CURVE ALGEBRICHE PIANE

1- Curva algebrica $\mathscr{C}$

La curva algebrica è rappresentata da un polinomio, di grado *n,* nelle variabili x,y uguagliato a zero:

$$f(x,y) = \sum_{0\leq p+q\leq n} a_{pq}x^p y^q = 0 \qquad (1.0.1)$$

Gli indici e gli esponenti delle variabili, di ogni termine del polinomio, assumono tutte le combinazioni possibili da *1* fino ad *n* e tali che la loro somma risulti: maggiore o uguale a "zero" e minore o uguale ad "*n"*.

Così per un polinomio di secondo grado, con *n=2*, le combinazioni tra i numeri "0,1,2" in modo che la somma a due a due di essi non superi *n*=2 e sono:

00,01,02 / 10, 11 / 20

$$a_{00}x^0y^0 + a_{01}x^0y^1 + a_{02}x^0y^2 + a_{10}x^1y^0 + a_{11}x^1y^1 + a_{20}x^2y^0 = 0 \qquad (1.0.2)$$

$$a_{00} + a_{01}y + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{11}xy + a_{20}x^2 = 0$$

In coordinate omogenee, ponendo:

$$x = \frac{x_1}{x_0} \qquad y = \frac{x_2}{x_0}$$

la funzione (1) diviene:

$$f(x,y) = f\left(\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0}\right) = \sum_{0\leq p+q\leq n} a_{pq}\frac{x_1^p}{x_0^p}\cdot\frac{x_2^q}{x_0^q} = 0$$

moltiplicando per x_0^n si ha

$$F(x_0,x_1,x_2) = \sum_{0\leq p+q\leq n} a_{pq}\frac{x_1^p\cdot x_2^q}{x_0^{p+q}}\cdot x_0^n = 0$$

$$F(x_0,x_1,x_2) = \sum_{0\leq p+q\leq n} a_{pq}x_0^{n-p-q}\cdot x_1^p x_2^q = 0 \qquad (1.0.3)$$

La funzione uguagliata a zero è un polinomio omogeneo di grado *n*:

$$n-p-q+p+q = n$$

Nel caso particolare di un polinomio di secondo grado con $n = 2$, che verrà più estesamente studiato in seguito nelle coniche si ha:

$$F(x_0,x_1,x_2) = \sum_{0\leq p+q\leq n} a_{pq}x_0^{2-p-q}\cdot x_1^p x_2^q = 0$$

00,01,02 / 10, 11 / 20

si ottiene:

$$F(x_0,x_1,x_2)= a_{00}x_0^{2-0-0}x_1^0x_2^0 + a_{01}x_0^{2-0-1}x_1^0x_2^1 + a_{02}x_0^{2-0-2}x_1^0x_2^2 + a_{10}x_0^{2-1-0}x_1^1x_2^0 + a_{11}x_0^{2-1-1}x_1^1x_2^1 + a_{20}x_0^{2-2-0}x_1^2x_2^0 = 0$$

$$F(x_0,x_1,x_2)= a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{10}x_0x_1 + a_{11}x_1x_2 + a_{20}x_1^2 = 0 \qquad (1.0.4)$$

Si noti che i pedici dei coefficienti si riferiscono agli esponenti delle variabili x_0,x_1x_2
Nelle coniche si indicheranno in modo diverso.

1.1- Punti impropri di una curva algebrica di grado *n*.

Sono i punti di intersezione con la retta impropria:

$$x_0 = 0$$

Si ottiene un polinomio omogeneo uguagliato a zero, costituito dalla somma di monomi, di grado *n*, nelle sole variabili x_1,x_2. Le soluzioni di esso forniscono i punti impropri della curva.

Così per la curva algebrica (4) di secondo grado, i punti impropri sono forniti dalla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} F(x_0,x_1,x_2)= a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{10}x_0x_1 + a_{11}x_1x_2 + a_{20}x_1^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

si ottiene l'equazione polinomiale:

$$F(x_0,x_1,x_2)= +a_{02}x_2^2 + +a_{11}x_1x_2 + a_{20}x_1^2 = 0$$

1.2- Curve algebriche irriducibili

Una curva algebrica $\mathscr{C}$ di grado *n* si dice irriducibile nel campo complesso se il polinomio $F(x_0,x_1,x_2)= 0$ che lo rappresenta non si può scomporre in fattori, o, come si dice, non può fattorizzarsi, nel prodotto di due o più polinomi omogenei a coefficienti comunque complessi, ciascuno di grado inferiore a *n*.

