Cilc per tutti gli appunti (AUTOMAZIONE – TRATTAMENTI TERMICI ACCIAIO – SCIENZA delle COSTRUZIONI…)

e-mail per suggerimenti

3 Le coniche $\mathscr{C}^2$ – proprietà affini

Si considerino le intersezioni di una conica con la retta impropria:

$$x_0 = 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad (3.0.1)$$

si ottiene

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \qquad (3.0.2)$$

Ciò che intessa per la individuazione del punto improprio è la determinazione del rapporto tra x_1 e x_2: $\frac{x_1}{x_2}$ con $x_2 \neq 0$ oppure $\frac{x_2}{x_1}$ con $x_1 \neq 0$. (il punto improprio $P_\infty(x_1, x_2, 0)$ è lo stesso punto $P_\infty(\rho x_1, \rho x_2, 0)$.

Supposto $x_2 \neq 0$, dividendo l'equazione (3.0.2) per x_2 si ottiene:

$$a_{11}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{x_2}{x_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x_1x_2}{x_2^2} = 0$$

$$a_{11}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x_1}{x_2} + a_{22} = 0 \qquad (3.0.3)$$

Si ha un'equazione di secondo grado nella variabile $\frac{x_1}{x_2}$ da cui si ricavano le coordinate del punto improprio di intersezione con la retta impropria, proporzionali al numeratore e denominatore del rapporto: $P_\infty(\rho x_1, \rho x_2, 0)$.

L'equazione ammette diverse soluzioni a seconda del discriminante Δ dell'equazione

Essendo il coefficiente del termine di primo grado espresso con numero pari si può utilizzare $\frac{\Delta}{4}$

$$\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} \qquad (3.0.4)$$

a seconda del segno di $\frac{\Delta}{4}$ si ha

$$\begin{cases} \frac{\Delta}{4} > 0 & \text{si hanno 2 soluzioni reali e distinte} \\ \frac{\Delta}{4} = 0 & \text{si hanno 2 soluzioni reali coincidenti} \\ \frac{\Delta}{4} < 0 & \text{si hanno 2 soluzioni complesse e coniugate} \end{cases} \qquad (3.0.4)$$

Usualmente, invece di utilizzare il discriminante $\frac{\Delta}{4}$ per l'analisi del tipo di soluzioni, e quindi del tipo di conica ci si riferisce al suo inverso $-\frac{\Delta}{4}$ che indicheremo con il simbolo $\boldsymbol{a}_{00}$

$$\boldsymbol{a}_{00} = -\frac{\Delta}{4}$$

$$\boldsymbol{a}_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$$

Si osserva che il discriminante $\boldsymbol{a}_{00}$ è il complemento algebrico di a_{00} della matrice caratteristica $\mathcal{A}$ delle conica.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

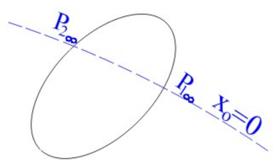
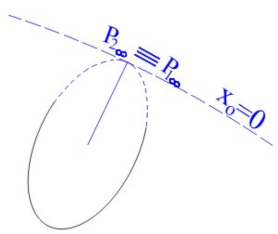
$$\boldsymbol{a}_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = -\frac{\Delta}{4}$$

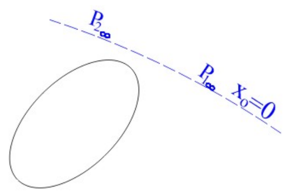
Tenendo conto delle (3.0.4), riguardo al tipo di intersezione della conica con la retta impropria, si hanno diversi casi a seconda del segno del discriminante $\boldsymbol{a}_{00}$ (opposti a quelli di $-\frac{\Delta}{4}$).

Si distinguono tre diversi tipi di coniche a seconda dei suoi punti di intersezioni con la retta impropria.

Nelle schematizzazioni, qui, la retta impropria viene rappresentata con un arco tratteggiato, raffigurante tutte le direzioni del piano all'infinito; la conica generica è raffigurata da una curva chiusa. La congiunzione dei due punti coniugati di intersezione nell'ellisse danno la retta impropria.

Ciò premesso si ha:

segno $\frac{\Delta}{4}$	Segno $\boldsymbol{a}_{00}$		Tipo di conica
$\frac{\Delta}{4} > 0$	$\boldsymbol{a}_{00} < 0$		***Iperbole*** Due soluzioni reali e distinte Due punti di intersezioni reali e distinti della conica con la retta impropria
$\frac{\Delta}{4} = 0$	$\boldsymbol{a}_{00} = 0$		***Parabola*** Due soluzioni reali e coincidenti Due punti di intersezioni reali e distinti della conica con la retta impropria. La parabola è tangente alla retta impropria

$\frac{\Delta}{4} < 0$	$a_{00} > 0$	 **Ellisse** Due soluzioni complesse coniugate La conica non interseca la retta impropria: si hanno due punti di intersezione complessi e coniugati

Si hanno tre tipi di coniche a seconda della intersezione di esse con la retta impropria e quindi a seconda della loro reciproca posizione.

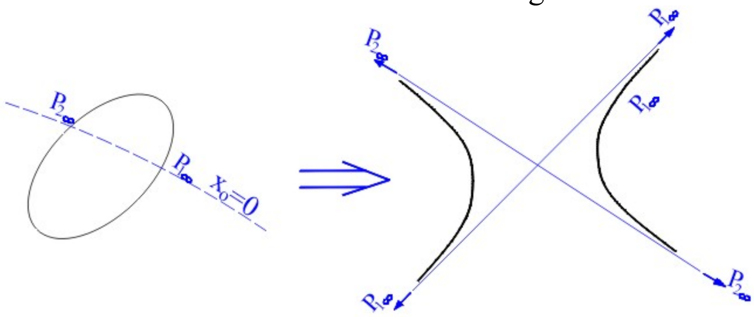
Il tipo di intersezione, e quindi di posizione reciproca conica-retta impropria , è rilevato dal segno del discriminante a_{00} .

Iperbole

Si ha:

$$a_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 < 0$$

Fig.3.0.1



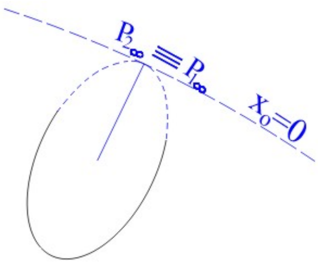
La conica interseca la retta impropria in due punti reali e distinti $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$. La curva così, in effetti, si sdoppia in due curve che si ricongiungono all'infinito nei due punti impropri $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$: $P_{1\infty}$ con $P_{1\infty}$ sullo stesso ramo e $P_{2\infty}$ con $P_{2\infty}$ sull'altro ramo.

Parabola

Si ha:

$$a_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

Fig.3.0.2



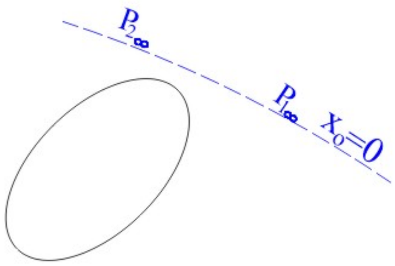
La conica ha due punti di intersezione coincidenti con la retta impropria $P_{1\infty} \equiv P_{2\infty}$: è tangente alla retta impropria. La curva è composta da due rami che partendo da un vertice, via, via, diminuiscono la loro divergenza, tendendo ad essere paralleli, ricongiungendosi, così, nel punto improprio $P_{1\infty} \equiv P_{2\infty}$ di tangenza con la retta impropria. (*metterci un po' di fantasia*)

Ellisse

Si ha:

$$\alpha_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

Fig.3.0.3



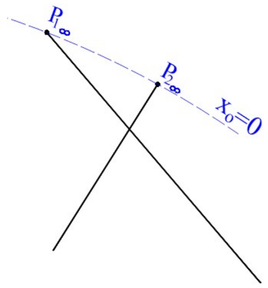
La conica ha due punti di intersezione complessi coniugati con la retta impropria.Essa non interseca la retta impropria nel piano reale. I due punti di intersezione complessi coniugati del tipo $P_{1\infty}\left(0, x_1, jx_2\right)$, $P_{1\infty}\left(0, x_1, -jx_2\right)$ hanno come retta di congiunzione la retta reale corrispondente alla retta impropria $x_0 = 0$

Coniche degeneri

Si hanno quando il determinante della matrice caratteristica è nullo. In tal caso l'equazione della conica si traduce nel prodotto di due rette reali o complesse coniugate. Le due rette, a seconda del segno del discriminante α_{00} possono essere:

Per α_{00} <0

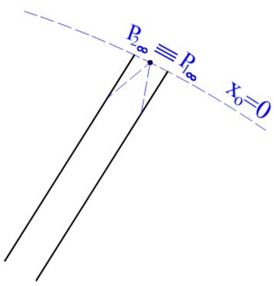
Fig.3.0.4



La conica degenere ha due punti impropri $P_{1\infty}$, $P_{2\infty}$ distinti.
Ciò vuol dire che le due rette , componenti la conica, intersecano la retta impropria ciascuna in un punto improprio diverso. Sono rette incidenti in un punto reale al finito

Per α_{00} =0

fig.3.0.5



La conica degenere ha due punti di intersezione coincidenti sulla retta impropria $P_{1\infty} \equiv P_{2\infty}$. Ciò vuol dire che le due rette , componenti la conica, sono parallele e si incontrano nel loro punto improprio comune sulla retta impropria, (*corrispondente alla stessa direzione*).

