Cilc per tutti gli appunti (AUTOMAZIONE – TRATTAMENTI TERMICI ACCIAIO – SCIENZA delle COSTRUZIONI…)

e-mail per suggerimenti

4 *Le coniche* $\mathscr{C}^2$ *– proprietà metriche*

Con la proprietà metriche si ha la possibilità di confrontare e misurare lunghezze di segmenti con direzioni diverse ed angoli, rispetto ad unità di misura omogenee con la grandezze da misurare.

4.1 Assi della conica - vertici

Si definiscono assi di una conica due diametri coniugati perpendicolari tra loro.
I vertici della conica sono i punti di intersezione degli assi con la conica.

Per la trattazione occorre distinguere le coniche a centro e le parabole
i

4.1.1 Assi delle coniche a centro

Si determinano le condizioni che debbono soddisfare i parametri direttori (l,m) e $(\bar{l},\bar{m})$ rispettivamente di due diametri coniugati d e $\bar{d}$ affinché risultino perpendicolari.

Siano $D_\infty(0,l,m)$ e $\bar{D}_\infty(0,\bar{l},\bar{m})$ i punti impropri rispettivamente dei diametro d e $\bar{d}$, corrispondenti ai loro parametri direttori (l,m) e $(\bar{l},\bar{m})$

I due assi sono diametri coniugati, e quindi i loro parametri direttori debbono soddisfare la condizione di coniugio

$$a_{11}\,l\,\bar{l} + a_{12}\left(l\,\bar{m} + \bar{l}\,m\right) + a_{22}\,m\,\bar{m} = 0 \qquad (4.1.1)$$

I due assi sono perpendicolari, quindi i parametri direttori debbono soddisfare la condizione di perpendicolarità.

$$l\,\bar{l} + m\,\bar{m} = 0 \qquad \text{da cui} \qquad l\,\bar{l} = -m\,\bar{m} \quad \rightarrow \quad \frac{\bar{l}}{\bar{m}} = -\frac{m}{l}$$

per cui deve essere:

$$\begin{cases} \bar{l} = \rho\, m \\ \bar{m} = -\rho\, l \end{cases} \qquad \text{per qualsiasi } \rho \neq 0$$

Scelto $\rho = 1$ la relazione di perpendicolarità tra i parametri direttori dei due assi diviene

$$\begin{cases} \bar{l} = m \\ \bar{m} = -l \end{cases} \qquad (4.1.2)$$

Sostituendo la condizione (4.1.2) nella (4.1.1) si ha:

$$a_{11}\,l\,m + a_{12}\left(-l^2 + m^2\right) - a_{22}\,m\,l = 0$$

$$a_{11}\,l\,m - a_{12}\,l^2 - a_{12}\,m^2 - a_{22}\,l\,m = 0 \qquad (4.1.5)$$

la condizione che debbono soddisfare i parametri direttori degli assi di una conica, per la (4.1.5) si pone nella forma:

$$a_{12}\,l^2 + \left(a_{22} - a_{11}\right)l\,m - a_{12}\,m^2 = 0 \qquad (4.1.6)$$

la condizione è una equazione omogenea di secondo grado, per determinare i parametri direttori dei due assi conviene dividere l'espressione per m^2

$$a_{12}\left(\frac{l}{m}\right)^2 + (a_{22} - a_{11})\cdot\left(\frac{l}{m}\right) - a_{12} = 0$$

si ha così un'equazione di secondo grado nella variabile $\left(\frac{l}{m}\right)$ con determinante

$$\Delta = (a_{22} - a_{11})^2 + a_{12}^2$$

Il discriminante Δ , essendo una somma di due quadrati risulta maggiore o tutt'al più uguale a zero.

$$\Delta = (a_{22} - a_{11})^2 + a_{12}^2 \geq 0$$

Nelle coniche a centro gli assi esistono e sono sempre reali

Nel caso particolare in cui risulta $\Delta = 0$, escluso che tutti e tre i coefficienti siano nulli (la curva sarebbe una retta) occorre che risulti:

$$\begin{cases} a_{22} = a_{11} \\ a_{12} = 0 \end{cases}$$

In tal caso la (4.1.6) diviene

$$0 \cdot l^2 + 0 \cdot lm - 0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad 0 = 0$$

la condizione di perpendicolarità degli assi è sempre soddisfatta: qualsiasi coppia di diametri coniugati sono sempre assi della conica (sono perpendicolari tra loro). La conica è denominata circonferenza.

Posto il coefficiente comune

$$a_{11} = a_{22} = \lambda$$

e $$a_{12} = 0$$

l'equazione della conica diviene

$$\lambda x^2 + \lambda y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

I coefficienti dei quadrati delle incognite sono uguali e manca il prodotto xy delle incognite.

Alla conica si dà nome di *circonferenza*

Il discriminante α_{00} risulta

$$\alpha_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = \lambda \cdot \lambda - 0 > 0$$

Si tratta di una ellisse

La circonferenza è una particolare ellisse con $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$

Concludendo

Le coniche a centro, ellisse ed iperbole, possiedono una coppia di diametri coniugati, denominati assi, perpendicolari tra loro.

Per la circonferenza ogni diametro è un asse coniugato con il diametro perpendicolare ad esso.

Esempio di assi e asintoti

Data la conica

$$x^2 + 8y^2 - 6xy + 6x - 2 = 0$$

determinare

a. *Il tipo di conica*
b. *Il centro*
c. *Eventuali asintoti reali*
d. *Gli assi*

a. *Tipo di conica*

Conica in coordinate omogenee

$$x_1^2 + 8x_2^2 - 6x_1x_2 + 6x_0x_1 - 2x_0^2 = 0$$

Matrice caratteristica

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Discriminante $\quad a_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$

$$a_{00} = 1 \cdot 8 - (-3)^2 = -1 < 0$$

La conica è una iperbole

b. *Asintoti*

Punti impropri

Intersezione con la retta impropria

$$\begin{cases} x_1^2 + 8x_2^2 - 6x_1x_2 + 6x_0x_1 - 2x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$x_1^2 + 8x_2^2 - 6x_1x_2 = 0$$

Equazione omogenea di secondo grado. Dividendo per x_2

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 - 6\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + 8 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = -a_{00} = 9 - 8 = 1$$

$$\frac{x_1}{x_2} = 3 \pm 1 = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x_1 = \rho\, 4 \\ x_2 = \rho\, 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \rho\, 2 \\ x_2 = \rho\, 1 \end{cases} \quad \text{con } \rho \neq 0$$

scelto $\rho = 1$ *i punti impropri dell'iperbole possono esser posti nella forma*

$$A_{1\infty}(0,4,1) \qquad A_{1\infty}(0,2,1)$$

Asintoto a_1

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$12x_0 + (4-3)x_1 + (-12+8)x_2 = 0 \qquad 12x_0 + x_1 - 4x_2 = 0$$