Si noti che nel campo complesso possono fattorizzarsi polinomi che non possono nel campo reale.

Per esempio il ,polinomio

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

non è scomponibile nel campo reale, ma lo è nel campo complesso. Risulta:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)\cdot(x_1 - ix_2) = 0$$

1.3- Curve algebriche riducibili

Se curva algebrica $\mathscr{C}$ è rappresentata da un polinomio di grado *n* che può fattorizzarzi si dice che la **curva è riducibile o spezzata**.

Se la curva $F = 0$ è riducibile essa si può spezzare nel prodotto di più polinomi, irriducibili $F_1, F_2, ... F_K$ ciascuno di grado inferiore ad *n*. ed elevato ad una specifica potenza

$$F = F_1^{r_1} \cdot F_1^{r_2} \cdot F_1^{r_3} \cdot ... \cdot F_1^{r_k} = 0$$

dove $r_1, r_2 ... r_k$ sono gli esponenti dei rispettivi polinomi irriducibili, componenti della fattorizzazione, ciascuno con un proprio grado $n_1, n_2 ... n_k$ inferiore ad *n* e tali che risulta:

$$n_1 \cdot r_1 + n_2 \cdot r_2 + n_3 \cdot r_3 + ... + n_k \cdot r_k = n$$

Gli esponenti $r_1, r_2 ... r_k$ rappresentano la molteplicità con cui vengono considerate le singole componenti.

La riducibilità della curva algebrica $\mathscr{C}$, (espressa in un polinomio $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ omogeneo di grado *n*), in prodotto di polinomi con grado complessivo *n*, si traduce, generalmente, nella stessa riducibilità della espressione della curva $\mathscr{C}$ $f(x,y) = 0$ in forma non omogenea, con una eccezione. Può avvenire che nella traduzione del polinomio dalla forma omogenea in quella non omogenea, complessivamente, il prodotto dei polinomi componenti la fattorizzazione si **abbassa di grado**. Ciò avviene perché uno dei componenti della fattorizzazione è la retta impropria con una sua molteplicità.

Così, ad esempio, la seguente curva algebrica di terzo grado nella forma in coordinate omogenee:

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0x_1^2 + bx_0^2x_1 - x_0^2x_2 + cx_0^3 = 0 \qquad (1.3.1)$$

trasformata in coordinate non omogenee, dividendo per x_0^3 è:

$$f(x,y) = ax^2 + bx - y + c = 0$$

si ottiene un polinomio di secondo grado. Ciò è dovuto al fatto che la curva (1.3.1) espressa in coordinate omogenee è fattorizzabile, contenendo come componente la retta impropria. Infatti, nella espressione, si può porre in evidenza x_0:

$$ax_0x_1^2 + bx_0^2x_1 - x_0^2x_2 + cx_0^3 = 0 \qquad x_0\left(ax_1^2 + bx_0x_1 - x_0x_2 + cx_0^2\right) = 0 \qquad (1.3.2)$$

L'equazione (1,3,2) è spezzata nella retta impropria e in una curva algebrica di secondo grado

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ ax_1^2 + bx_0x_1 - x_0x_2 + cx_0^2 = 0 \end{cases}$$

1.4- Ordine di una curva algebrica – significato geometrico

L'ordine della curva algebrica è il grado del polinomio che ne determina l'equazione.
Per comprendere il suo significato geometrico intersechiamo la curva con una retta.
Sia $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ il polinomio omogeneo di grado *n* dell'equazione della curva $\mathscr{C}^n$
Sia la retta espressa in coordinate omogenee del tipo:

$$ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0 \qquad (1.4)$$

l'intersezione è la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = 0 & I \\ ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0 & II \end{cases}$$

ricavando x_2 dalla II

$$x_2 = -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}x_0$$

e sostituendo nella *I* si ottiene, in generale, un polinomio omogeneo nelle variabili x_1, x_0 di grado *n*, del tipo:

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} x_0^1 + a_{n-2} x_1^{n-2} x_0^2 + \ldots + a_1 x_1^1 x_0^{n-1} + a_0 x_0^n = 0$$

l'equazione polinomiale di grado *n*, in generale ammette *n* soluzioni pari al grado del polinomio.
Ne viene che:

In generale una curva algebrica $\mathscr{C}^n$,di grado *n*, ha *n* punti di intersezione con una retta, pari cioè al grado del polinomio che ne costituisce l'equazione.