Per α_{00} <0

La conica ha il determinante della matrice caratteristica nullo. Interseca la retta impropria i due punti complessi e coniugati. L'equazione della conica si sdoppia nel prodotto di due rette complesse e coniugate.

3.1 Diametri e centro di una conica

Diametro di una conica

Si definisce retta diametrale di una conica (diametro), la polare di un punto improprio. Indicato con $P_\infty\left(0,l,m\right)$ un punto sulla retta impropria $x_0 = 0$, il diametro, polare di tale punto è:

$$X_{-1} \cdot \mathcal{A} \cdot X_\infty = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ m \end{pmatrix} = 0$$

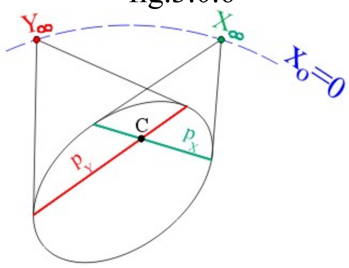
$$\left(a_{01} \cdot l + a_{02} \cdot m\right) \cdot x_0 + \left(a_{11} \cdot l + a_{12} \cdot m\right) \cdot x_1 + \left(a_{21} \cdot l + a_{22} \cdot m\right) \cdot x_2 = 0 \qquad (3.1.1)$$

con $a_{12} = a_{21}$

Centro di una conica

Si definisce centro di una conica il polo delle retta impropria.

fig.3.0.6



Al variare del punto P_∞ sulla retta impropria le rispettive polari dei punti descrivono un fascio di diametri passanti tutti per il centro (polo della retta impropria).

Per trovare il centro C di una conica basta determinare l'intersezione di due diametri, ottenuti eseguendo le polari p_X, p_Y di due punti impropri.

Per semplicità si possono scegliere, come diametri le polari dei punti impropri degli assi.

----------o----------

Ricordiamo che il punto improprio di una retta $ax + by + c = 0$ è:

$R_\infty\left(0,b,-a\right)$ oppure $R_\infty\left(0,1,-\dfrac{a}{b}\right)$ posto $-\dfrac{a}{b} = m$ $R_\infty\left(0,1,-m\right)$

----------o----------

Asse y

Equazione x=0 punto improprio $Y_\infty\left(0,0,-1\right)$ dividendo per -1 $Y_\infty\left(0,0,1\right)$.

Asse x

Equazione $y = 0$ punto improprio $X_\infty\left(0,1,0\right)$

Diametro dato dalla polare del punto improprio $X_\infty\left(0,0,1\right)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

con $a_{10} = a_{01} \qquad a_{20} = a_{02} \qquad a_{12} = a_{21}$

si ha

$$a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \qquad (3.1.2)$$

In coordinate non omogenee si ha

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \qquad (3.1.3)$$

Diametro dato dalla polare del punto improprio $Y_\infty\,(0,1,0)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

con $a_{10} = a_{01} \qquad a_{20} = a_{02} \qquad a_{12} = a_{21}$

si ha

$$a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \qquad (3.1.4)$$

In coordinate non omogenee si ha

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \qquad (3.1.5)$$

Il centro in coordinate non omogenee si può ottenere dalla soluzione del sistema:

con $a_{12} = a_{21}$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases} \qquad (3.1.6)$$

Le soluzioni del sistema dipende dal segno algebrico del determinante Δ_d della matrice dei coefficienti delle incognite.

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$$

Il determinante Δ_d coincide con il discriminante $\boldsymbol{a}_{00}$ dal cui segno algebrico è determinato il tipo di conica:

$$\boldsymbol{a}_{00} = \Delta_d$$

Se ne deduce che:

a. il sistema (3.1.6) ammette soluzioni quando il determinante $\Delta_d = \boldsymbol{a}_{00}$ non è nullo

$$\Delta_d = \boldsymbol{a}_{00} \neq 0$$

in tal caso le rette diametrali si incontrano in un punto proprio determinante il centro C.
Da quanto su esposto, si ha $\boldsymbol{a}_{00} \neq 0$ nelle iperbole ed ellissi.
Si ha quindi che, le coniche iperbole ed ellissi hanno un centro proprio ove si incontrano tutti i diametri, che sono polari di punti impropri

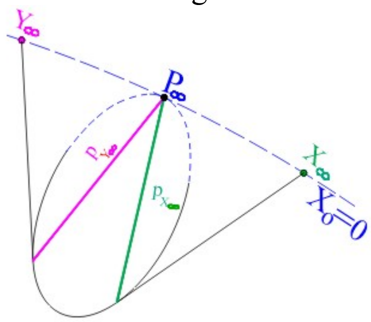
b. Il sistema lineare (3.1.6) non ammette soluzioni quando il determinante $\Delta_d = \boldsymbol{a}_{00}$ è nullo.

$$\Delta_d = \boldsymbol{a}_{00} = 0$$

In tal caso le rette diametrali sono parallele e si incontrano all'infinito nel loro punto improprio che ne costituisce il centro C della conica.

Da quanto su esposto, risulta $a_{00} = 0$ nelle parabole, che sono coniche tangenti alla retta impropria in un punto P_∞

fig.3.0.7



Si osservi che la polare di un punto improprio come X_∞ si ottiene, come per gli altri punti, tracciando le tangenti alla conica. La polare è la congiungente i punti di tangenza, ma una tangente alla conica per X_∞ è la retta impropria, e P_∞ è già un punto di tangenza alla conica, tracciata da qualsiasi punto improprio. Ne viene che tutte le rette diametrali passano per il punto improprio P_∞ della parabola di tangenza alla retta impropria

*Le parabole hanno il centro C_∞ nel loro punto improprio P_∞ di tangenza con la retta impropria. Tutte le rette diametrali si incontrano nel centro, corrispondente al punto improprio della conica e quindi: i **diametri sono paralleli tra loro**.*

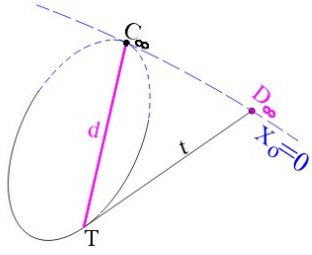
(ovviamente nella raffigurazione concettuale di fig.3.0.7 i diametri p_{Y_∞}, p_{X_∞} sono rappresentati convergenti in P_∞ rappresentato, per visualizzarlo, in un punto proprio: occorre, in realtà,considerarlo all'infinito insieme alla retta impropria $x_0 = 0$ a cui appartiene)

$$\Delta_d = a_{00} = 0$$

3.1.1 Proprietà sul centro e sui diametri

- Il centro di una conica è il polo della retta impropria
- I diametri sono polari di punti impropri
- Il polo di un diametro è un punto improprio e quindi giacente sulla retta impropria
- Tutti i diametri di una conica si incontrano nel centro
- Nella parabola il centro coincide con il suo punto improprio e quindi tutti i diametri si congiungono in questo, risultando così paralleli.

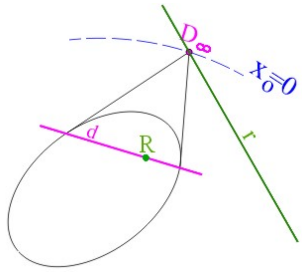
fig.3.1.1



Nella costruzione di un diametro, polare di un punto improprio D_∞ , una delle tangenti alla parabola è la retta impropria $x_0 = 0$ che ha il punto di tangenza corrispondente al suo punto improprio C_∞ ; basta quindi tracciare un'altra tangente t alla parabola dal punto D_∞ . Il diametro d è la retta congiungente il punto di tangenza T , della tangente t alla conica, con il punto improprio C_∞ della parabola

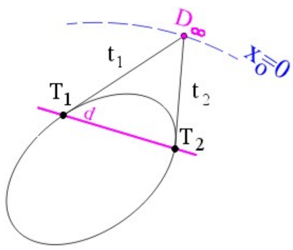
- Retta coniugata rispetto ad un diametro

fig.3.1.2



Una retta r si dice coniugata di un diametro d rispetto alla conica quando passa per polo D_∞ di tale diametro. Si ha che, se la retta r passa per il polo D_∞ del diametro d allora il polo R delle retta r è sul diametro .Una retta passa per il olo dell'altra

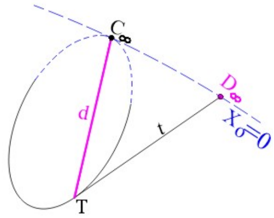
- fig.3.1.3



Le tangenti alla conica nei punti di intersezione T_1, T_2 con una sua retta diametrale d sono parallele tra loro. Infatti tali rette t_1, t_2 passano per il polo D_∞ del diametro d che è un punto improprio.