In coordinate non omogenee, asintoto a_1 *:*

$$a_1 \equiv \qquad x - 4y + 12 = 0$$

Asintoto a_2

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$6x_0 + (2-3)x_1 + (-6+8)x_2 = 0 \qquad 6x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$$

In coordinate non omogenee, asintoto a_2 *:*

$$a_2 \equiv \quad -x + 2y + 6 = 0$$

c. *Centro della conica*

Gli asintoti sono due diametri coniugati che passano per il centro, che si può ottenere, quindi, dalla loro intersezione.

$$\begin{cases} x - 4y + 12 = 0 \\ -x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -24 - 24 = -48$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -12 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 12 = -18$$

$$x = \frac{-48}{-2} = 24$$

$$y = \frac{-18}{-2} = 9$$

Centro $C(24,9)$

d. *Assi dell'iperbole*

I parametri direttori degli assi debbono soddisfare alle condizioni di coniugio e di perpendicolarità, espresse dalla reazione (4.1.6)

$$a_{12} l^2 + (a_{22} - a_{11}) l m - a_{12} m^2 = 0$$

sostituendo i coefficienti della conica

$$-3l^2 + (8-1) lm + 3m^2 = 0$$

È un'equazione omogenea di secondo grado nelle incognite l,m. *Dividendo per* m^2

$$-3\left(\frac{l}{m}\right)^2 + 7\left(\frac{l}{m}\right) + 3 = 0$$

$$\Delta = 49 + 4 \cdot 9 = 85$$

$$\frac{l}{m} = \frac{-7 \pm \sqrt{85}}{-6} \qquad \frac{l}{m} = \frac{7 \pm \sqrt{85}}{6} \qquad \begin{cases} l = (7 \pm \sqrt{85}) \cdot \rho \\ m = 6 \cdot \rho \end{cases} \quad con\ \rho \neq 0$$

Scelto $\rho = 1$ *si hanno le seguenti soluzioni*

$$\begin{cases} l = 7 + \sqrt{85} \\ m = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{l} = 7 - \sqrt{85} \\ \bar{m} = 6 \end{cases}$$

I punti impropri dei due assi sono:

$$A_\infty \left(0,\ 7 + \sqrt{85},\ 6\right) \ \bar{A}_\infty \left(0,\ 7 - \sqrt{85},\ 6\right)$$

Verifichiamo la perpendicolarità dei due assi. Deve risultare

$$l \cdot \bar{l} + m \cdot \bar{m} = 0$$

infatti

$$(7 + \sqrt{85}) \cdot (7 - \sqrt{85}) + 6 \cdot 6 = 49 - 85 + 36 = 0$$

Equazione degli assi

Rette passanti per il centro $C(24,9)$ *e aventi i punti impropri degli assi* A_∞ , $\bar{A}_\infty$ *con parametri direttori*

$$\begin{cases} l = 7 + \sqrt{85} \\ m = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{l} = 7 - \sqrt{85} \\ \bar{m} = 6 \end{cases}$$

$$\frac{x - 24}{7 + \sqrt{85}} = \frac{y - 9}{6} \qquad \frac{x - 24}{7 - \sqrt{85}} = \frac{y - 9}{6}$$

Equazione degli assi

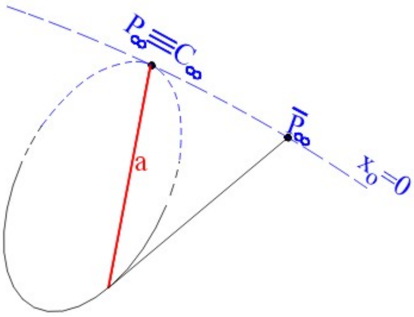
Sono i punti di intersezione tra gli assi e la conica

$$\begin{cases} x^2 + 8y^2 - 6xy + 6x - 2 = 0 \\ \dfrac{x - 24}{7 + \sqrt{85}} = \dfrac{y - 9}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 8y^2 - 6xy + 6x - 2 = 0 \\ \dfrac{x - 24}{7 - \sqrt{85}} = \dfrac{y - 9}{6} \end{cases}$$

beh! Risolveteli voi sti' due sistmi. Oggi è pe'me 'na giornata storta e nun me va' de fa' carcoli

4.1.2 Asse della parabola

fig.4.1.1



Nella parabola la retta impropria $x_0 = 0$ è tangente alla conica nel suo punto improprio P_∞ ; ne deriva che, questo e la retta impropria costituiscono un polo e la rispettiva polare rispetto alla conica. Ogni diametro, polare di un punto improprio, appartenente alla retta impropria, passa per il polo P_∞ di essa, che coincide, così, con il centro C_∞ della conica.

Da quanto su esposto ne viene che:

- La retta impropria è un diametro coniugato con qualsiasi altro, il quale passa per il centro $C_\infty \equiv P_\infty$ polo della retta impropria stessa
- Per individuare l'asse a della parabola occorre determinare quel diametro avente il improprio $\overline{P}_\infty$ in direzione normale a quello P_∞ della conica, che è anche suo centro ed è polo della retta impropria. I coniugio è di per se stesso assicurato

Il vertice dalla parabola è l'intersezione dell'asse con a conica

Per determinare l'equazione dell'asse a della parabola si può procedere nella seguente maniera:

a) Determinare il punto improprio P_∞ della parabola, intersecando la sua equazione con quella della retta impropria $x_0 = 0$;

$$\begin{cases} \mathscr{C} = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

b) determinato il punto improprio $P_\infty(0,l,m)$ della parabola, con parametri direttori:

$$P_\infty \quad \rightarrow \quad \text{parametri direttori} \begin{cases} l \\ m \end{cases}$$

si ha i punto improprio in direzione perpendicolare $\overline{P}_\infty$ con parametri direttori

$$\overline{P}_\infty \quad \rightarrow \quad \text{parametri direttori} \begin{cases} \overline{l} = m \\ \overline{m} = -l \end{cases}$$

$$\overline{P}_\infty(0,m,-l)$$

c) l'asse a della parabola è la polare del punto improprio $\overline{P}_\infty(0,m,-l)$

