = 1 & l = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A_{1\infty}(0,1,0) \\ A_{2\infty}(0,0,1) \end{cases}$ (5.1.5)

L'equazione degli assi si ottiene congiungendo il centro con i punti impropri; oppure si scrivono le rette passanti per il centro $C(0,0)$ e con i parametri direttori $l.m$ indicati dai unti impropri:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \qquad m \cdot (x - x_0) - l \cdot (y - y_0) = 0$$

sostituendo

1° asse a_{s1} $0 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 0) = 0$ $y = 0$ asse x (5.1.6)

2° asse a_{s2} $1 \cdot (x - 0) - 0 \cdot (y - 0) = 0$ $x = 0$ asse y (5.1.7)

Gli assi della conica coincidono con gli assi cartesiani (come sicuramente era già noto)

5.2.3 *Vertici dell'iperbole*

Sono le intersezioni degli assi con la conica

Intersezione asse x

$\begin{cases} b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \\ y = 0 \end{cases}$ $x^2 = a^2$ $x = \pm a$

Vertici asse x $\begin{cases} V_{1x}(a,0) \\ V_{2x}(-a,0) \end{cases}$ (5.1.8)

Intersezione asse y

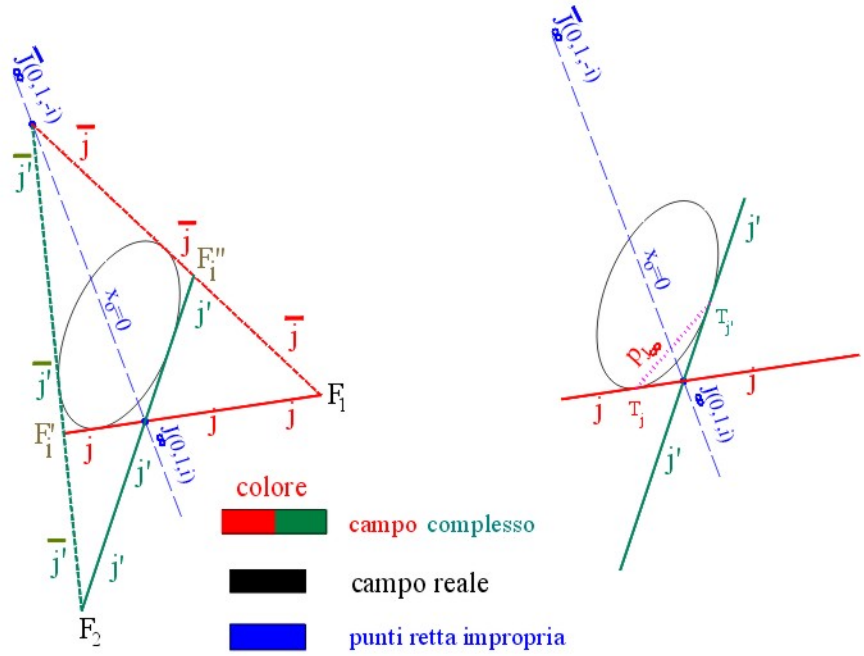
$$\begin{cases} b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \\ x = 0 \end{cases} \qquad y^2 = -b^2 \qquad y = \pm ib$$

Vertici asse y $\begin{cases} V_{1y}(ib,0) \\ V_{2y}(-ib,0) \end{cases}$ (5.2.9)

L'asse y è un asse non traverso, incontra la conica in due punti complessi e coniugati

5.2.4 *Fuochi dell'iperbole*

fig.5.2.1



I fuochi sono i quattro punti di intersezione delle quattro rette isotrope, tangenti alla conica, condotte dai due punti ciclici $J_\infty(0,1,i)$, $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$.

L'iperbole,nella figura è rappresentata con una linea chiusa sulla retta impropria $x_0 = 0$ per poter disegnare le tangenti condotte dai punti impropri $J_\infty(0,1,i)$, $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$

Siano j, j' le tangenti condotte dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$ e $\overline{j}, \overline{j'}$ quelle condotte da $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$, rispettivamente complesse coniugate di j, j'

L'intersezione tra la due coppie di rette $j \cap \overline{j}$ - $j' \cap \overline{j'}$ complesse coniugate forniscono due fuochi reali F_1, F_2, quelle tra le altre due coppie di rette, determinano due fuochi complessi $F_i' . F_i''$ e tra loro coniugati (la loro intersezione è su un asse della conica).