Può accadere che nell'eseguire l'intersezione della retta con la curva $\mathscr{C}^n$ dopo la sostituzione di una variabile, ad esempio y il polinomio risultante risolutivo nelle variabili x si abbassa di *k* gradi, risultando nulli i *k* coefficienti di grado più alto:

$$a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_{n-k+1} = 0$$

Il polinomio risolutivo in coordinate non omogenee sarà del tipo:

$$a_{n-k} x^{n-k} + a_{n-k-1} x^{n-k-1} + a_{n-k-2} x^{n-k} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1.4.1)$$

che ammette *n-k* soluzioni, corrispondenti a *n-k* intersezioni in punti finiti.

Per capire a collocazione delle altre *k* intersezioni mancanti, si consideri l'equazione risolutiva (d) in coordinate omogenee

$$a_{n-k} x_1^{n-k} x_0^k + a_{n-k-1} x_1^{n-k-1} x_0^{k+1} + \ldots + a_2 x_1^2 x_0^{n-2} + a_1 x_1^1 x_0^{n-1} + a_0 x_0^n = 0$$

Si può porre in evidenza x_0^k

$$x_0^k \left(a_{n-k} x_1^{n-k} + a_{n-k-1} x_1^{n-k-1} x_0^1 + \ldots + a_2 x_1^2 x_0^{n-2-k} + a_1 x_1^1 x_0^{n-1-k} + a_0 x_0^{n-k} \right) = 0$$

l'equazione si sdoppia nelle due:

$$\begin{cases} a_{n-k} x_1^{n-k} + a_{n-k-1} x_1^{n-k-1} x_0^1 + \ldots + a_2 x_1^2 x_0^{n-2-k} + a_1 x_1^1 x_0^{n-1-k} + a_0 x_0^{n-k} = 0 \\ x_0^k = 0 \end{cases}$$

Si hanno così ancora *n* soluzioni: *k-n* punti reali o complessi coniugati al finito e *k* punti impropri.

Ne viene che, quando nell'effettuare l'intersezione di una curva algebrica di ordine *n* con una retta, l'equazione risolutiva si abbassa di *k* gradi, vuol dire che la curva algebrica $\mathscr{C}^n$ interseca la retta in *n-k* punti al finito(reali o complessi coniugati) e nel suo punto improprio con molteplicità *k*

Si noti infatti che sostituendo la soluzione $x_0 = 0$ nell'equazione (1.4) della retta.

$$ax_1 + bx_2 + 0 = 0$$

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{a}{b} \qquad \text{da cui} \qquad x_2 = -\rho \cdot a \qquad x_1 = \rho \cdot b \qquad \text{con } \rho \neq 0 \text{ qualsiasi}$$

Si ha il punto improprio della retta $R_\infty\,(0, b, -a)$
I k punti impropri coincidono con il punto improprio della retta contato k volte

Da quanto rilevato ne viene che:
Nel piano proiettivo complesso l'ordine della curva algebrica $\mathscr{C}^n$ è uguale al numero di punti di intersezione con una retta.

$\mathscr{C}^1$,	retta	un punto di intersezione
$\mathscr{C}^2$	conica	due punti di intersezione
$\mathscr{C}^3$	cubica	trapunti di intersezione
$\mathscr{C}^4$	quartica	quattro punti di intersezione

. . .

1.5- Numero di condizioni indipendenti per la determinazione una curva algebrica $\mathscr{C}^n$

Una curva algebrica $\mathscr{C}^n$ di grado n è definita dal valore dei coefficienti a_{pq} del polinomio di n^{mo} grado.

Nell'insieme delle curve algebriche $\mathscr{C}^n$ dello stesso grado n, una si differenzia dall'altra dai diversi valori dei corrispondenti coefficienti a_{pq}, che sono variabili di primo grado. Ne viene che:

L'insieme delle curve algebriche $\mathscr{C}^n$ costituiscono un sistema lineare nelle variabili date dai coefficienti a_{pq}. Il numero delle variabili indipendenti risultano quindi, pari al numero dei coefficienti a_{pq} meno 1.
Le variabili indipendenti costituiscono il grado di libertà del sistema. Per fissare una determinata curva, espressa da un polinomio occorre fissare tante condizioni quanti sono le variabili indipendenti.