Esempio

Determinare l'asse della parabola avente la seguente equazione

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy - 6x + 2 = 0$$

--------o--------

L'equazione in coordinate omogenee è

$$4x_1^2 + 9x_2^2 - 12x_1x_2 + x_0x_1 + 2x_0^2 = 0$$

Matrice caratteristica:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & -6 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Discriminante $\quad a_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$

$$a_{00} = 4 \cdot 9 - (-6)^2 = 0$$

La conica è una parabola

Punti improprio

Intersezione con la retta impropria

$$\begin{cases} 4x_1^2 + 9x_2^2 - 12x_1x_2 + x_0x_1 + 2x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$4x_1^2 + 9x_2^2 - 12x_1x_2 = 0$ *dividendo per* x_2^2

$$4\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 - 12\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + 9 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = -a_{00} = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{6 \pm 0}{4} \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{2} \quad \textit{parametri direttori} \quad \begin{cases} l = x_1 = \rho \cdot 3 \\ m = x_2 = \rho \cdot 2 \end{cases} \textit{qualsiasi } \rho \neq 0$$

Scelto $\rho = 1$

Punto improprio P_∞ *e centro della parabola*

$$\textit{Parametri direttori} \begin{cases} l = 3 \\ m = 2 \end{cases} \qquad C_\infty \equiv P_\infty(0,3,2)$$

Punto improprio $\overline{P}_\infty$ *in direzione ortogonale*

$$\textit{Parametri direttori} \begin{cases} \bar{l} = m = 2 \\ \overline{m} = -l = -3 \end{cases} \qquad \overline{P}_\infty(0,2,-3)$$

Asse della parabola.

È la polare del punto improprio $\overline{P}_\infty(0,2,-3)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & -6 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(0 - 6 + 0) \cdot x_0 + (8 + 18) \cdot x_1 + (-12 - 27) x_2 = 0$$

In coordinate non omogenee l'equazione della conica è:

$$24x - 39y - 6 = 0$$

Vertice della, parabola

Il vertice si ottiene dalla intersezione dell'asse con la conica. Occorre risolvere il sistema tra l'equazione dell'asse e della conica.

$$\begin{cases} 24x - 39y - 6 = 0 \\ 4x^2 + 9y^2 - 12xy - 6x + 2 = 0 \end{cases}$$

Risolvete e troverete le coordinate del vertice ("a me nu' me va")

4.2 Richiami sugli elementi geometrici nel campo complesso

Punti complessi

Un punto complesso ha coordinate espresse da numeri complessi

$P[(a+ib),(c+id)]$ coordinate espresse con numeri complessi $\begin{cases} x = a+ib \\ y = c+id \end{cases}$

Il punto $\overline{P}$ avente le coordinate complesse e coniugate di quelle del punto P, è definito punto complesso coniugato di P.

$\overline{P}[(a-ib),(c-id)]$ con $\begin{cases} x = a-ib \\ y = c-id \end{cases}$

Proprietà

Una retta congiungente due punti complessi coniugati è una retta reale

Siano $P[(a+ib),(c+id)]$ e $\overline{P}[(a-ib),(c-id)]$

I due punti complessi e coniugati

La retta, congiungente i due punti è:

$$\frac{x-(a+ib)}{(a-ib)-(a+ib)} = \frac{y-(c+id)}{(c-id)-(c+id)}$$

$$\frac{x-a-ib}{a-ib-a-ib} = \frac{y-c-id}{c-id-c-id} \qquad \frac{x-a-ib}{-2ib} = \frac{y-c-id}{-2id} \qquad \frac{x-a-ib}{b} = \frac{y-c-id}{d}$$

$$d\,x - a\,d - i\,bd = b\,y - c\,d - i\,bd$$

$$d\,x - by + (c\,b - a\,d)$$

Rette complesse

Una retta r nel campo complesso ha i coefficienti espressi con numeri complessi del tipo

$$r \equiv \quad (a+ib)x + (c+id)y + (e+if) = 0 \qquad (4.2.1)$$

Si definisce retta $\overline{r}$ coniugata di r quella avente i coefficienti espressi con numeri complessi coniugati di quelli della detta retta r

$$\overline{r} \equiv \quad (a-ib)x + (c-id)y + (e-if) = 0 \qquad (4.2.2)$$

Proprietà

Due rette complesse e coniugate si incontrano in un punto reale

Infatti intersechiamo le due retta coniugate $r, \overline{r}$

$$\begin{cases} (a+ib)x + (c+id)y + (e+if) = 0 \\ (a-ib)x + (c-id)y + (e-if) = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha:

$2a\,x + 2c\,y + 2e = 0$ da cui

$$a\,x + c\,y + e = 0$$

Sottraendo membro a membro si ha:

$$-i2bx - i2dy - i2f = 0$$ dividendo per $-i2$ si ha:

$$bx + dy + f = 0$$

la coordinate del punto di intersezione tra le due rette $r, \bar{r}$ si ottiene dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} a\,x + c\,y = -e \\ bx + dy = -f \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -e & c \\ -f & d \end{vmatrix} = -ed + fc \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & -e \\ b & -f \end{vmatrix} = -af + be$$

$$x = \frac{-ed + fc}{ad - bc} \qquad y = \frac{-af + be}{ad - bc}$$

Esempi

a)a *Retta per due punti complessi coniugati*

Determinare la retta passante per i seguenti punti complessi coniugati

$$P(2 + i4,\, 3 - i6) \qquad \overline{P}(2 - i4,\, 3 + i6)$$

$$\frac{x - 2 - i4}{(2 - i4) - (2 + i4)} = \frac{y - 3 + i6}{(3 + i6) - (3 - i6)}$$

$$\frac{x - 2 - i4}{-i8} = \frac{y - 3 + i6}{+i12}$$

$$12x - 24 - i48 = -8y + 24 - i48 \qquad 12x + 8y - 48 = 0$$

$$3x + 2y - 12 = 0$$

--------o--------

Determinare la retta passante per i punti

$$P(3,\, 2 + i6) \qquad \overline{P}(3,\, 2 - i6)$$

conviene porre l'equazione della retta tra due punti

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$ *nella forma*

$$(x - x_1)\cdot(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)\cdot(y - y_1)$$

sostituendo si ha:

$$(x-3)\cdot[(2-i6)-(2+i6)]=(3-3)[y-(2+i6)]$$

$$(x-3)\cdot(-i12)=0$$

$$x=3$$

2. *Punto di intersezione tra due retta complesse e coniugate*
   Determinare i punto di intersezione tra le due retta coniugate:

$$\begin{cases}(2+i4)x-(3-i5)y+4=0\\(2-i4)x-(3+i5)y+4=0\end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha:

$$4x-6y+8=0$$

Sottraendi membro a membro si ha:

$$i8x+i10y=0 \qquad 4x+5y=0$$

punto di intersezione della due rette:

$$\begin{cases}4x-6y=-8\\4x+5y=0\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & -6\\4 & +5\end{vmatrix}=20+24=44 \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}-8 & -6\\0 & +5\end{vmatrix}=-40 \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}4 & -8\\4 & 0\end{vmatrix}=32$$