Per tracciare le tangenti alla conica, da un punto del piano (da $J_\infty(0,1,i)$ in figura), si può procedere come già indicato nei paragrafi precedenti:

d. Si determina la polare p_j del punto da cui si debbono tracciare le tangenti: in questo caso dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$ o $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$

e. Si determinano i punti di intersezione T_j, T_j' della polare p_{j_∞} con la conica, che sono anche i punti di tangenza delle tangenti condotte da $J_\infty(0,1,i)$ o $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$

f. Le polari dei punti di tangenza T_j, T_j' forniscono le tangenti j, j' in essi alla conica

Tangenti j, j' condotte dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$

Si sviluppa il procedimento indicato nei punti d,e,f

Polare p_{j_∞} del punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$

Equazione iperbole

$$b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2 b^2 x_0^2 = 0$$

equazione della polare di $J_\infty(0,1,i)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$0 \cdot x_0 + b^2 x_1 - ia^2 x^2 = 0 \qquad b^2 x - ia^2 y = 0 \qquad y = \frac{b^2}{ia^2} \cdot x$$

polare p_{j_∞}

$$y = -i\frac{b^2}{a^2} \cdot x \qquad (5.2.10)$$

Punti di intersezione $T_j, T_{j'}$ della polare con la conica

$$\begin{cases} b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \\ y = -i\dfrac{b^2}{a^2} \cdot x \end{cases} \qquad (5.2.11)$$

$$b^2 x^2 + a^2 \left(-i\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 \right)^2 = a^2 b^2 \qquad b^2 x^2 - a^2 i^2 \frac{b^4}{a^4} x^2 = a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 + \frac{b^4}{a^2} x^2 = a^2 b^2$$ dividendo per b^2

$$x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = a^2 \qquad a^2 x^2 + b^2 x^2 = a^4$$

$$\left(a^2 - b^2\right) \cdot x^2 = a^4 \qquad (5.2.12)$$

si pone

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (5.2.13)$$

sostituendo la (5.1.13) nella (5.1.12) si ha:

$$c^2 x^2 = a^4 \qquad x^2 = \frac{a^4}{c^2} \quad \text{da cui}$$

$$x = \pm \frac{a^2}{c} \begin{cases} x_j = +\dfrac{a^2}{c} \\ x_{j'} = -\dfrac{a^2}{c} \end{cases} \quad \text{coordinate x dei punti di intersezione } T_j, T_{j'}$$

sostituendo nella (5.2.11) si ottengono le coordinate y di detti punti.
Si ha:

$$y = \begin{cases} y_j = -i\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{a^2}{c} \\ y_{j'} = -i\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \left(-\dfrac{a^2}{c}\right) \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} y_j = -i\dfrac{b^2}{c} \cdot \\ y_{j'} = i\dfrac{b^2}{c} \end{cases} \qquad (5.1.14)$$

I punti $T_j, T_{j'}$ di intersezione della polare p_{j_∞} del punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$ con la conica sono:

$$\begin{cases} T_j\left(\dfrac{a^2}{c}, -i\dfrac{b^2}{c}\right) \\ T_{j'}\left(-\dfrac{a^2}{c}, +i\dfrac{b^2}{c}\right) \end{cases} \text{ in coordinate omogenee } \begin{cases} T_j\left(1, \dfrac{a^2}{c}, -i\dfrac{b^2}{c}\right) \\ T_{j'}\left(1, -\dfrac{a^2}{c}, +i\dfrac{b^2}{c}\right) \end{cases} \qquad (5.2.16)$$

Tangenti alla conica nei punti di intersezione $T_j, T_{j'}$ della polare p_{j_∞} con la conica

Le tangenti j, j' alla conica nei suoi punti di tangenza $T_j, T_{j'}$ sono le polari di essi.