Si dimostra che in un polinomio di grado n il numero dei coefficienti n_i indipendenti sono espressi dalla relazione:

$$n_i = \frac{n(n+3)}{2}$$

Così:

per le rette $\mathscr{C}^1$ $\qquad n = 2 \qquad n_i = \dfrac{1(1+3)}{2} = 2$

per le coniche $\mathscr{C}^2$ $\qquad n = 2 \qquad n_i = \dfrac{2(2+3)}{2} = 5$

per le cubiche $\mathscr{C}^3$ $\qquad n = 3 \qquad n_i = \dfrac{3(3+3)}{2} = 9$

Si noti che il passaggio di una curva $\mathscr{C}^n$ per un punto $P_0(x_0, y_0)$ costituisce una condizione che determina una equazione lineare aventi come incognite i coefficienti a_{pq}. Infatti si impone che i coefficienti soddisfino l'equazione polinomiale della curva calcolata in tale punto:

$$f(x_0 y_0) = 0$$

Si ha un'equazione lineare nelle variabili a_{pq}

Da quanto esposto si ha che:

il passaggio di una curva $\mathscr{C}^n$ per $n_i = \dfrac{n(n+3)}{2}$ punti generici non allineati del piano fissa definitivamente una specifica curva $\mathscr{C}^n$ del piano.

1.6- Studio locale di una curva algebrica $\mathscr{C}^n$ in un punto $P_0(x_0, y_0)$

1.6.1 punti semplici

Un punto $P_0(x_0, y_0)$ di una curva $\mathscr{C}^n$ si dice semplice se le derivate parziali prime in esso non sono entrambi nulle

Sia $f(x, y) = 0$ l'equazione di una curva algebrica $\mathscr{C}^n$ e $P_0(x_0, y_0)$ un punto di essa:

$$f(x_0, y_0) = 0$$

Indichiamo per brevità $f(x_0, y_0) = f_0$

Sviluppando in serie di Taylor la $f(x, y) = 0$ nel punto $P_0(x_0, y_0)$ si ha, in forma compatta:

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right] \cdot f_0 = 0$$

In forma estesa

$$f(x, y) = \left[(x - x_0)\frac{\partial f_0}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f_0}{\partial y}\right] + \frac{1}{2!}\left[(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + 2(y - y_0)(x - x_0)\frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\right] +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[(x - x_0)^3 \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3} + \quad \dots + (y - y_0)^3 \frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3}\right] + \dots = 0$$

Si consideri ora una retta passante per il punto $P_0(x_0, y_0)$ della curva. Essa si può porre nella forma

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Intersecando con la curva, si sostituisca $y - y_0$ dell'equazione delle retta nella equazione della curva algebrica $\mathscr{C}^n$ sviluppata in serie di Tailor. Si ha:

$$f(x, y) = \left[(x - x_0)\frac{\partial f_0}{\partial x} + m(x - x_0)\frac{\partial f_0}{\partial y}\right] + \frac{1}{2!}\left[(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + 2m(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} + m^2(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\right] +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[(x - x_0)^3 \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3} + \quad \dots + m^3(x - x_0)^3 \frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3}\right] + \dots = 0$$

ponendo in evidenza i termini in $(x - x_0)$ si ha:

$$f(x,y)=\left[\frac{\partial f_0}{\partial x}+m\frac{\partial f_0}{\partial y}\right]\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}+2m\frac{\partial^2 f_0}{\partial x\partial y}+m^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\right]\cdot(x-x_0)^2+$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3}+\quad\ldots\quad+m^3\frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3}\right]\cdot(x-x_0)^3+\ldots=0$$

Ora si nota che l'equazione è soddisfatta per $x=x_0$. La retta passa per il punto $P_0(x_0,y_0)$. Osservando però l'espressione ottenuta si evidenziano diversi tipi di intersezione della retta con la curva a seconda dei valori e le relazioni tra le derivate parziali.

a. Un'unica soluzione

Se le derivate parziali prime $\frac{\partial f_0}{\partial x},\frac{\partial f_0}{\partial y}$ nel punto $P_0(x_0,y_0)$ non sono entrambi nulle (è un punto semplice) e risulta non nulla l'espressione:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}+m\frac{\partial f_0}{\partial y}\neq 0$$

si ha un'unica soluzione $x=x_0$ e si ha un unico punto di intersezione della retta con la curva.