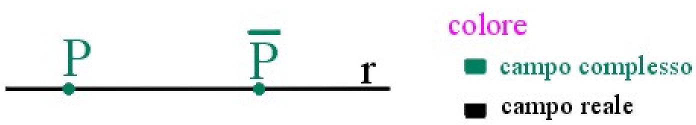
$$\begin{cases}x=-\dfrac{40}{44}\\y=\dfrac{32}{44}\end{cases} \qquad \begin{cases}x=-\dfrac{10}{11}\\y=\dfrac{8}{11}\end{cases}$$

Proprietà dei punti e rette complesse

Da quanto su esposto ne derivano le seguenti proprietà:

a. Per un punto P complesso passa una sola retta r reale.

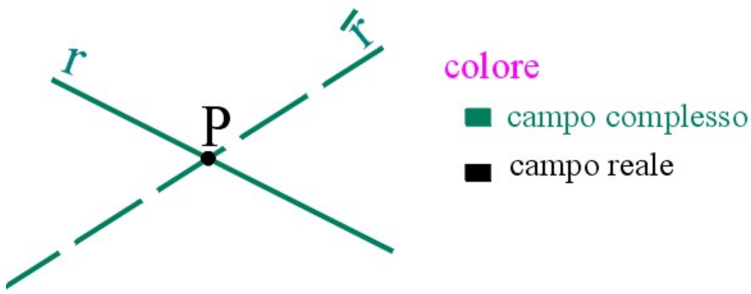
fig.4.2.1



tale retta è quella che congiunge detto punto P con il suo punto $\overline{P}$ complesso coniugato.

b. Per ogni retta complessa r esiste uno e un solo punto reale P appartenente ad essa

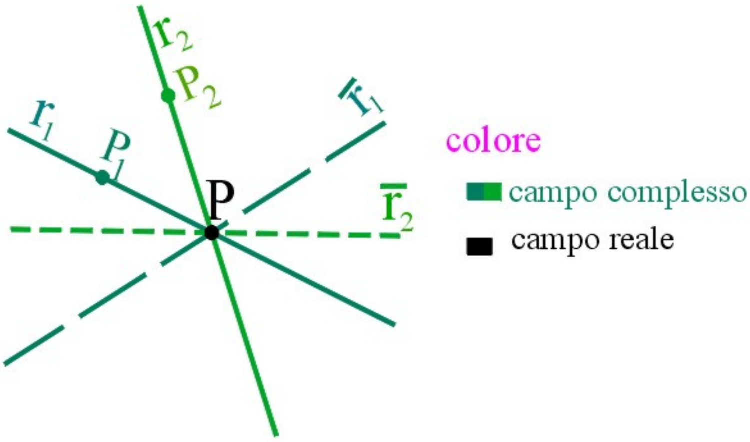
fig.4.2.2



Questo punto reale P è quello di intersezione di detta retta r con la sua coniugata $\bar{r}$

c. Per ogni punto reale P passano infinite rette $r_1, r_2, \ldots$ complesse.

fig.4.2.3



Infatti, considerato, oltre al punto reale P, un qualsiasi punto complesso P_1 la retta congiungente i due punti è una retta complessa r_1 la cui intersezione con la sua coniugata $\bar{r}_1$ è il punto reale P. Considerato un altro punto complesso P_2 si ha un'altra retta complessa la cui intersezione con la sua coniugata è il punto P, e così via…

Esempio

Dato il punto $P(3,2)$ una retta complessa può essere quella congiungente un punto complesso qualsiasi, ad esempio $P_1[(1-i5).(2-i3)]$
La retta r complessa congiungente i due punti è

$$r \equiv \quad \frac{x-3}{(1-i5)-3} = \frac{y-2}{(2-i3)-2} \qquad \frac{x-3}{-2-i5} = \frac{y-2}{-i3}$$

$$r \equiv \quad -i3x + i9 = (-2-i5)y + 4 + i10$$

$r \equiv \quad i3x - (2 + i5)y + (4 + i) = 0$

L'intersezione della retta r *con la sua coniugata* $\bar{r}$ *è il punto reale* $P(3,2)$
Infatti, $\bar{r}$ *la retta coniugata è:*

$\bar{r} \equiv \quad -i3x - (2 + -i5)y + (4 - i) = 0$

Intersezione rette

$$\begin{cases} i3x - (2 + i5)y + (4 + i) = 0 \\ -i3x - (2 - i5)y + (4 - i) = 0 \end{cases}$$

sommando membro a membro

$$0 - 4y + 8 = 0 \qquad y = 2$$

sottraendo membro a membro

$$i6x - i10y + i2 = 0 \qquad 3x - 5y + 1 = 0$$

$$\begin{cases} 3x - 5y + 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 10 + 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \text{punto di intersezione } P(3,2)$$

Punti ciclici rette isotrope

In un riferimento cartesiano ortogonale monometrico si consideri il luogo geometrico dei punti aventi una distanza d rispetto ad un punto $P_0(x_0, y_0)$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = d^2 \qquad (4.2.3)$$

Consideriamo il caso particolare di distanza nulla: $d = 0$. Cioè il luogo geometrico dei punti aventi distanza nulla da un punto fisso $P_0(x_0, y_0)$.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0 \qquad (4.2.4)$$

L'equazione (4.0.4) nel campo reale è soddisfatta per il punto $P_0(x_0, y_0)$

$$x = x_0 \qquad y = y_0$$

Nel campo complesso l'equazione (4.0.4) può sdoppiarsi nel prodotto di due rette coniugate la cui intersezione è il punto reale $P_0(x_0, y_0)$. *A tali rette si dà nome di* ***rette isotrope***