- fig.3.1.4

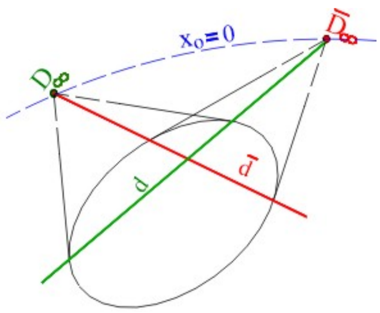
Nella parabola, una delle tangenti alla conica spiccate dal polo D_∞ di un diametro d è la retta impropria che ha il punto di tangenza sul punto improprio C_∞ della parabola. L'altra tangente è propria che ha il punto di tangenza sull'altra intersezione del diametro con la conica



3.1.2 Diametri coniugati

Due diametri si dicono coniugati quando uno, passa per il polo dell'altro (entrambi giacenti sulla retta impropria.

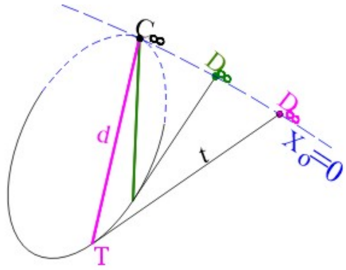
Fig.1.3.5



Sia D_∞ il punto improprio, polo del diametro d, questo incontra la retta impropria $x_0 = 0$ in un punto improprio $\overline{D_\infty}$ che è polo di una altro diametro $\overline{d}$. Questo passa per il polo D_∞ di d, in quanto $\overline{D_\infty}$ appartiene a d.

I diametri d e $\overline{d}$ sono coniugati in quanto uno è la polare del punto improprio dell'altro.

Fig.3.1.6

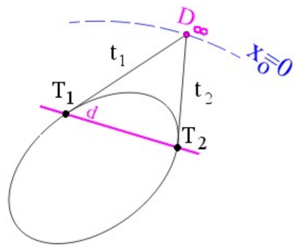


Nel caso della parabola, qualunque sia il punto improprio D_∞, nella costruzione del diametro corrispondente, una delle tangenti è sempre la retta impropria che incontra la conica nel suo unico punto improprio C_∞ (centro della parabola).

L'altra tangente t è propria e incontra la parabola in un punto proprio T. Un diametro d, polare di qualsiasi punto improprio D_∞ è la congiungente $\overline{TC_\infty}$ e passa sempre per il centro C_∞ della parabola.
Nella parabola tutti i diametri sono coniugati con la retta impropria e paralleli tra loro, passando tutti per il centro C_∞ punto *improprio della conica.*

3.1.3 Costruzione di diametri coniugati

Fig.3.1.7

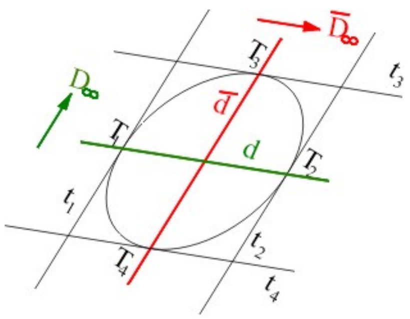


Occorre osservare, come già su esposto, che nella rappresentazione schematica delle tangenti t_1, t_2 ad una conica, spiccate dal punto improprio D_∞ rappresentato in figura, esse sono disegnate divergenti dal punto, essendo questo posto, per visualizzarlo, al finito e non all'infinito.

In realtà essendo, D_∞ un punto improprio all'infinito, *le due tangenti alla conica, spiccate da esso, sono tra loro parallele. La retta impropria è rappresentata come un arco di cerchio posto all'infinto che abbraccia tutte le direzioni.*

Con le suddette osservazioni si possono disegnare i diametri coniugati nella seguente maniera.

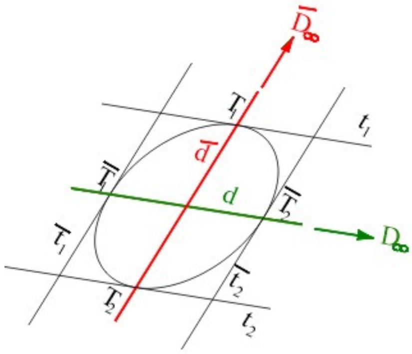
Fig.3.1.8



Data una direzione D_∞ corrispondente al punto improprio di un diametro d, si conducono le tangenti t_1, t_2 alla conica parallele a tale direzione. La retta diametrale d, con polo D_∞ è la congiungente i punti di tangenza T_1, T_2.

Si ha ora la direzione del diametro d, corrispondente al suo punto improprio. Questo è preso come polo $\overline{D}_\infty$ per il diametro $\overline{d}$ coniugato di d. Si conducono così le tangenti t_3, t_4 alla conica parallele al diametro d. Il diametro $\overline{d}$ coniugato di d è la congiungente T_3, T_4 di dette tangenti.

Fig.3.1.9



Supponiamo invece di avere inizialmente un diametro d e si debba disegnare il suo diametro coniugato.

Si conducono la tangenti t_1, t_2 alla conica, parallele al diametro d, passanti quindi per il suo punto improprio D_∞, assunto come polo del diametro coniugato. La retta congiungente punti di tangenza T_1, T_2 costituisce il diametro coniugato $\overline{d}$ del diametro d.

3.1.4 Centro della parabola

Il centro della parabola coincide con il suo punto improprio di tangenza alla retta impropria. Basta quindi intersecare la parabola con la retta impropria

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

si ha

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

dividendo per x_2

$$a_{11}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x_1}{x_2} + a_{22} = 0 \qquad (3.1.7)$$

Si ha un'equazione di secondo grado

Nella parabola risulta

$$\mathcal{a}_{00} = -\frac{\Delta}{4} = 0$$

$$\mathcal{a}_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0 \qquad a_{11} \cdot a_{22} = a_{12}^2$$

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \qquad (3.1.8)$$

E quindi l'equazione ammette due soluzioni coincidenti, corrispondente al punto improprio, centro della parabola.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{\Delta / 4}}{a_{11}} \qquad \text{per} \qquad \frac{\Delta}{4} = 0$$

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{\rho \cdot a_{12}}{\rho \cdot a_{11}} \quad \text{con} \quad \rho \neq 0$$

per $\rho = 1$ le coordinate del centro possono essere espresse

$$C_\infty\left(0,-a_{12},a_{11}\right)$$

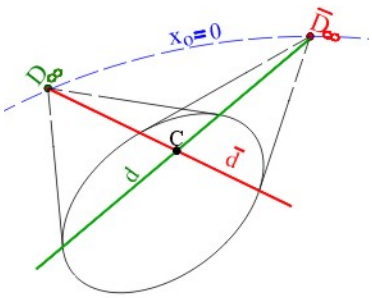
oppure per la (3.1.8)

$$C_\infty\left(0,-a_{22},a_{12}\right)$$

3.1.5 Condizione di coniugio tra due diametri

fig.1.3.10

Come su esposto nel punto 3.1.2 due diametri sono coniugati quando uno passa per il polo dell'altro.



Come riportato nella schematizzazione di fig.1.3.10, il punto improprio del diametro d funge da polo $\overline{D}_\infty$ del diametro coniugato $\overline{d}$; così il punto improprio di questo è il polo D_∞ del diametro d. L'incontro dei due diametri determinano il centro C della conica.

Data la conica.

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{01}x+2a_{02}y+a_{00}=0$$

Sia $C\left(x_0,y_0\right)$ il suo centro in coordinate non omogenee

L'equazione di un diametro d, retta passante per il centro è del tipo:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \quad \text{da cui} \quad \frac{x-x_0}{y-y_0}=\frac{l}{m}$$

dove l,m sono i parametri direttori della retta diametrale d, il cui punto improprio $\left(0,l,m\right)$ è preso come polo $\overline{D}_\infty$ della retta polare diametrale coniugata $\overline{d}$.

$$\text{Polo } \overline{D}_\infty\left(0,l,m\right)$$

Retta polare diametrale $\overline{d}$:

$$\overline{d}= \quad \left(x_0 \quad x_1 \quad x_2\right)\cdot\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ l\\ m\end{pmatrix}=0$$

$$\overline{d}= \quad \left(a_{01}\cdot l+a_{02}\cdot m\right)\cdot x_0+\left(a_{11}\cdot l+a_{12}\cdot m\right)\cdot x_1+\left(a_{21}\cdot l+a_{22}\cdot m\right)\cdot x_2=0$$

in coordinate non omogenee, dividendo per x_2 e ricordando che $a_{21}=a_{12}$ si ha:

$$\overline{d}= \quad \left(a_{11}\cdot l+a_{12}\cdot m\right)x+\left(a_{12}\cdot l+a_{22}\cdot m\right)y+\left(a_{01}\cdot l+a_{02}\cdot m\right)=0$$