Infatti, in tal caso, nella espressione dello sviluppo in serie si può porre in evidenza il binomio $(x-x_0)$

$$(x-x_0)\cdot\left\{\left[\frac{\partial f_0}{\partial x}+m\frac{\partial f_0}{\partial y}\right]\cdot+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}+2m\frac{\partial^2 f_0}{\partial x\partial y}+m^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\right]\cdot(x-x_0)+\ldots.\right\}=0$$

e si ha la sola soluzione semplice $x-x_0=0\rightarrow x=x_0$ .La retta ha un solo punto in comune con la curva $\mathscr{C}^n$

b. le derivate parziali prime $\frac{\partial f_0}{\partial x},\frac{\partial f_0}{\partial y}$ nel punto $P_0(x_0,y_0)$ non sono entrambi nulle e risulta nulla l'espressione:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}+m\frac{\partial f_0}{\partial y}=0$$

In tal caso lo sviluppo in serie è:

$$0+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}+2m\frac{\partial^2 f_0}{\partial x\partial y}+m^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\right]\cdot(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3}+\quad\ldots\quad+m^3\frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3}\right]\cdot(x-x_0)^3+\ldots=0$$

e supposto che sia $\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}+2m\frac{\partial^2 f_0}{\partial x\partial y}+m^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\neq 0$

si può porre in evidenza $(x-x_0)^2$

$$(x-x_0)^2\cdot\left\{\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}+2m\frac{\partial^2 f_0}{\partial x\partial y}+m^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\right]+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3}+\quad\ldots\quad+m^3\frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3}\right]\cdot(x-x_0)+\ldots\right\}=0$$

si ha la soluzione $(x-x_0)^2=0\rightarrow x=x_0$ contato due volte. La retta ha nel punto $P_0(x_0,y_0)$ due intersezione coincidenti. La retta si dice tangente alla curva $\mathscr{C}^n$

Espressione della retta tangente a $\mathcal{C}^n$ in $P_0(x_0, y_0)$

Da quanto su esposto, una retta per un punto $P_0(x_0, y_0)$ della curva $\mathcal{C}^n$ del tipo:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad \text{(r)}$$

risulta tangente a $\mathcal{C}^n$ in $P_0(x_0, y_0)$ quando:

I le derivate parziali prime $\frac{\partial f_0}{\partial x}, \frac{\partial f_0}{\partial y}$ nel punto $P_0(x_0, y_0)$ non sono entrambi nulle

II risulta nulla l'espressione $\frac{\partial f_0}{\partial x} + m\frac{\partial f_0}{\partial y} = 0$

III $\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + 2m\frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} + m^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} \neq 0$

dalla II si ricava *m*:

$$m = -\frac{\frac{\partial f_0}{\partial x}}{\frac{\partial f_0}{\partial y}}$$

sostituendo nell'equazione (r) della retta:

$$y - y_0 = -\frac{\frac{\partial f_0}{\partial x}}{\frac{\partial f_0}{\partial y}}(x - x_0) \qquad \frac{\partial f_0}{\partial y}(y - y_0) = -\frac{\partial f_0}{\partial x}(x - x_0)$$

L'equazione della retta tangente alla curva $\mathcal{C}^n$ nel punto $P_0(x_0, y_0)$ si può scrivere nella forma:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) = 0 \qquad (1.6)$$

c. Nel caso in cui le derivate parziali prime $\frac{\partial f_0}{\partial x}, \frac{\partial f_0}{\partial y}$ nel punto $P_0(x_0, y_0)$ non sono entrambi nulle,

- risulta nulla l'espressione:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} + m\frac{\partial f_0}{\partial y} = 0$$

- risulta nulla l'espressione:

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + 2m\frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} + m^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} = 0$$

- risulta diversa da zero l'espressione dello sviluppo in serie alla derivate parziali terze, allora, nello sviluppo in serie si può porre in evidenza $(x - x_0)^3$ ottenendo la soluzione

$$(x - x_0)^3 = 0 \ \rightarrow \ x = x_0 \ \text{contato tre volte}$$

la retta ha nel punto $P_0(x_0, y_0)$ tre intersezioni coincidenti con la curva $\mathcal{C}^n$**.** Il punto $P_0(x_0, y_0)$ si dice di flesso ordinario

d. Se nelle sviluppo in serie risultano nulli i termini alle derivate parziali uguali superiori a tre si ottengono nel punto $P_0(x_0, y_0)$ più di tre intersezioni coincidenti