Infatti dalla (4.2.4) si ha

$$(y - y_0)^2 = -(x - x_0)^2 \qquad (y - y_0) = \pm\sqrt{-(x - x_0)} \qquad (y - y_0) = \pm\sqrt{-1}\cdot(x - x_0)$$

$$(y - y_0) = \pm i \cdot (x - x_0) \qquad (4.0.5)$$

si ha

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = [(x - x_0) + i\cdot(y - y_0)]\cdot[(x - x_0) - i\cdot(y - y_0)] = 0 \qquad (4.2.6)$$

le due rette complesse coniugate (4.2.5) si intersecano nel punto reale $P_0(x_0, y_0)$

$$\begin{cases}(y - y_0) = +i\cdot(x - x_0)\\(y - y_0) = -i\cdot(x - x_0)\end{cases} \qquad (4.2.7)$$

sommando membro a membro si ha:

$$2y - 2y_0 = 0 \qquad y = y_0$$

Sottraendo membro a membro si ha:

$$2i\cdot(x - x_0) = 0 \qquad x = x_0$$

Punti ciclici

Le rette isotrope sono quindi le (4.0.7)

$$\begin{cases}(y - y_0) = +i\cdot(x - x_0)\\(y - y_0) = -i\cdot(x - x_0)\end{cases}$$

esse hanno coefficienti angolari $+i, -i$ e quindi passano per i punti impropri

$$\begin{cases}J_\infty(0,1,i)\\\overline{J}_\infty(0,1,-i)\end{cases} \text{ oppure } \begin{cases}J_\infty(0,1,i)\\\overline{J}_\infty\left(0,1,\frac{1}{i}\right)\end{cases} \text{ oppure } \begin{cases}J_\infty(0,1,i)\\\overline{J}_\infty(0,i,1)\end{cases}$$

*Ai punti impropri delle rette isotrope si dà noma di **punti ciclici***

Il prodotto (4.2.6) della rette isotrope è il luogo geometrico dei punti di distanza nulla rispetto ad un punto $P_0(x_0, y_0)$

Ne viene che:

In ogni punto reale $P_0(x_0, y_0)$ del piano passano due rette isotrope che si intersecano in tale punto.

Significato dei punti ciclici

Consideriamo l'equazione generica di una circonferenza nel piano cartesiano ortogonale monometrico

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

in coordinate omogenee

$$x_1^2 + x_2^2 + ax_0x_1 + bx_0x_2 + cx_0^2 = 0$$

Determiniamo i punti impropri della circonferenza intersecandola con la retta impropria

$$\begin{cases}x_1^2 + x_2^2 + ax_0x_1 + bx_0x_2 + cx_0^2 = 0\\x_0 = 0\end{cases}$$

si ha:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \qquad (4.2.8)$$

dividendo per x_2

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 1 = 0 \qquad \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = -1 \qquad \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \pm\sqrt{-1}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \pm i \qquad \begin{cases} x_1 = \rho\, i \\ x_2 = -\rho\, i \end{cases} \text{ con } \quad \rho \neq 0 \quad \text{per} \quad \rho = 1 \qquad \begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = -i \end{cases}$$

I due punti impropri della circonferenza sono i punti ciclici

$$\begin{cases} J_\infty\,(0,1,i) \\ \overline{J}_\infty\,(0,1,-i) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} J_\infty\,(0,1,i) \\ \overline{J}_\infty\,(0,i,1) \end{cases}$$

Tutte le circonferenze del piano intersecano la retta impropria nei punti ciclici $J_\infty\,(0,1,i)$, $J_\infty\,(0,1,-i)$ questi sono anche i punti impropri della coppia rette isotrope coniugate che si intersecano in qualsiasi punto reale del piano.

Infatti una circonferenza con centro in un punto $P_0(x_0, y_0)$ di raggio r ha equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

La circonferenza con centro $P_0(x_0, y_0)$ e raggio nullo è:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$$

l'equazione si sdoppia nel prodotto di due rette isotrope coniugate che si intersecano in $P_0(x_0, y_0)$

$$[(x - x_0) + i\cdot(y - y_0)]\cdot[(x - x_0) - i\cdot(y - y_0)] = 0$$

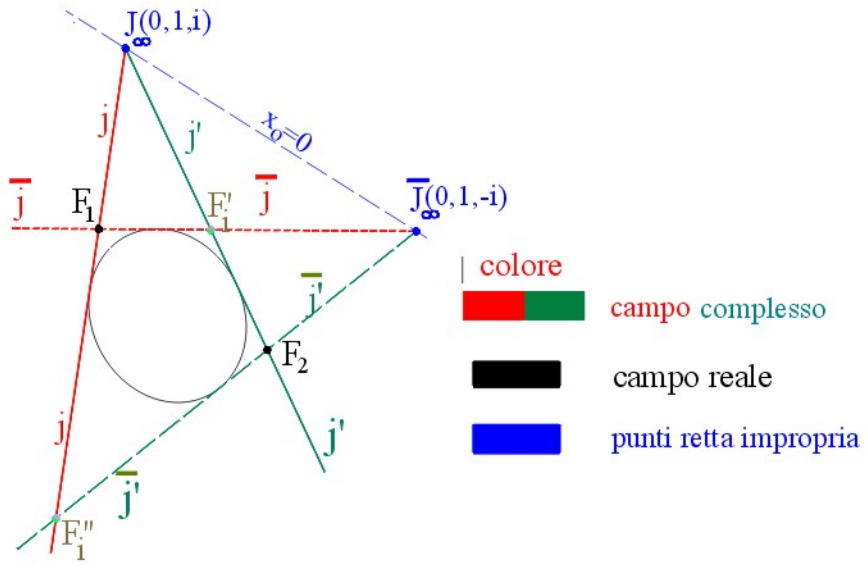
I punti impropri delle due rette isotrope corrispondenti a quelli della circonferenza sono i punti ciclici $J_\infty\,(0,1,i)$, $J_\infty\,(0,1,-i)$

4.3 Fuochi delle coniche

Coniche a centro

Ci riferiamo alla figura (4.3.1) concettuale, non reale, nella quale la conica, appartenente al campo reale è rappresentata con una curva chiusa (colore nero). Sono visualizzate, come se fossero reali, le rette isotrope, che appartengono al campo complesso, tangenti alla conica con colori rosso e verde e spiccate dai punti ciclici $J_\infty(0,1,i)$, $J_\infty(0,1,-i)$, punti complessi coniugati posti sulla retta impropria, (colore bleu) che è in effetti all'infinito.

Fig.4.3.1



Consideriamo i punti ciclici $J_\infty(0,1,i)$, $J_\infty(0,1,-i)$. Dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$ sono tracciate le due rette isotrope tangenti alla conica: j (continua di colore rosso) e j' (tratteggiata di colore verde).

Dal punto ciclico $J_\infty(0,1,-i)$ sono tracciate le due rette isotrope tangenti alla conica, che risultano, ciascuna, coniugata con una delle due rette isotrope precedentemente tracciate: la retta $\bar{j}$ (tratteggiata di colore rosso) coniugata di j e la retta $\bar{j}'$ (tratteggiata di colore verde), coniugate di j'.