I parametri direttori di $\overline{d}$ sono:

$$\begin{cases}\overline{l}=\rho\cdot\left(a_{12}\cdot l+a_{22}\cdot m\right)\\ \overline{m}=-\rho\cdot\left(a_{11}\cdot l+a_{12}\cdot m\right)\end{cases} \qquad (3.1.9)$$

Il rapporto tra i due parametri è:

$$\frac{\overline{l}}{\overline{m}}=-\frac{\left(a_{12}\cdot l+a_{22}\cdot m\right)}{\left(a_{11}\cdot l+a_{12}\cdot m\right)} \quad \text{da cui si ha:}$$

$$a_{11}\overline{l}\cdot l+a_{12}\overline{l}\cdot m+a_{12}l\cdot\overline{m}+a_{22}\overline{m}\cdot m=0$$

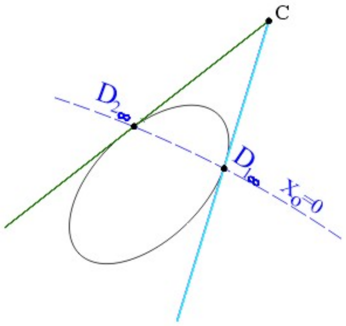
La condizione di coniugio tra due diametri d e $\overline{d}$ è espressa dalla seguente relazione tra i rispettivi parametri (l,m) di d e $(\overline{l},\overline{m})$ di $\overline{d}$:

$$a_{11}\overline{l}\cdot l + a_{12}\cdot\left(\overline{l}\cdot m + l\cdot\overline{m}\right) + a_{22}\overline{m}\cdot m = 0 \qquad (3.1.10)$$

3.1.6 Diametri autoconiugati – Asintoti – Condizione di autoconiugio

Un diametro d si dice autoconiugato quando coincide con il suo coniugato: il coniugato di d è d stesso.

Fig.1.3.11



Ciò vuol dire che il punto improprio di tale diametro d, impiegato come polo $\overline{D}_\infty$ determina una polare diametrale coniugata, coincidente con il diametro d stesso.

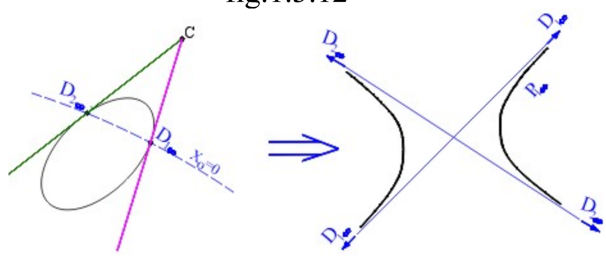
Come già precedentemente spiegato l'auto coniugio avviene nei punti di tangenza alla conica. Ne viene che:

Un diametro autoconiugato è tangente ad un punto improprio della conica ed è definito ***asintoto.***

Come noto una conica interseca la rette impropria in due punti impropri che possono essere:

a. punti impropri reali e distinti

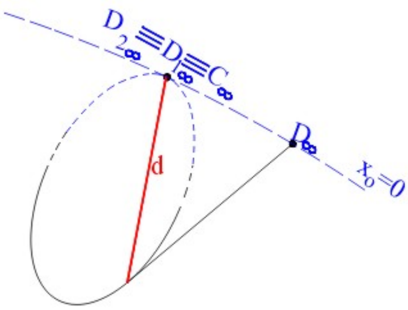
fig.1.3.12



La conica è una iperbole. Ammette due punti impropri reali e distinti e quindi due asintoti, rette tangenti in questi. Essendo gli asintoti dei diametri (polari dei punti impropri della conica) la loro intersezione avviene nel centro C, (punto reale proprio del piano)

b. Punti impropri coincidenti

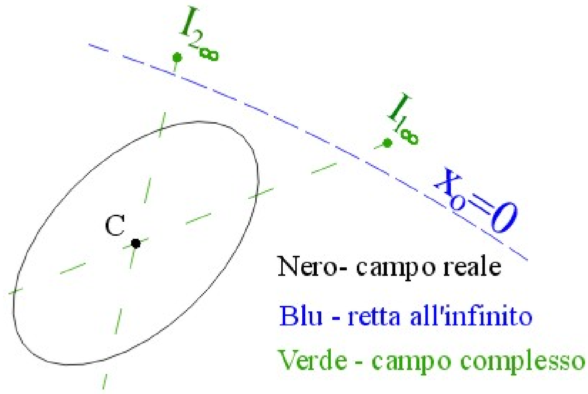
fig.3.1.13



La conica è una parabola. Ammette due punti impropri reali e coincidenti $D_{1\infty} \equiv D_{2\infty}$. Ciò vuol dire che tale punto improprio è un punto di tangenza della conica con la retta impropria che ne costituisce i due asintoti coincidenti. Il centro della parabola coincide con il suo punto improprio $D_{1\infty} \equiv D_{2\infty} \equiv C_\infty$. Ogni altro diametro d , (polare di un punto improprio D_∞) passa per il centro $D_{1\infty} \equiv D_{2\infty} \equiv C_\infty$ essendo esso polo della retta impropria

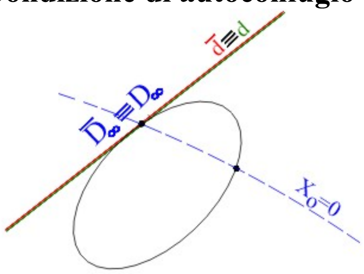
c. Punti impropri complessi coniugati

fig.3.1.14



La conica è un'ellisse. Ammette due punti impropri complessi coniugati $I_{1\infty}$, $I_{2\infty}$. Ciò vuol dire che la conica non interseca la retta impropria. Gli asintoti, tangenti alla conica nei punti impropri, sono due rette complesse coniugate che si intersecano nel centro C , punto reale proprio (*la rappresentazione schematica risulta un po' difficile: metteteci un po' di fantasia e immaginazione*)

Condizione di autoconiugio di un asintoto.



Essendo un asintoto un diametro d autoconiugato, vuol dire che il punto improprio $\bar{D}_\infty\left(0,\bar{l},\bar{m}\right)$ del diametro coniugato $\bar{d}$ coincide con quello $D_\infty\left(0,l,m\right)$ del diametro d stesso. Ciò vuol dire che coincidono i parametri direttori del diametro (asintoto) e del suo coniugato.

Sarà qiuindi:

$$\bar{l} = l \qquad \bar{m} = m \qquad (3.1.11)$$

Sostituendo le (3.1.11) nella relazione (3.1.10) di coniugio si ottiene quella di autoconiugio

$$a_{11}\cdot l^2 + a_{12}\left(l\cdot m + l\cdot m\right) + a_{22}\cdot m^2 = 0$$

$$a_{11}\cdot l^2 + 2a_{12}\cdot lm + a_{22}\cdot m^2 = 0 \qquad (3.1.12)$$

L'equazione (3.1.12) è un'equazione omogenea in l, m . Per le soluzioni conviene dividere per una delle due incognite diverse da zero. Supposto $m \neq 0$

$$a_{11} \cdot \left(\frac{l}{m} \right)^2 + 2a_{12} \cdot \frac{l}{m} + a_{22} = 0 \qquad (3.1.13)$$

L'equazione è di secondo grado e ammette diverse soluzioni

- Per $\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0$ ovvero $-\frac{\Delta}{4} = \alpha_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 < 0$
  Si hanno due soluzioni reali e distinte. La conica è una iperbole che possiede due punti impropri e quindi due asintoti reali e distinti

- Per $\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0 \quad \alpha_{00} = 0$
  Si hanno due soluzioni reali e coincidenti. La conica è una parabola che possiede due punti impropri reali e coincidenti. La conica ha come unico asintoto la retta impropria

- Per $\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$ ovvero $-\frac{\Delta}{4} = \alpha_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$
  Si hanno due soluzioni complesse coniugate. La conica è una ellisse che possiede due punti impropri complessi coniugati e quindi due asintoti complessi e coniugati, che si intersecano nel centro, punto reale proprio.

Equazione degli asintoti

L'equazione degli asintoti si possono specificare utilizzando il procedimento generale per la determinazione della tangente in un punto della conica. In questo caso nei suoi punti impropri.

- Intersecando la conica con la retta impropria $x_0 = 0$ si trovano i suoi punti impropri

- Si determinano le tangenti nei punti impropri eseguendo le polari di essi

Conoscendo il centro, in coordinate non omogenee $C(x_0, y_0)$ si può dare una equazione complessiva dell'equazione dei due asintoti.

La retta generica per il centro ha equazione

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \qquad \text{da cui} \qquad \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{l}{m}$$

sostituendo nella relazione (3.1.13) di autoconiugio si ha:

$$a_{11} \cdot \left(\frac{x - x_0}{y - y_0} \right)^2 + 2a_{12} \cdot \frac{x - x_0}{y - y_0} + a_{22} = 0$$

Si ha una equazione di secondo grado rispetto a termine $\frac{x - x_0}{y - y_0}$ dalle due soluzioni di essa si hanno le due equazioni degli asintoti.