Polare del punto $T_j\left(1, \dfrac{a^2}{c}, -i\dfrac{b^2}{c}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{a^2}{c} \\ -i\dfrac{b^2}{c} \end{pmatrix} = 0$$

$$-a^2b^2 x_0 + b^2 \frac{a^2}{c} x_1 + i a^2 \frac{b^2}{c} x_2 = 0$$

$$-x_0 + \frac{x_1}{c} + i x_2 = 0 \qquad -c x_0 + x_1 + i x_2 = 0$$

Tangente j $\quad -c+x+iy=0 \quad$ (5.2.17)

Polare del punto $T_{j'}\left(1,-\frac{a^2}{c},+i\frac{b^2}{c}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a^2}{c} \\ +i\frac{b^2}{c} \end{pmatrix}=0$$

$$-a^2b^2x_0-b^2\frac{a^2}{c}x_1-a^2i\frac{b^2}{c}x_2=0 \qquad -x_0-\frac{x_1}{c}-ix_2=0$$

$$-cx_0-x_1-ix_2=0 \qquad -c-x-iy=0$$

Tangente j' $\quad c+x+iy=0 \quad$ (5.2.18)

Tangenti j,j' *condotte dal punto ciclico* $J_\infty(0,1,i)$

$$\begin{cases} j\equiv & -c+x+iy=0 \\ j'\equiv & c+x+iy=0 \end{cases} \qquad (5.2.19)$$

Tangenti j,j' *condotte dal punto ciclico* $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$

Le tangenti dal punto ciclico $\overline{J}_\infty(0,1,-i)$, coniugato del precedente $J_\infty(0,1,i)$, sono rette le isotrope $\overline{j},\overline{j'}$ coniugate delle precedenti j,j' (come si è dimostrato precedentemente).

Si ha quindi

$$\begin{cases} \overline{j}\equiv & -c+x-iy=0 \\ \overline{j'}\equiv & c+x-iy=0 \end{cases} \qquad (5.2.20)$$

Fuochi reali

I fuochi reali $F_1.F_2$ si ottengono dalle intersezioni delle due coppie di rette isotrope $j\cap\overline{j}$, $j'\cap\overline{j'}$ complesse e coniugate

Fuoco F_1:

intersezione $j\cap\overline{j}$
$$\begin{cases} j\equiv & -c+x+iy=0 \\ \overline{j}\equiv & -c+x-iy=0 \end{cases} \qquad (5.1.21)$$

Sommando membro a membro:

$$-2c+2x=0 \qquad x=c$$

sottraendo membro a membro:

$$2iy=0 \qquad y=0$$

Le coordinate del fuoco sono $\begin{cases} x=c \\ y=0 \end{cases}$

Dove per la (5.2.13), è:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$Fuoco\ F_1(c,0)$$

Fuoco F_2:

intersezione $j'\cap\overline{j'}$ $\begin{cases} j' \equiv \quad c+x+iy=0 \\ \overline{j'} \equiv \quad c+x-iy=0 \end{cases}$ (5.2.22)

Sommando membro a membro:

$$2c+2x=0 \qquad x=-c$$

sottraendo membro a membro:

$$2iy=0 \qquad y=0$$

Le coordinate del fuoco sono $\begin{cases} x=-c \\ y=0 \end{cases}$

Dove per la (5.2.13), è:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$Fuoco\ F_1(-c,0) \qquad (5.2.23)$$

Fuochi complessi coniugati

I fuochi reali $F_i'.F_i''$ si ottengono dalle intersezioni delle due coppie di rette isotrope $j\cap\overline{j'}$, $j'\cap\overline{j}$ complesse ma non coniugate

Fuoco F_i':

intersezione $j'\cap\overline{j}$ $\begin{cases} j' \equiv \quad c+x+iy=0 \\ \overline{j} \equiv \ -c+x-iy=0 \end{cases}$ (5.2.24)

Sommando membro a membro si ha:

$$0+2x+0=0 \quad \text{da cui} \quad x=0$$

sottraendo membro a membro:

$$2c+0+2iy=0 \qquad iy=-c \qquad y=-\frac{1}{i}c \qquad y=c$$

Le coordinate del fuoco sono $\begin{cases} x = 0 \\ y = i\,c \end{cases}$ con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$Fuoco\ \ F_i'(0,ic)$$

Fuoco F_i'' :

intersezione $j \cap \overline{j'}$ $\begin{cases} j \equiv \ -c + x + i\,y = 0 \\ \overline{j'} \equiv \ \ c + x - i\,y = 0 \end{cases}$ (5.1.32)