Le quattro rette isotrope tracciate dai punti ciclici, tangenti alla conica si incontrano in quattro punti detti **fuochi della conica**.

L'incontro tra due rette coniugate determinano un punto reale, e quindi un fuoco reale

L'incontro tra due rette non coniugate determinano un punto complesso e quindi un fuoco complesso.

Precisamente si ha:

Fuoco F_1

Fuoco reale**.** Punto di intersezione della retta isotropa j con la coniugata $\bar{j}$ (rosso con rosso)

$$F_1 = j \cap \bar{j}$$

Fuoco F_2

Fuoco reale**,** Punto di intersezione della retta isotropa j' con la coniugata $\overline{j}'$ (verde con verde)

$$F_1 = j' \cap \overline{j}'$$

Fuoco F’$_i$

Fuoco complesso**.** Punto di intersezione della retta isotropa j' con la coniugata $\overline{j}$ (verde con rosso)

$$F'_i = j' \cap \overline{j}$$

Fuoco F”$_i$

Fuoco complesso**.** Punto di intersezione della retta isotropa j con la coniugata $\overline{j}'$ (rosso con verde)

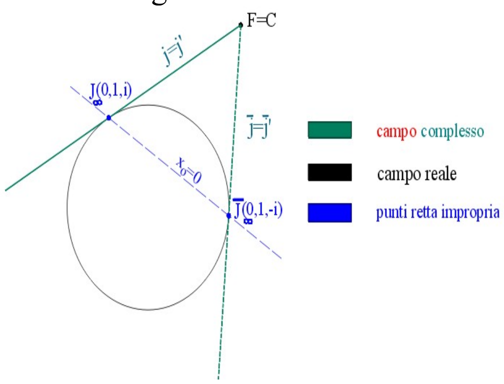
$$F''_i = j \cap \overline{j}'$$

Definizione

I fuochi di una conica sono i punti di intersezione della rette isotrope, tangenti alla conica, tracciate dai punti ciclici $J_\infty(0,1,i)$, $J_\infty(0,1,-i)$.
L’intersezione di due rette isotrope coniugate forniscono fuochi reale, l’intersezione tra due non coniugate forniscono fuochi complessi.
Si hanno due fuochi reale e due complessi coniugat.
Dato che le tangenti per i fuochi reali sono rette complesse e coniugate essi sono interni alla conica,, (non si possono condurre per essi rette reali tangenti alla conica)

Circonferenza

Fig.4.3.2



Nella circonferenza i punti ciclici $J_\infty(0,1,i)$, $J_\infty(0,1,-i)$ appartengono alla conica. Le due tangenti condotte per ognuno di essi alla circonferenza sono coincidenti.

Risulta:

$$j \equiv j' \quad \overline{j} \equiv \overline{j}'$$

Occorre notare che i punti ciclici sono sulla retta impropria e le tangenti in questi alla conica risultano polari di punti impropri e quindi diametri, la loro intersezione avviene al centro della conica

Inoltre la tangente $\bar{j} \equiv \bar{j}'$ per il punto ciclico $J_\infty(0,1,-i)$ è una retta complessa e coniugata a quella per il punto $J_\infty(0,1,i)$, così la loro intersezione determinano l'unico fuoco reale F coincidente con il centro C

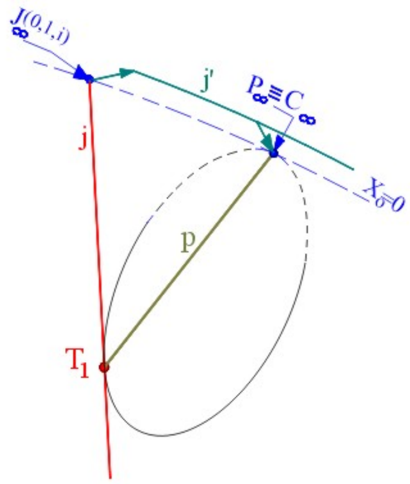
$$F \equiv C$$

Nella circonferenza si ha l'unico fuoco nel centro. Esso è interno alla circonferenza dato che le tangenti per essa sono rette complesse e coniugate (non si possono condurre per il centro rette reali tangenti alla conica)

Parabola

La conica è tangente alla retta impropria nel suo unico punto improprio P_∞, che risulta quindi polo della retta impropria a centro della conica $P_\infty \equiv C_\infty$. Ogni polare di punti impropri passano per $P_\infty \equiv C_\infty$.

Fig.4.3.3



Le tangenti condotte dal punto ciclico $J_\infty(0,1,i)$ congiungono i punti d'intersezione della sua polare p con la conica. La polare di un punto improprio , come detto, passa per $P_\infty \equiv C_\infty$.

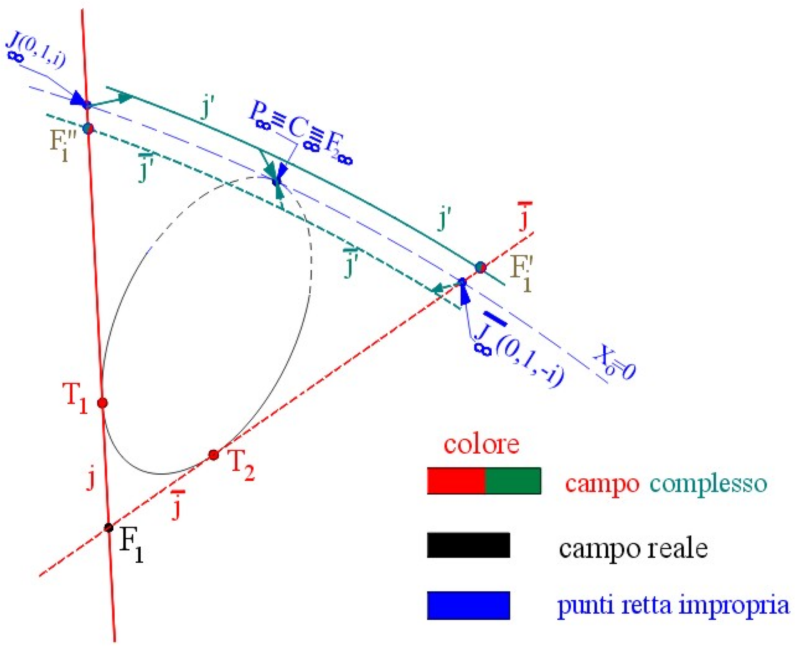
Ne viene che, una delle tangenti, j', condotta alla conica per $J_\infty(0,1,i)$, passa per $P_\infty \equiv C_\infty$, l'altra tangente j incontra la conica in un altro punto T_1.