Esempio

Data la conica

$$x^2 + 24y^2 - 10xy + 8x - 2 = 0$$

Determinare

- *Il tipo di conica*
- *Il centro*
- *gli asintoti*

In coordinate omogenee l'equazione della conica è

$$x_1^2 + 24x_2^2 - 10x_1 \cdot x_2 + 8x_0 \cdot x_1 - 2x_0^2 = 0$$

***Matrice caratteristica**:*

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 24 \end{pmatrix}$$

Tipo di conica

$$\alpha_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 1 \cdot 24 - (-5)^2 = -1 < 0$$

La conica è una iperbole

Punti impropri

Si interseca la conica con la retta impropria

$$x_0 = 0$$

$$\begin{cases} x_1^2 + 24x_2^2 - 10x_1 \cdot x_2 + 8x_0 \cdot x_1 - 2x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$x_1^2 + 24x_2^2 - 10x_1 \cdot x_2 = 0$$

dividendo per x_2

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 - 10\frac{x_1}{x_2} + 24x = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 5^2 - 24 = 1 \qquad \text{(ovviamente } \alpha_{00} = -\frac{\Delta}{4} = -1\text{)}$$

si ha:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{5 \pm 1}{1} = \begin{cases} 4 \\ 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \rho \cdot 4 \\ x_2 = \rho \cdot 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \rho \cdot 6 \\ x_2 = \rho \cdot 1 \end{cases} \quad \text{con qualunque } \rho \neq 0$$

ponendo $\rho = 1$ *i due punti impropri sono*

$$A_{1\infty}(0,4,1) \qquad A_{1\infty}(0,6,1)$$

Asintoti

Gli asintoti sono le tangenti alla conica nei punti impropri $A_{1\infty}(0,4,1)$, $A_{1\infty}(0,6,1)$ *e quindi le polari di questi rispetto alla conica*

Polare di $A_{1\infty}(0,4,1)$ *- primo asintoto*

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$16x_0 + (4-5)x_1 + (-20+24)x_2 = 0$$
$$-x_1 + 4x_2 + 16x_0 = 0$$

in coordinate non omogenee, equazione dell'asintoto:

$$x - 4y - 16 = 0$$

Polare di $A_{1\infty}(0,6,1)$ *- primo asintoto*

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$24x_0 + (6-5)x_1 + (-30+24)x_2 = 0$$
$$x_1 - 64x_2 + 24x_0 = 0$$

in coordinate non omogenee, equazione dell'asintoto:

$$x - 6y + 24 = 0$$

Centro della conica

Gli asintoti sono rette diagonali che si incontrano nel centro, che quindi può essere determinato dalla loro intersezione.

$$\begin{cases} x - 4y = 16 \\ x - 6y = -24 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -2 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & -4 \\ -24 & -6 \end{vmatrix} = -192 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & -24 \end{vmatrix} = -40$$

coordinate del centro

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-192}{-2} = 96$$
$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-40}{-2} = 20$$

Centro $C(96,20)$

Esempio fascio di coniche

Determinare l'equazione dell'iperbole che soddisfa le seguenti condizioni

- *avente come asintoti le rette:*

$$a_1 \equiv \quad 3x - 4y = 0$$

$$a_2 \equiv \quad 3x + 2y = 0$$

- *passante per il punto* $P(2,0)$

----------o----------

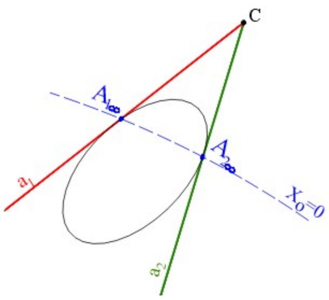
Le equazioni delle rette a_1, a_2 *in coordinate omogenee sono*

$$a_1 \equiv \quad 3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$a_2 \equiv \quad 3x_1 + 2x_2 = 0$$

Consideriamo la rappresentazione schematica di figura, ove la conica è disegnata con una linea chiusa, in modo da poter raffigurare i punti impropri $A_{1\infty}$, $A_{2\infty}$ *di intersezione con la retta impropria.*

Fig.3.1.16



I punti impropri $A_{1\infty}$, $A_{2\infty}$ *sono punti doppi di tangenza alla conica, ciascuno con una retta asintotica. Così le due rette asintotiche* a_1, a_2 *costituiscono una conica degenere avente 4 punti in comune con la conica da determinare, due per ciascuna retta.*
L'equazione della conica degenere è il prodotto delle equazioni delle due rette

$$(3x_1 - 2x_2 = 0) \cdot (3x_1 + 2x_2) = 0$$

La retta impropria interseca la conica da determinare nei punti doppi impropri $A_{1\infty}$, $A_{2\infty}$. *Così la retta impropria* $x_0 = 0$, *contata due volte, costituisce una conica degenere, avente 4 punti in comune con quella da determinare.*

L'equazione della conica degenere, in tal caso,è il prodotto dell'equazione della retta con se stessa

$$x_0^2 = 0$$

Si può quindi scrivere il fascio di coniche, aventi i 4 punti in comune con la conica da determinare

$$(3x_1 - 2x_2 = 0) \cdot (3x_1 + 2x_2) + \lambda x_0^2 = 0$$

Equazione del fascio

$$9x_1^2 - 4x_2^2 + \lambda x_0^2 = 0$$

In coordinate non omogenee

$$9x - 4y + \lambda = 0 \qquad (3.1.14)$$

Imponendo il passaggio per $P(2,0)$

$9 \cdot 2^2 - 4 \cdot 0 + \lambda = 0$ $\qquad$ $\lambda = -36$ *sostituendo nella (3.1.14)*

$9 \cdot x^2 - 4 \cdot y - 36 = 0$ $\qquad$ $9 \cdot x^2 - 4 \cdot y = 36$ *dividendo per 36*

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

3.1.7 **Equazioni canoniche delle coniche a centro**

Si assume il centro della conica nell'origine degli assi.

In coordinate omogenee il centro è:

$$C(1,0,0)$$

Per ottenere ciò basta imporre la condizione che le coordinate del centro $(1,0,0)$ soddisfino il sistema di equazioni delle intersezioni di due diametri qualsiasi, (polari di punti impropri).

Per semplicità, come già su esposto, conviene riferirsi ai due diametri, polari di punti impropri degli assi $X_\infty(0,1,0)$, $Y_\infty(0,0,1)$.

Le due polari, già determinate (3.1.2), (3.1.4) sono:

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

le due equazioni devono essere soddisfatte per le coordinate del centro $C(1,0,0)$. Si ottiene

$$\begin{cases} a_{10} \cdot 1 + 0 + 0 = 0 \\ a_{20} \cdot 1 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{10} = 0 \\ a_{20} = 0 \end{cases}$$

per cui l'equazione canonica della conica generica di una conica a centro diviene

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \qquad (3.1.15)$$

In coordinate non omogenee:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{00} = 0 \qquad (3.1.16)$$

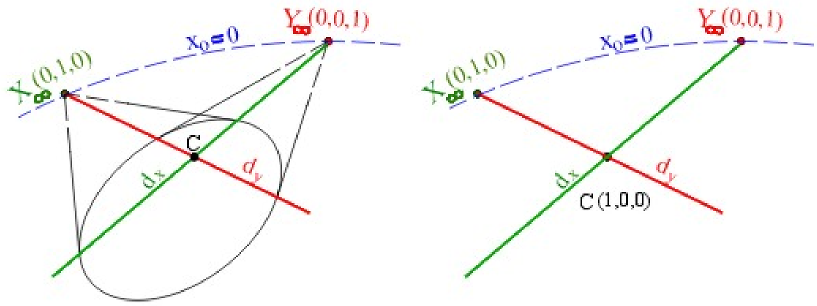
Mancano i termini di primo grado.

In tale conica il centro è all'origine degli assi che sono due diametri qualsiasi.

Coniche a centro con riferimento affine – assi x,y corrispondenti a diametri coniugati

Nel riferimento affine si assumono come assi x,y due diametro coniugati, per i quali: la polare del punto improprio dell'asse x, $X_\infty(0,1,0)$ è l'asse y, e la polare del punto improprio dell'asse y, $Y_\infty(0,0,1)$ è l'asse x. Il centro $C(1,0,0)$, appartenente ai due assi è il polo della retta impropria, contenente i due poli, $X_\infty(0,1,0)$, $Y_\infty(0,0,1)$.

Fig.3.1.17



I due assi x,y e la retta impropria costituiscono un triangolo autopolare, in cui un vertice è polo del lato opposto.

Imponiamo il coniugio tra i due assi x, y. Imponiamo cioè che le due direzioni degli assi $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ siano coniugate.