1.6.2- Punti multipli

Un punto $P_0(x_0, y_0)$ di una curva $\mathscr{C}^n$ si dice singolare quando le derivate parziali prime sono entrambi nulle. Risulta:

$$\begin{cases} f(x_0 y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

In tal caso lo sviluppo in serie di Taylor della $f(x, y) = 0$ è:

$$f(x,y) = \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + 2(y-y_0)(x-x_0)\frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\right] + $$
$$+ \frac{1}{3!}\left[(x-x_0)^3\frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3} + \ \ldots + (y-y_0)^3\frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3}\right] + \ldots = 0 \qquad \text{I}$$

ntersecando con una retta generica per il punto $P_0(x_0, y_0)$:

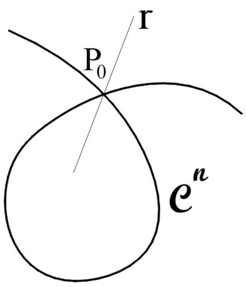
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

sostituendo $y - y_0$ nelle sviluppo si ha:

$$\frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + 2m(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} + m^2(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\right] + $$
$$+ \frac{1}{3!}\left[(x-x_0)^3\frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3} + \ \ldots + m^3(x-x_0)^3\frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3}\right] + \ldots = 0$$

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + 2m\frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} + m^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\right](x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3} + \ \ldots + m^3\frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3}\right](x-x_0)^3 + \ldots = 0$$

fig.1.6.1



Qualunque sia la retta per $P_0(x_0, y_0)$ (qualunque sia *m*), se il termine alla derivate seconde è diverso da zero si può porre in evidenza $(x - x_0)^2$, ottenendo la soluzione:

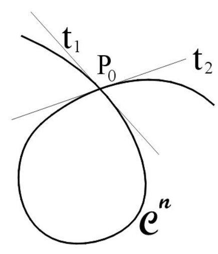
$(x - x_0)^2 = 0 \ \rightarrow \ x = x_0$ contato due volte.

Ne viene che nel punto $P_0(x_0, y_0)$ una retta generica passante per esso ha due punti di intersezione con la curva e il punto si dice doppio

Può accadere che, per determinati valori del coefficiente angolare *m* della retta *r* passante per il punto $P_0(x_0, y_0)$ della curva $\mathscr{C}^n$, si annullino, oltre le derivate parziali prime, anche il coefficiente alla derivate seconde del termine $(x - x_0)^2$:

fig.1.6.2

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + 2m\frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} + m^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.6.1)$$



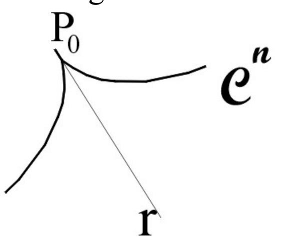
In tal caso nello sviluppo in serie può essere posto in evidenza il fattore $(x - x_0)^3$ e si avrà, nella intersezione con la retta, la soluzione:

$$(x - x_0)^3 = 0 \rightarrow \quad x = x_0 \text{ contato tre volte}$$

ottenendo tre intersezioni coincidenti della curva $\mathscr{C}^n$ con una retta il cui coefficiente angolare m soddisfa l'espressione (1.6.1). Questa è una equazione di secondo grado nella variabile m, che può ammettere anche due soluzioni reali. Alle due rette con tali coefficienti angolari si dà nome di tangenti principali alla curva $\mathscr{C}^n$ nel punto doppio.

Se le soluzioni sono reali e distinte, si ottengono due tangenti distinte nel punto doppio a cui si dà nome di **nodo.**

Fig.1.6.3



Se, invece le due soluzioni dell'espressione (g) sono coincidenti, si hanno due tangenti coincidenti nel punto doppio a cui si dà nome di **cuspide**

Se risolvendo l'equazione (1.6.1) le soluzioni sono complesse coniugate il punto doppio si dice isolato

1.7- Equazione della curva algebrica $\mathscr{C}^n$ in coordinate omogenee

La curva algebrica in coordinate omogenee indicata simbolicamente:

$$F(x_0, x_1, x_2) = 0$$

con

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{0 \le p+q \le n} a_{pq} x_0^{n-p-q} \cdot x_1^p x_2^q = 0$$

è un polinomio omogeneo di grado n nelle tre variabili x_0, x_1, x_2.