Sommando membro a membro si ha:

$$0 + 2x + 0 = 0 \quad \text{da cui} \quad x = 0$$

sottraendo membro a membro si ha:

$$-2c + 2i\,y = 0 \qquad 2i\,y = 2c \qquad y = \frac{1}{i}c \qquad y = -ic$$

Le coordinate del fuoco sono $\begin{cases} x = 0 \\ y = -i\,c \end{cases}$

Dove per le (5.1.13), (5.1.23) è:

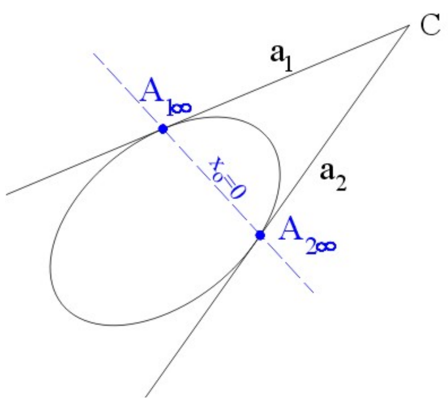
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$Fuoco\ \ F_i''(0,-ic) \qquad (5.2.33)$$

Il fuoco $F_i''(0,-ic)$ è un punto complesso coniugato di $F_i'(0,ic)$. La congiungente i due punti è l'asse y reale.

5.2.5 Asintoti dell'iperbole

Fig.5.2.2



Come già fatto precedentemente, per una rappresentazione concettuale ove possano comparire punti impropri, retta impropria ecc. l'iperbole, in figura, è rappresentata da una curva chiusa nei punti impropri $A_{1\infty}, A_{2\infty}$ sulla retta impropria $x_0 = 0$, rappresentata al finito.

Gli asintoti sono le tangenti alla conica nei suoi punti impropri. Come si è rilevato nei paragrafi precedenti l'iperbole ha due punti impropri reali e distinti $A_{1\infty}, A_{2\infty}$, ottenuti dalla intersezione con la retta impropria $x_0 = 0$.

Punti impropri

Intersezione della conica con la retta impropria

$$\begin{cases} b^2 x_1^2 - a^2 x_2^2 - a^2 b^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad (5.2.34)$$

$$b^2 x_1^2 - a^2 x_2^2 = 0 \qquad b^2 x_1^2 = a^2 x_2^2 \qquad \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \pm \frac{a}{b} \qquad (5.2.35)$$

da cui considerando anche $x_0 = 0$ le coordinate dei punti impropri sono

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \pm \rho\, a \\ x_2 = \rho\, b \end{cases} \quad \text{con qualsiasi } \rho \neq 0$$

scelto $\rho = 1$ si hanno le coordinate dei due punti impropri

$$A_{1\infty} \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = a \\ x_2 = b \end{cases} \qquad A_{2\infty} \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = -a \\ x_2 = b \end{cases}$$

Punti impropri $\quad A_{1\infty}(0,a,b) \ - \ A_{2\infty}(0,-a,b)$

Asintoti – tangenti alla conica nei punti impropri

Asintoto a_1

Il punto improprio appartiene alla conica, quindi la tangente in esso coincide con la sua polare

Polare di $A_{1\infty}(0,a,b)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$0x_0 + b^2 a\, x_1 - a^2 b x_2 = 0 \qquad bx_1 - ax_2 = 0 \qquad bx - ay = 0$$