1° direzione $(0,l,m) = (0,1,0)$

2° direzione $(0,\bar{l},\bar{m}) = (0,0,1)$

sostituendo le direzioni degli assi nella condizione di coniugio (3.1.10)

$$a_{11}\bar{l}\cdot l + a_{12}\cdot(\bar{l}\cdot m + l\cdot\bar{m}) + a_{22}\bar{m}\cdot m = 0$$

si ha:

$$a_{11}0\cdot 1 + a_{12}\cdot(0\cdot 0 + 1\cdot 1) + a_{22}1\cdot 0 = 0$$

$$a_{12} = 0$$

L'equazione canonica con centro negli assi x_1, x_2 coniugati è:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{00}x_0^2 = 0 \qquad (3.1.17)$$

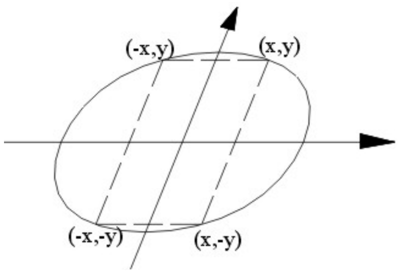
in coordinate non omogenee:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{00} = 0 \qquad (3.1.18)$$

Mancano i termini di primo grado e il prodotto delle due variabili $x\cdot y$

Proprietà delle coniche a centro con assi coniugati

Fig.3.1.18



Le coniche a centro con assi coniugati ammettono simmetria obliqua rispetto agli assi x, y. Infatti, (vedi figura), appartengono alla conica i punti:

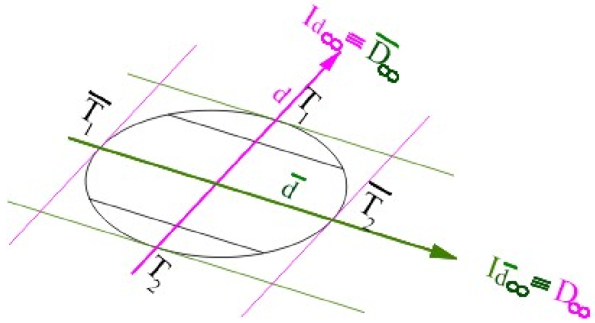
(x, y) - $(-x, y)$ - $(-x,-y)$ - $(x,-y)$

Avendo assunto come assi due diametri coniugati qualsiasi si ha che:

Una conica a centro ammette simmetria obliqua rispetto a qualunque diametro nella direzione del suo diametro coniugato.

Così considerato un diametro d (retta per il centro), il suo diametro coniugato $\bar{d}$ è la polare del punto improprio $I_{d\infty}$ di d : si assume il punto improprio $I_{d\infty}$ come polo $\bar{D}_\infty$ della polare $\bar{d}$. Questa si ottiene tracciando le tangenti dal polo $\bar{I}_{d\infty} \equiv \bar{D}_\infty$ (che sono quindi parallele tra loro e al diametro d) e congiungendo i punti di tangenza $\bar{T}_1, \bar{T}_2$

Fog.3.1.19



Così reciprocamente il diametro d è la polare del punto improprio $\overline{I}_{\overline{d}\infty} \equiv D_\infty$ di $\overline{d}$, e si ottiene conducendo le tangenti alla conica parallele al diametro $\overline{d}$ e congiungendo i punti di tangenza T_1, T_2

Si ha una simmetria obliqua rispetto al diametro d nella direzione del suo diametro coniugato $\overline{d}$.

Tutte le corde parallele ad un diametro sono bisecate dal diametro coniugato

3.1.8 Tipi di coniche a centro con assi di riferimento due diametri coniugati

L'equazione canonica di una conica generica a centro, avendo scelto gli assi di riferimento con due diametri coniugati, è data dalla espressione (1.3.17) determinata nel precedente punto. In coordinate omogenee è:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{00}x_0^2 = 0 \qquad (3.1.17)$$

La matrice caratteristica è

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{00} \cdot a_{11} \cdot a_{22}$$

Se risulta $\Delta = 0$ la conica è degenere. Ciò avviene quando almeno uno dei tre coefficienti è nullo.

Così, per esempio, la seguente conica con $a_{11} = 0$

$$5x_{22}^2 - 3x_{00}^2 = 0 \qquad 5y^2 - 3 = 0$$

Si può sdoppiare in

$$\left(\sqrt{5} \cdot y + \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{5} \cdot y - \sqrt{3}\right) = 0$$

è una conica degenere prodotto di due rette parallele all'esse x

Consideriamo l'equazione (1.3.17) della conica a centro generale con $\Delta \neq 0$

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{00}x_0^2 = 0 \quad \text{si ha}$$

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = -a_{00}x_0^2$$

dividendo tutto per $-a_{00}x_{00}^2$ si passa in coordinate non omogenee

$$-\frac{a_{11}}{a_{00}}\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2-\frac{a_{22}}{a_{00}}\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2=0 \quad \text{si pone}$$

$$\begin{cases}\dfrac{a_{11}}{a_{00}}=\alpha\\[2mm]\dfrac{a_{22}}{a_{00}}=\beta\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_0}=x\\[2mm]\dfrac{x_2}{x_0}=y\end{cases}$$

si ha:

$$\alpha\cdot x^2+\beta\cdot y^2=1 \qquad (3.1.19)$$

L'equazione (1.3.19) l'espressione generale di una conica a centro, avente come assi due diametri coniugati, Si hanno diversi tipi di coniche a seconda del segno dei due coefficienti α,β

a. coefficienti α,β entrambi positivi $\alpha>0$ e $\beta>0$
   allora si può porre

$$\alpha=\frac{1}{a^2}\qquad\qquad\beta=\frac{1}{b^2}$$

   Si può scrivere la conica a centro nella forma

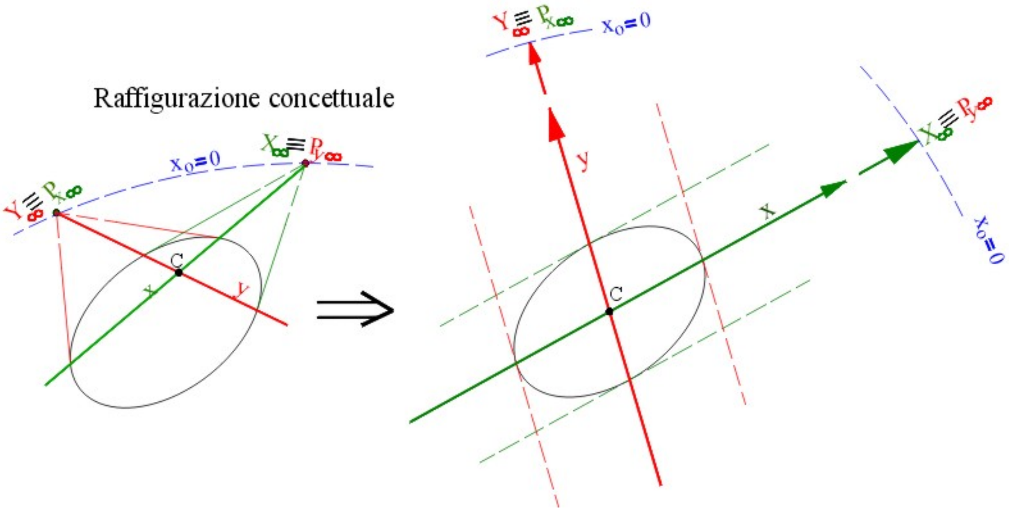
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3.1.20)$$

Tipo di conica $\quad \boldsymbol{a}_{00}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2 \quad \begin{cases}a_{11}=\dfrac{1}{a^2}\\[2mm]a_{22}=\dfrac{1}{b^2}\\[2mm]a_{12}=0\end{cases}$

$$\boldsymbol{a}_{00}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}>0$$

La conica non ha punti di intersezione con la retta impropria ed è un'ellisse

fig.3.1.20



La retta impropria $x_0 = 0$ è esterna alla conica. I punti impropri degli assi, sono quindi esterni alla conica; uno è il polo che ha come polare l'altro asse. Così il punto improprio X_∞ dell'asse x è utilizzato come polo $P_{y\infty}$ della polare costituente l'asse x e viceversa. Un asse si può ottenere tracciando, dal punto improprio dell'altro asse, le tangenti alla conica (che risultano parallele tra loro) e congiungendo i punti di tangenza. Il centro, congiungente gli assi (diametri coniugati) è interno alla conica

Così $3x^2 + 7y^2 = 6$ $\qquad \dfrac{3x^2}{6} + \dfrac{7y^2}{6} = 1 \qquad \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{\frac{6}{7}} = 1$

$$\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{y^2}{\sqrt{\frac{6}{7}}} = 1 \qquad \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \sqrt{\frac{6}{7}} \end{cases}$$

b. Coefficienti α, β entrambi negativi $\alpha < 0$ e $\beta < 0$
Si può porre

$$\alpha = -\frac{1}{a^2} \qquad \alpha = -\frac{1}{b^2}$$

$$\frac{x^2}{-a^2} + \frac{y^2}{-b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (3.1.21)$$

$$\boldsymbol{a}_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} > 0$$

La conica è un'ellisse a punti complessi

c. Coefficienti α, β con segni opposti $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ oppure $\alpha < 0$ e $\beta > 0$
consideriamo $\alpha > 0$ e $\beta < 0$

si può porre $\qquad \alpha = \dfrac{1}{a^2} > 0 \qquad \alpha = -\dfrac{1}{b^2} < 0$

si ha $\qquad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3.1.22)$

risulta $\qquad \boldsymbol{a}_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = \dfrac{1}{a^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{b^2}\right) < 0$

La conica ha due punti impropri. È una iperbole

Asintoti dell'iperbole a centro con assi di riferimento coniugati

Considerata l'equazione canonica, si determinano gli asintoti con il procedimento già utilizzato nel precedente esempio.