Si dimostra che nella funzione omogenea esiste la seguente identità:

$$nF(x_0 x_1, x_2) = x_0 \frac{\partial F(x_0 x_1, x_2)}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial F(x_0 x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_0 \frac{\partial F(x_0 x_1, x_2)}{\partial x_2} \qquad (1.7)$$

indichiamo per semplicità

$$\begin{cases} F_0 = \dfrac{\partial F(x_0, x_1, x_2)}{\partial x_0} \\ F_1 = \dfrac{\partial F(x_0, x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ F_2 = \dfrac{\partial F(x_0, x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{cases} \qquad (1.7.1)$$

per brevità la (1.7) si scrive

$$nF(x_0 x_1, x_2) = x_0 \cdot F_0 + x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2 \qquad (1.7.2)$$

Per un punto non improprio della curva $\mathcal{C}^n$ con $x_0 \neq 0$, nell'equazione omogenea, si può porre in evidenza x_0^n

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_0^n \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0}\right) = x_0^n \cdot f(x,y) = 0 \qquad (1.7.3)$$

$$\text{con} \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_0} = x \\ \dfrac{x_2}{x_0} = y \end{cases}$$

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_0^n \cdot f(x,y) \qquad (1.7.4)$$

si effettuino le derivate parziali della (1.7.4) tenendo conto che la funzione $f(x,y)$ è funzione di x,y che sono a loro volta funzioni di x_0,x_1,x_2.

Si ha:

$$F_0 = \frac{\partial F}{\partial x_0} = n \cdot x_0^{n-1} f(x,y) + x_0^n \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{x_1}{x_0}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{x_2}{x_0}\right)\right]$$

$$F_0 = \frac{\partial F}{\partial x_0} = n \cdot x_0^{n-1} f(x,y) + x_0^n \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \left(-\frac{x_1}{x_0^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(-\frac{x_2}{x_0^2}\right)\right]$$

$$F_0 = \frac{\partial F}{\partial x_0} = n \cdot x_0^{n-1} f(x,y) - x_0^{n-2} \left[x_1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot + x_2 \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot\right]$$

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = x_0^n \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = x_0^n \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{1}{x_0} = x_0^{n-1} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$F_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_0^n \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x2}\left(\frac{x_2}{x_0}\right) = x_0^n \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{1}{x_0} = x_0^{n-1} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Riunendo:

$$\begin{cases} F_0 = n \cdot x_0^{n-1} f(x,y) - x_0^{n-2} \left[x_1 \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot + x_2 \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot\right] \\ F_1 = x_0^{n-1} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ F_2 = x_0^{n-1} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{cases} \qquad (1.7.5)$$

Dalle espressioni (1.7.5) si rileva che in un punto semplice $P(x,y)$ della curva $\mathcal{C}^n$ ove la funzione in coordinate non omogenee $f(x,y) = 0$ e le derivate rispetto a *x,y* non sono entrambi nulle, anche le derivate parziali rispetto a x_0,x_1x_2 della funzione in coordinate omogenee $F(x_0,x_1,x_2) = 0$ non sono entrambi nulle.

In un punto singolare della curva $\mathcal{C}^n$ **,** ove risultano contemporaneamente nulle:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0 \end{cases}$$

dalle espressioni (1.7.5) risultano ance nulle tutte e tre le derivate parziali rispetto a $x_0, x_1 x_2$ della funzione in coordinate omogenee.

Ne viene che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché in un punto $P_0(x_0,x_1,x_2)$ della curva algebrica $\mathcal{C}^n$ sia singolare è che si annullino contemporaneamente le derivate parziali di $F(x_0,x_1,x_2)$ rispetto a $x_0, x_1 x_2$

$$F_0 = F_1 = F_2 = 0$$

1.8- Equazione della tangente della curva algebrica $\mathcal{C}^n$ in coordinate omogenee

Nel precedente punto 1.6 si è determinata l'equazione della tangente in coordinate non omogenee in un punto $P_0(x_0,y_0)$ della curva $\mathcal{C}^n$.

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)=0 \qquad (1.8.1)$$

Siano $x_0, x_1 x_2$ le coordinate omogenee di un punto generico $P(x,y)$ della curva $\mathcal{C}^n$ e indichiamo con $x_0', x_1' x_2'$ le coordinate omogenee del punto $P_0(x_0,y_0)$ di tangenza della retta. Risulta:

. Risulta:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1}{x_0} \\ \\ y=\dfrac{x_2}{x_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0=\dfrac{x_1'}{x_0'} \\ \\ y_0=\dfrac{x_2'}{x_0'} \end{cases} \qquad (1.8.2$$