Nella figura fig.4.3.3 la retta immaginaria j', tangente alla conica che passa per $P_\infty \equiv C_\infty$ è stata disegnata di colore verde, discosta dalla parte reale della retta impropria, per non confonderla con questa.

Per le stesse ragioni le tangenti condotte alla conica dal punto improprio $J_\infty(0,1,-i)$, risultano, una $\bar{j}'$ passante per il punto improprio $P_\infty \equiv C_\infty$ della conica e l'altra $\bar{j}$ tangente in un altro punto, fig. 4.3.4.

Queste due tangenti risultano complesse e coniugate delle precedenti, e rispettivamente: $\bar{j}$ complessa e coniugata di j ; $\bar{j}'$ complessa e coniugata di j'

fig.4.3.4



L’intersezione delle tangenti condotte da $J_\infty(0,1,i)$, $J_\infty(0,1,-i)$ determinano i fuochi della conica.

Da quanto esposto ne viene che, soltanto il fuoco F_1 è un punto reale proprio, intersezione delle rette complesse coniugate j e $\bar{j}$

Si ha:

Fuoco F₁

Fuoco reale**.** Punto di intersezione della retta isotropa j con la coniugata $\bar{j}$ (rosso con rosso)

$$F_1 = j \cap \bar{j}$$

Fuoco F₂

Fuoco reale sulla retta impropria**,** Punto di intersezione della retta isotropa j' con la coniugata $\bar{j}'$ (verde con verde)

$$F_1 = j' \cap \bar{j}'$$

Fuoco F’ᵢ

Fuoco complesso**.** Punto di intersezione della retta isotropa j' con la coniugata $\bar{j}$ (verde con rosso)

$$F'_i = j' \cap \bar{j}$$

Fuoco F”ᵢ

Fuoco complesso**.** Punto di intersezione della retta isotropa j con la coniugata $\bar{j}'$ (rosso con verde)

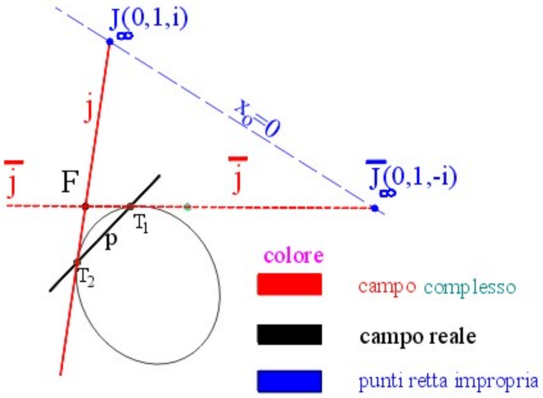
$$F''_i = j \cap \bar{j}'$$

Nella parabola vi è un unico fuoco reale. Dato che le tangenti per esso sono rette complesse e coniugate il fuoco è interno alla conica,, (non si possono condurre per esso rette reali tangenti alla conica)

4.4 Direttrici di una conica

Si definisce direttrice di una conica la polare p di un fuoco F.

Fig.4.3.5



I fuochi reali, che interessano, come si è rilevato, sono interni alla conica e le polari si ottengono tracciando da essi le tangenti $j, \bar{j}$ alla conica. Queste coincidono con le rette isotrope $j, \bar{j}$ complesse coniugate, passanti per i punti ciclici $J_\infty(0,1,i)$, $J_\infty(0,1,-i)$, che si intersecano nel punto reale costituente il fuoco F. I punti di tangenza T_1, T_2 sono punti complessi coniugati la cui retta di congiunzione p è reale e costituisce la polare del fuoco, definita *direttrice*

La figura fig.4.3.5, come le altre è una rappresentazione concettuale (*è rappresentato il non rappresentabile)*, ove il fuoco F è posto fuori della conica per poter raffigurare le tangenti $j, \bar{j}$ da esso alla conica, che sono complesse coniugate . Sono rappresentati in T_1, T_2 i punti di tangenza, complessi e coniugati, delle rette isotrope, e quindi la polare p costituente la direttrice relativa al fuoco F, che è in effetti è esterna alla conica (non la interseca in punti reali).

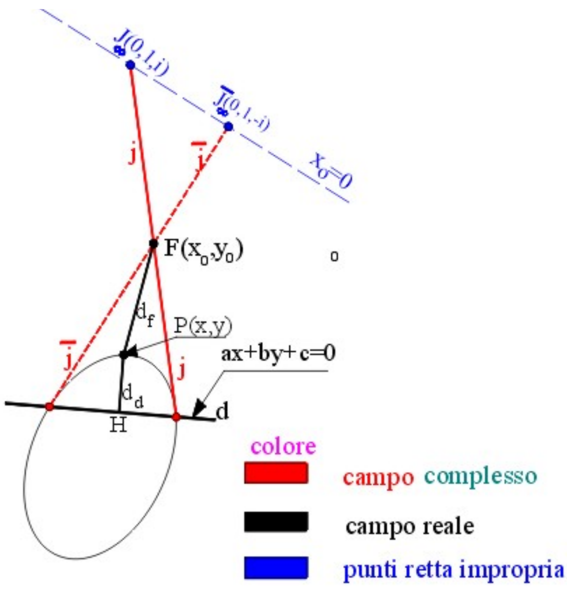
4.5 Eccentricità

Si definisce eccentricità "e" di una conica il rapporto tra la distanza d_f di un punto P di essa dal fuoco F e quella d_d dello stesso punto dalla direttrice d relativa a detto fuoco.

$$e = \frac{d_f}{d_d}$$

Ci si riferisca alla figura fig.4.3.6 concettuale, con il fuoco F esterno alla conica e la direttrice d intersecante la conica (in realtà in punti complessi coniugati).