Equazione canonica iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

in coordinate omogenee

$$b^2x_1^2 - a^2x_2^2 - a^2b^2x_0^2 = 0$$

Matrice caratteristica

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$$

Intersezione con la retta impropria, punti impropri dell'iperbole:

$$\begin{cases} b^2x_1^2 - a^2x_2^2 - a^2b^2x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

si ha:

$$b^2x_1^2 - a^2x_2^2 = 0 \qquad \text{dividendo per } x_2^2$$

$$b^2 \cdot \frac{x_1^2}{x_2^2} - a^2 = 0 \qquad \cdot \frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{a^2}{b^2} \qquad \text{da cui}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \pm \frac{a}{b} \qquad \text{si ha} \qquad \begin{cases} x_1 = \rho \cdot a \\ x_2 = \rho \cdot b \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \rho \cdot a \\ x_2 = -\rho \cdot b \end{cases} \qquad \text{con qualsiasi } \rho \neq 0$$

Punti impropri iperbole:

$$A_{1\infty}(0, \rho \cdot a, \rho \cdot b) \qquad \text{posto } \rho = 1$$

$A_{1\infty}(0,a,b)$

$$A_{2\infty}(0, \rho \cdot a, -\rho \cdot b) \qquad \text{posto } \rho = 1$$

$A_{2\infty}(0, a, -b)$

Asintoti

Gli asintoti dell'iperbole sono le polari dei suoi punti impropri

Polare di $A_{1\infty}(0,a,b)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$0 \cdot x_0 + b^2a \cdot x_1 - a^2b \cdot x_2 = 0 \qquad b^2a \cdot x_1 - a^2b \cdot x_2 = 0$$

dividendo per $a \cdot b$

$$b \cdot x_1 - a \cdot x_2 = 0 \qquad \text{in coordinate non omogenee}$$

$b \cdot x - a \cdot y = 0$

Asintoto

$$y = \frac{b}{a}x \qquad (3.1.23)$$

retta passante per l'origine

Eseguendo la polare di $A_{2\infty}(0,\ a,\ -\ b)$ si ha l'altro asintoto

$$y = -\frac{b}{a}x$$ retta simmetrica rispetto all'asse x della precedente

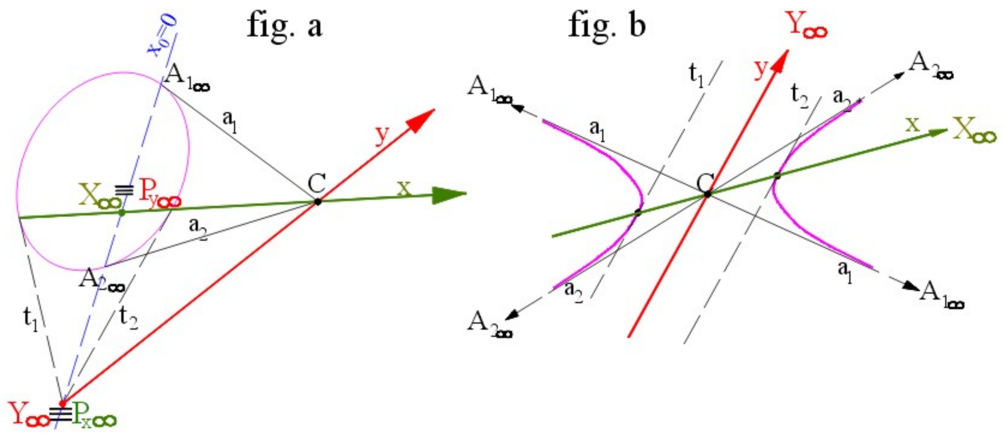
Tracciamento di due assi coniugati

Nella fig.a di figura (3.1.21) è riportata una rappresentazione concettuale della conica con una curva che si chiude nei punti impropri $A_{1\infty}$, $A_{2\infty}$ sulla retta impropria $x_0 = 0$. In realtà l'iperbole è spezzata in due rami, fig.b, che si ricongiungono all'infinito sulla retta impropria nei due suoi punti impropri $A_{1\infty}$, $A_{2\infty}$.

Gli asintoti sono le tangenti a_1, a_2 alla conica nei suoi punti impropri $A_{1\infty}$, $A_{2\infty}$. Essi si incontrano come tutti i diametri nel centro C , polo della retta impropria.

Le rette diametrali, comprese nella zona tra i due asintoti a_1, a_2 contenente la conica, interseca la retta impropria in punti interni alla conica stessa. Le altra rette diametrali hanno punti impropri esterni alla conica

fig.3.1.21



Dai punti impropri esterni alla conica si possono tracciare le tangenti ad essa per disegnare le polari. Ciò non è possibile dai punti impropri interni.

Per comprendere il tracciamento di due assi x, y di riferimento coniugati ci si riferisca , prima, alla rappresentazione concettuale di fig.a.

Si scelga un punto improprio $P_{x\infty}$ esterno alla conica come polo della polare costituente l'asse x . Si traccino dal punto $P_{x\infty}$ le tangenti alla conica t_1, t_2 (che saranno in realtà tra loro parallele); la congiungente i punti di tangenza è la polare di $P_{x\infty}$ scelta come asse x di riferimento. Questo passa per il centro C , interseca la conica e la retta impropria nel punto X_∞ , che è il punto improprio dell'asse stesso.

Il diametro coniugato dell'asse x è la polare del suo punto improprio X_∞ (polo $P_{y\infty}$ dell'asse y).

Dal punto improprio $X_\infty \equiv P_{y\infty}$ interno alla conica non si possono tracciare le tangenti reali ad essa per disegnare la retta polare. Occorre però considerare che la polare del punto improprio $X_\infty \equiv P_{y\infty}$ appartenente all'asse x passa per polo $P_{x\infty}$ di esso; inoltre passa per il centro C , essendo questo polo della retta impropria.

L'asse y coniugato di x è la retta congiungente il punto $P_{x\infty} \equiv X_\infty$ con il centro C

In realtà, disegnata l'iperbole, fig.b, conosciuto il centro C, si tracci dal questo l'asse x che interseca la conica. Dai punti di intersezione con la conica si traccino le tangenti t_1,t_2 ad essa che passano per il polo Y_∞ dell'asse x. Dal centro C si tracci l'asse y, parallelo alle tangenti t_1,t_2, che risulta, così, coniugato dell'asse x in quanto passa per il centro C e per il polo Y_∞ dell'asse x.
Oppure. Dal centro C si tracci l'asse y che non interseca la conica. Si traccino le tangenti t_1,t_2 alla conica parallele allesse y; esse passano per il punto improprio Y_∞ dell'asse y. La congiungente i punti di tangenza è la polare del punto improprio Y_∞ dell'asse y, quindi coniugata di esso e viene presa come asse x di riferimento.

Equazione dell'iperbole aventi gli asintoti come assi di riferimento

Una particolare equazione canonica si ottiene assumendo l'origine degli assi nel centro e avente come assi di riferimento i due asintoti della conica.

Si consideri così una conica a centro avente questo nell'origine degli assi. L'equazione è l'espressione (3.1.15) già determinata nel punto 3.1.7

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$$

con
$$\begin{cases} a_{10} = 0 \\ a_{20} = 0 \end{cases}$$

Si imponga che gli assi x,y di riferimento siano gli asintoti dell'iperbole. Ciò si ha, se gli assi x,y sono tangenti alla conica nei loro punti impropri.