Asintoto a_1 $\qquad y = \frac{b}{a} x \qquad (5.2.36)$

Asintoto a_2

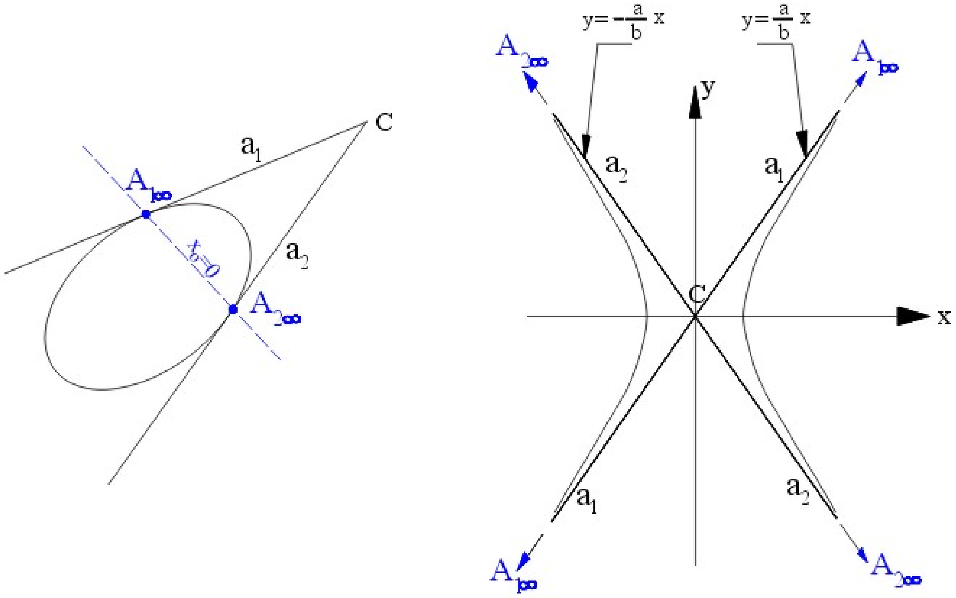
Polare di $A_{2\infty}(0,-a,b)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$0x_0 - b^2 a\, x_1 - a^2 b x_2 = 0 \qquad bx_1 + ax_2 = 0 \qquad bx + ay = 0$$

Asintoto a_2
$$y = -\frac{b}{a}x \tag{5.2.37}$$

Fig.5.2.3



Asintoti
$$\begin{cases} a_1 \quad y = \dfrac{b}{a}x \\ a_2 \quad y = -\dfrac{b}{a}x \end{cases} \tag{5.2.38}$$

5.2.6 *Direttrice, eccentricità dell'iperbole*

Direttrice

La direttrice è la polare del fuoco.
L'equazione dell'ellisse è

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \tag{5.1.51}$$

In coordinate omogenee

$$b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2 b^2 x_0^2 = 0 \tag{5.1.52}$$

Consideriamo il fuoco reale $F_1(c,0)$

Polare di $F_1(1,c,0)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-a^2b^2x_0 + b^2c\,x_1 + 0\,x_2 = 0 \qquad -a^2x_0 + c\,x_1 = 0 \qquad -a^2 + c\,x = 0$$

Equazione direttrice d_1 $\qquad x = \dfrac{a^2}{c}$ (5.2.34)

La direttrice è una retta parallela all'asse y

Occorre notare che:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} > a$$

quindi $\qquad x = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} < a$

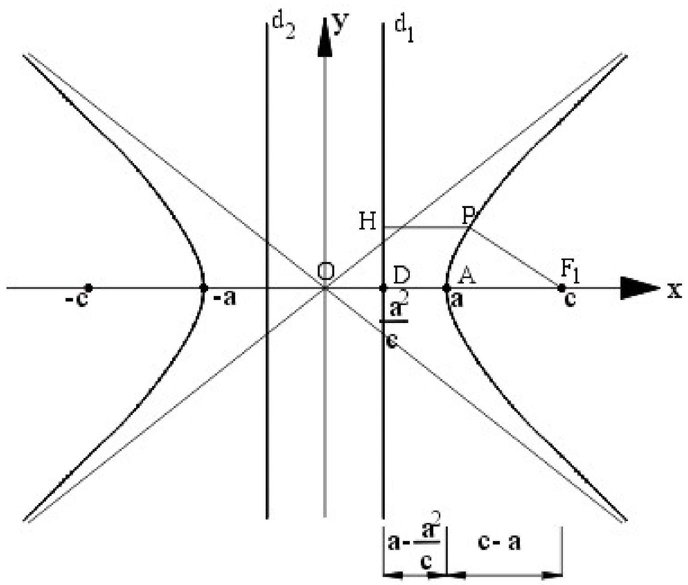
Polare di $F_2(1,-c,0)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-a^2b^2x_0 - b^2c\,x_1 + 0\,x_2 = 0 \qquad -a^2x_0 - c\,x_1 = 0 \qquad -a^2 - c\,x = 0$$

Equazione direttrice d_2 $\qquad x = -\dfrac{a^2}{c}$ (5.2.35)

Fig.5.2.4



Eccentricità

L'eccentricità è il rapporto costante tra la distanza di un punto dell'iperbole dal fuoco e quella dalla direttrice.

Consideriamo il fuoco F_1 e la direttrice d_1 fig.5.2.4.