Fig.4.3.6



Sia $F(x_0, y_o)$ i fuoco della conica in coordinate non omogenee x_0, y_0 e l'equazione della direttrice sia:

$$a x + b y + c = 0$$

La distanza $\overline{PF} = d_f$ del punto $P(x, y)$ della conica dal fuoco F è:

$$\overline{PF} = d_f = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

La distanza $\overline{PH} = d_d$ del punto $P(x, y)$ della conica dalla direttrice d è:

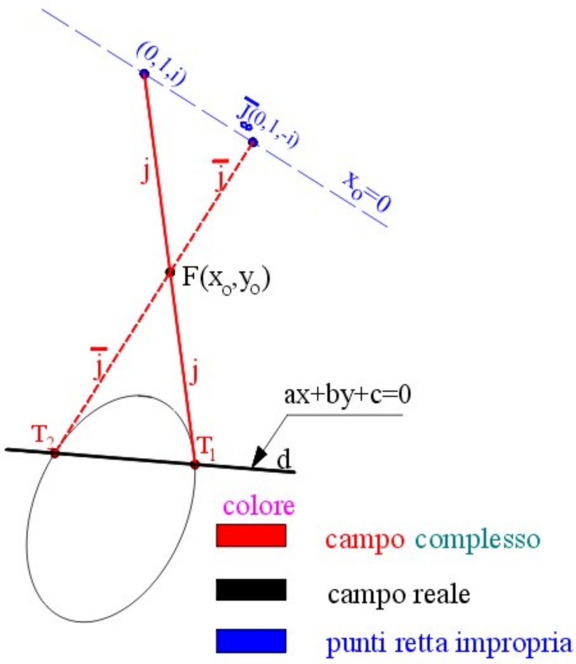
$$\overline{PH} = d_d = \left|\frac{a x + b y + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

L'equazione della eccentricità al variare del punto $P(x, y)$ della conica è:

$$e = \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\left|\frac{a x + b y + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|} \qquad (4.5.1)$$

4.6 Proprietà delle coniche con fuoco e direttrici assegnati

Il fuoco $F(x_0, y_o)$ è l'intersezione di due rette isotrope $j, \bar{j}$ complesse e coniugate tangenti alla conica in due punti complessi e coniugati T_1, T_2 la cui congiungente è la polare del fuoco, retta reale denominata direttrice d.
Osservando la rappresentazione concettuale di fig.4.3.7. ci si rende conto che, le due rette isotrope $j, \bar{j}$ tangenti alla conica in T_1, T_2 e la polare, direttrice d, passante per gli stessi due punti costituiscono un fascio di coniche degeneri.



Infatti.

- Le due rette isotrope , passanti per i quattro punti, a due a due coincidenti in T_1, T_2 costituiscono la conica degenere prodotto delle due rette:

$$j, \bar{j} = 0$$

- La direttrice d passa per gli stessi quattro punti, a due a due coincidenti in T_1, T_2, costituendo così la conica degenere prodotto della direttrice per sé stessa:

$$d^2 = 0$$

Il fascio di coniche degeneri può essere espresso dalla combinazione lineare:

$$j \cdot \bar{j} - k \cdot d^2 = 0$$

La retta isotropa j passa per il fuoco $F(x_0, y_o)$ e per il punto ciclico $J_\infty\,(0,1,i)$, avente quindi parametri direttori $\begin{cases} l = 1 \\ m = i \end{cases}$

$$j \equiv \quad \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{i}$$

$$j \equiv \quad y - y_0 - i \cdot (x - x_0) = 0$$

La retta isotropa $\bar{j}$ passa per il fuoco $F(x_0, y_o)$ e per il punto ciclico $J_\infty\,(0,1,-i)$, avente quindi parametri direttori $\begin{cases} l = 1 \\ m = -i \end{cases}$

$$j \equiv \quad \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{-i}$$

$$\bar{j} \equiv \quad y - y_0 + i \cdot (x - x_0) = 0$$

L'equazione della retta direttrice sia:

$$d \equiv \quad a\,x + b\,y + c = 0$$

l'equazione del fascio di coniche aventi fuoco $F(x_0, y_o)$ e direttrice $d \equiv$ in comune è:

$$[(y - y_0) - i \cdot (x - x_0)] \cdot [(y - y_0) + i \cdot (x - x_0)] - k \cdot (a\,x + b\,y + c)^2 = 0$$

$$\left[(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2\right] - k \cdot (a\,x + b\,y + c)^2 = 0 \qquad (4.6.1)$$

Al variare del valore della costante k *si hanno tutte le possibili coniche aventi lo stesso fuoco* $F(x_0, y_o)$ *e la stessa direttrice* d

$$k = \frac{(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2}{(a\,x + b\,y + c)^2} \qquad (4.6.2)$$

Sviluppando la (4.6.1)e considerando solo i termini di secondo grado in x, y si ha:

$$x^2 + y^2 - ka^2 x^2 - kb^2 y^2 - 2kabxy + ... = 0$$

ordinando si ha:

$$\left(1 - ka^2\right) \cdot x^2 + \left(1 - kb^2\right) \cdot y^2 - 2kab\,xy = 0 \qquad (4.6.3)$$

Proprietà affini del fascio - tipo di conica rispetto alla eccentricità e

Per individuare il tipo di conica si determina il discriminante α_{00}

$$\alpha_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$$

Dalla (4.6.2) si ha:

$$\alpha_{00} = \left(1 - ka^2\right)\left(1 - kb^2\right) - k^2a^2b^2 \qquad \alpha_{00} = 1 - kb^2 - ka^2 + k^2a^2b^2 - k^2a^2b^2$$

$$\alpha_{00} = 1 - k\left(a^2 + b^2\right) \qquad (4.6.4)$$

Il discriminante α_{00} può esprimersi rispetto al valore dell'eccentricità e

Consideriamo le due espressioni (4.5.1) dell'eccentricità e e la (4.6.2) della costante k del fascio di coniche aventi fuoco e direttrice in comune

$$\begin{cases} e = \dfrac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\left|\dfrac{a\,x + b\,y + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|} & (4.5.1) \\[2em] k = \dfrac{(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2}{(a\,x + b\,y + c)^2} & (4.6.2) \end{cases}$$

Eleviamo al quadrato l'espressione dell'eccentricità:

$$e^2 = \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\dfrac{(a\,x + b\,y + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$e^2 = \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(a\,x + b\,y + c)^2} \cdot (a^2 + b^2) \qquad (4.6.5)$$

sostituendo nella (4.6.5) l'espressione (4.6.2) di k si ha

$$e^2 = k \cdot (a^2 + b^2) \qquad (4.6.6)$$

Sostituendo la (4.6.6) nella (4.6.4) l'espressione del discriminante $\boldsymbol{a}_{00}$ rispetto all'eccentricità e risulta:

$$\boldsymbol{a}_{00} = 1 - e^2 \qquad (4.6.7)$$

Dalla (4.6.7) ne deriva che:

Il tipo di conica dipende dal valore dell'eccentricità e

Si ha:

a. $e < 1$ $\quad e^2 < 1$ $\quad \boldsymbol{a}_{00} > 0$ ELLISSE

b. $e > 1$ $\quad e^2 > 1$ $\quad \boldsymbol{a}_{00} < 0$ IPERBOLE

c. $e = 1$ $\quad e^2 = 1$ $\quad \boldsymbol{a}_{00} = 0$ PARABOLA

Avanti... Clic per continuare

Indietro... clic per precedente

Indietro... Clic per la pagina iniziale