L'asse x ha equazione

$$y = 0$$

il suo punto improprio è $X_\infty\left(0,1,0\right)$, i parametri direttori $\begin{cases} l = 1 \\ m = 0 \end{cases}$ (3.1.24)

Affinché l'asse x sia un asintoto, e quindi tangente alla conica nel suo punto improprio, occorre che i suoi parametri direttori l,m soddisfino la condizione di autoconiugio

$$a_{11}\,l^2 + 2a_{12}\,lm + a_{22}\,m^2 = 0$$

sostituendo le (1.3.24) si ha:

$$a_{11}\cdot 1 + 0 + 0 = 0 \quad \text{da cui:}$$

$$a_{11} = 0 \qquad (1.3.25)$$

L'asse y ha equazione

$$x = 0$$

il suo punto improprio è $y_\infty\left(0,0,1\right)$, i parametri direttori $\begin{cases} l = 0 \\ m = 1 \end{cases}$ (3.1.26)

I parametri direttori l,m soddisfino la condizione di autoconiugio
sostituendo le (1.3.26) si ha:

$$0 + 0 + a_{22}\cdot 1 = 0 \quad \text{da cui:}$$

$$a_{22} = 0 \qquad (1.3.27)$$

Complessivamente si hanno le seguenti condizioni

$$\begin{cases} a_{10} = 0 \\ a_{20} = 0 \\ a_{11} = 0 \\ a_{22} = 0 \end{cases}$$

L'equazione canonica della iperbole diviene:

$$2a_{12}\, x_1x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \qquad \text{in coordinate non omogenee}$$

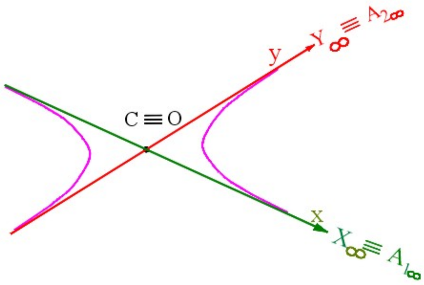
$$2a_{12}\, xy + a_{00} = 0 \qquad \text{da cui}$$

$$xy = -\frac{a_{00}}{2a_{12}} \qquad \text{ponendo} \quad -\frac{a_{00}}{2a_{12}} = a \qquad \text{si ha}$$

$$xy = a$$

$$y = \frac{a}{x} \qquad (3.1.27)$$

fig.3.1.22



La curva è asintotica agli assi

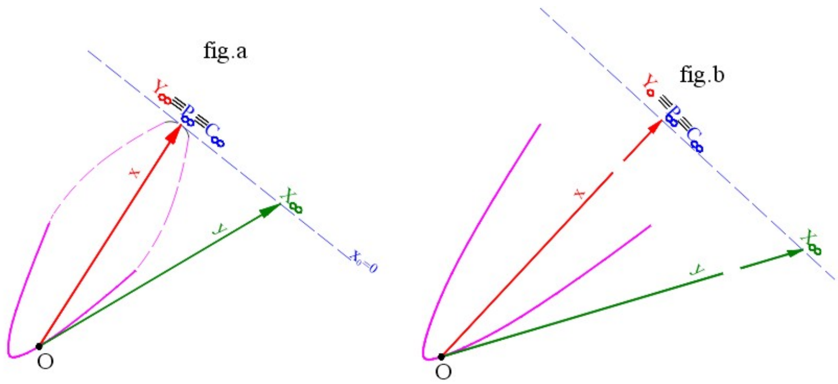
per $x \to \pm\infty \quad y \to 0$

per $x \to 0^{\pm} \quad y = \pm\infty$

3.1.9 **Equazione canonica della parabola**

Si assume come asse y un diametro, una retta passante per il punto improprio della parabola $P_\infty \equiv Y_\infty \equiv C_\infty$ (centro della conica). Come origine degli assi si assume l'intersezione dell'asse y con la parabola e come asse x, la tangente alla conica nell'origine.

Fig 3.1.23



Nella fig.a si ha la rappresentazione concettuale della conica tangente all'infinito alla retta impropria. In effetti, per $y \to \infty$ i due rami della parabola diminuiscono la loro divergenza , tendendo, all'infinito, ad essere paralleli, ad avere la stessa direzione, incontrandosi così nell'unico punto improprio della conica.

Imponiamo alla conica le suddette condizioni

Data la conica

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$$

Imponiamo che passi per l'origine. L'equazione deve essere soddisfatta per il punto $O(1,0,0)$.

sostituendo si ha;

$$a_{00} = 0$$

Il punto improprio della parabola, centro della conica, per quanto imposto, deve risultare sull'asse y; deve essere:

$$x = 0 \qquad \text{in coordinate omogenee} \quad x_1 = 0$$

I punti impropri di una conica sono dati dall'intersezione con la retta impropria

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

si ha:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \qquad (3.1.28)$$

Si ha un'equazione omogenea di 2° grado da cui si ricavano i punti impropri della conica. Nel caso della parabola sono due coincidenti, posti sull'asse y dove per ogni $y = \frac{x_2}{x_0} \neq 0$ risulta

$$x = \frac{x_1}{x_0} = 0 \rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{al limite anche sulla retta impropria}$$

Per ottenere ciò occorre che l'equazione risolutiva (1.3.29) si riduca alla espressione:

$$x_1^2 = 0$$

Ciò comporta che siano:

$$\begin{cases} a_{22} = 0 \\ a_{12} = 0 \end{cases} \qquad (3.1.29)$$

Si impone ora che l'asse x sia tangente all'origine $O(1,0,0)$ degli assi. Ciò vuol dire che la polare del punto origine $O(1,0,0)$ deve corrispondere all'equazione dell'asse x:

$$y = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_2 = 0$$

Polare di $O(1,0,0)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_{00}\, x_0 + a_{10}\, x_1 + a_{20}\, x_2 = 0 \qquad (3.1.30)$$

In coordinate non omogenee l'equazione della tangente è

$$a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0$$

l'equazione deve coincidere con quella dell'asse x:

$$y = 0$$

Ne consegue che debbono risultare

$$\begin{cases} a_{00} = 0 \\ a_{10} = 0 \end{cases} \qquad (3.1.31)$$

Riunendo tutte le condizione ottenute sui coefficienti (3.1.29) e (3.1.30)

$$\begin{cases} a_{00} = 0 \\ a_{10} = 0 \\ a_{22} = 0 \\ a_{12} = 0 \end{cases}$$

sostituendo nell'equazione della conica, questa assume l'espressione:

$$a_{11}\, x_1^2 + 2a_{02}\, x_2 = 0$$

in coordinate non omogenee

$a_{11}\, x^2 + 2a_{02}\, y = 0$ da cui

$y = -\dfrac{a_{11}}{2a_{12}} x^2$ posto $-\dfrac{a_{11}}{2a_{12}} = a$ si ha:

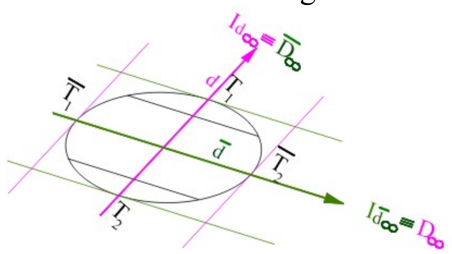
Equazione canonica della parabola:

$$y = a x^2$$

3.1.10 **Diametri trasversi**

Un diametro della conica si dice trasverso quando incontra la conica in punti reali proprio o impropri. Nei tre tipi di coniche si hanno differenti tipi di diametri coniugati.

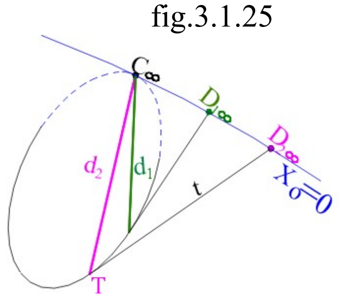
fig.3.1.24



In una ellisse un diametro d incontra la conica in due punti reali propri T_1, T_2. Dal punto improprio D_∞ di d, spiccate le tangenti alla conica per determinare il diametro $\overline{d}$ coniugato, queste risultano parallele al diametro. La retta congiungente i due punti di tangenza $\overline{T}_1, \overline{T}_2$ fornisce il diametro $\overline{d}$, coniugato di d.

In una ellisse si hanno coppie di diametri coniugati entrambi traversi.

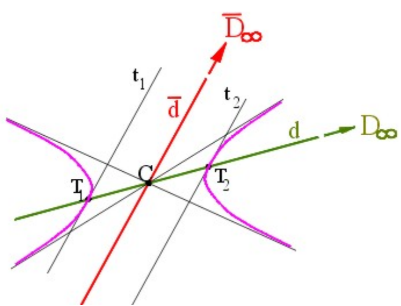
fig.3.1.25



Nella parabola ogni diametro, polare di punti impropri $D_{1\infty}, D_{2\infty}\cdots$, incontra la conica, nel suo punto improprio (centro C_∞), e nel punto proprio di tangenza T della tangente tracciata dal polo del diametro.

Nella parabola ogni diametro è traverso ed ha come diametro coniugato la retta impropria.

Fig3.1.26



Nell'iperbole, si tracci una retta diametrale d, passante per il centro C, che interseca la conica in due punti T_1, T_2. Le tangenti alla conica t_1, t_2, tracciate dai punti di intersezione passano per il punto improprio $\overline{D}_\infty$ del diametro coniugato $\overline{d}$ che è il polo del diametro d.

Il diametro coniugato $\overline{d}$ non interseca la conica.

Nell'iperbole nelle coppie di diametri coniugati uno è traverso e il coniugato non trasverso

Avanti... Clic per continuare

Indietro... clic per precedente

Indietro... Clic per la pagina iniziale