L'eccentricità è il rapporto:

$$e = \frac{PF}{PH}$$

Come punto particolare dell'iperbole si consideri il vertice A, l'eccentricità è data da:

$$e = \frac{AF}{DA}$$

con
$$\begin{cases} AF = c - a \\ DA = a - \dfrac{a^2}{c} \end{cases}$$

$$e = \frac{c-a}{a - \dfrac{a^2}{c}} = \frac{c-a}{\dfrac{ac - a^2}{c}} = \frac{c-a}{\dfrac{a}{c} \cdot (c-a)}$$

$$e = \frac{c}{a} \qquad (5.2.36)$$

dove $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ quindi

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$$

L'eccentricità, come già noto. è maggiore di 1

Altra espressione della direttrice

L'equazione determinata della direttrice è:

$$x = \frac{a^2}{c}$$ si ha $$x = a \cdot \frac{a}{c} = \frac{a}{\dfrac{a}{c}}$$ per la (5.3.36) si ha

$$x = \frac{a}{e} \qquad (5.2.37)$$

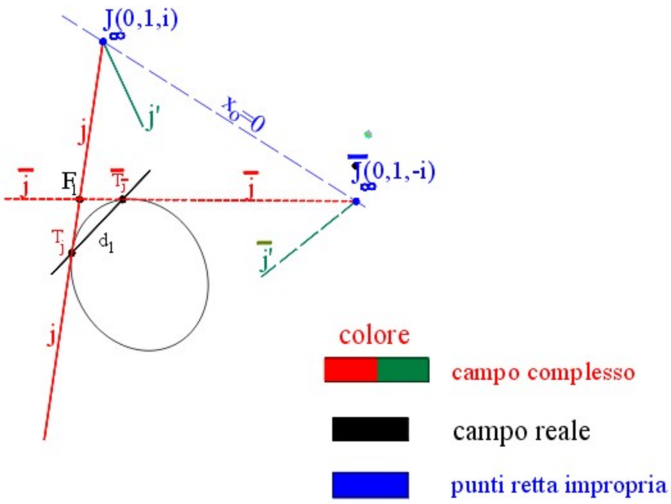
Concludendo

Eccentricità $e = \dfrac{c}{a}$

Direttrice $\begin{cases} x = \dfrac{a^2}{c} \\ x = \dfrac{a}{e} \end{cases}$

Osservazione sulla direttrice

Fig.5.2.5



La direttrice è la polare del fuoco. Per esempio la direttrice d_1 è la polare di F_1.

La polare d_1 si ottiene congiungendo i punti di tangenza $T_j.\overline{T}_{\bar{j}}$ delle tangenti $j,\bar{j}$ condotte dal fuoco F_1, ma queste sono, come sappiamo, rette isotrope complesse coniugate, condotte dai due punti ciclici $J_\infty(0,1,i), \overline{J}_\infty(0.1,-i)$, e rispettivamente: la retta j dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$, la retta $\bar{j}$ dal punto ciclico $,\overline{J}_\infty(0.1,-i)$

Il punti complesso e coniugato $T_j.$ è stato determinato nel paragrafo 5.2.4. Vedi le espressioni (5.2.16). Il punto $\overline{T}_{\bar{j}}$ è il coniugato di $T_j.$.

Si ha:

$$T_j\left(\frac{a^2}{c},-i\frac{b^2}{c}\right) \qquad T_j\left(\frac{a^2}{c},+i\frac{b^2}{c}\right)$$

la direttrice d_1 è la congiungente i due punti complessi e coniugati $T_j.\overline{T}_{\bar{j}}$

retta per due punti:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (x-x_1)\cdot(y_2-y_1)=(y-y_1)\cdot(x_2-x_1)$$

$$\left(x-\frac{a^2}{c}\right)\cdot\left(i\frac{b^2}{c}+i\frac{b^2}{c}\right)=\left(y+i\frac{b^2}{c}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{c}-\frac{a^2}{c}\right)$$

$$\left(x-\frac{a^2}{c}\right)\cdot 2i\frac{b^2}{c}=0 \qquad x-\frac{a^2}{c}=0$$

Equazione direttrice d_1 $\qquad x=\frac{a^2}{c}$

Clic per continuare

clic per precedente

Clic per la pagina iniziale