Dalle espressioni (1.7.5) delle derivate parziali F_1, F_2 rispetto a $x_1 x_2$ della funzione omogenea F si ricavino quelle rispetto a *x,y* della funzione non omogenea *f*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\dfrac{F_1(x_0',x_1',x_2')}{(x_0')^{n-1}} \\ \\ \\ \end{cases} \qquad 1.8.3$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \frac{F_2(x_0',x_1',x_2')}{(x_0')^{n-1}}$$

sostituendo la (1.8.2) e la (1.8.3) nella (1.8.1) si ha:

$$\frac{F_1}{(x_0')^{n-1}}\left(\frac{x_1}{x_0}-\frac{x_1'}{x_0'}\right)+\frac{F_2}{(x_0')^{n-1}}\left(\frac{x_2}{x_0}-\frac{x_2'}{x_0'}\right)=0$$

$$x_1\frac{F_1}{x_0}+x_2\frac{F_2}{x_0}-x_1'\frac{F_1}{x_0'}-x_2'\frac{F_2}{x_0'}=0$$

$$x_1\frac{F_1}{x_0}+x_2\frac{F_2}{x_0}+\frac{1}{x_0'}\left[-x_1'F_1-x_2'F_2\right]=0 \qquad (1.8.4)$$

dalla relazione di identità (1.7.2) si ha

$$nF(x_0',x_1',x_2',)=x_0'F_1+x_1'F_1+x_2'F_2=0$$

da cui si ha:

$$-x_1'F_1-x_2'F_2=x_0'F_0$$

Sostituendo nella (1.8.4) si ottiene:

$$x_1\frac{F_1}{x_0}+x_2\frac{F_2}{x_0}+\frac{1}{x_0'}x_0'F_0=0$$

L'equazione della tangente in coordinate omogenee ne punto nel punto $P(x_0',x_1',x_2')$ è:

$$x_0F_0(x_0',x_1',x_2')+x_1F_1(x_0',x_1',x_2')+x_2F_2(x_0',x_1',x_2')=0 \qquad (1.8.5)$$

$$\frac{\partial F(x_0',x_1',x_2')}{\partial x_0}\cdot x_0+\frac{\partial F(x_0',x_1',x_2')}{\partial x_1}\cdot x_1+\frac{\partial F(x_0',x_1',x_2')}{\partial x_2}\cdot x_2=0 \qquad (1.8.6)$$

1.9- Teorema di Bezout

Due curve algebriche $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^m$ rispettivamente, di ordine *n,m*, non aventi componenti in comune hanno $n\cdot m$ punti di intersezione.

Ne viene che se le due curve $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^m$ hanno più di $n\cdot m$ punti in comune, esse ammettono almeno una componente in comune; e se, come caso particolare la curva di grado più basso è irriducibile allora essa è una componente di quella a grado più alto

2- Le coniche $\mathscr{C}^2$

le coniche sono curve algebriche $\mathscr{C}^2$ del secondo ordine. In coordinate omogenee x_0, x_1, x_2 la curva si può esprimere nella forma compatta.

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{0\ ij}^{2} a_{ij} x_1 x_j = 0$$

con

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Le combinazioni possibili dei valori della coppia *ij da 0* fino a *2* tenendo conto $a_{ij} = a_{ji}$ sono:

$$00 - 01 - 02 / 11 - 12 / 22$$

si hanno così i seguenti termini:

$$F(x_0, x_1 x_2) = a_{00} x_0 x_0 + 2a_{01} x_0 x_1 + 2a_{02} x_0 x_2 + a_{11} x_1 x_1 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2 x_2 = 0 \qquad (2.0.1)$$

si tenuto conto che $a_{01} x_0 x_1 = a_{10} x_1 x_0$ per cui compare $2a_{01} x_0 x_1$

L'equazione generale della conica (2,0) verrà qui espressa nella seguente forma e ordine dei termini:

$$F(x_0, x_1 x_2) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{01} x_0 x_1 + 2a_{02} x_0 x_2 + a_{00} x_0^2 = 0 \qquad (2.0.2)$$

Lella equazione generale della conica compaiono 6 coefficienti (che possono essere anche alcuni nulli), di cui, ovviamente 5 sono indipendenti.

Se la conica non contiene la retta impropria $x_0 = 0$ l'equazione omogenea può essere divisa per x_0^2 ottenendo la funzione in coordinate non omogenee

$$f(x, y) = \frac{F(x_0, x_1, x_2)}{x_0^2} = a_{11} \frac{x_1^2}{x_0^2} + a_{22} \frac{x_2^2}{x_0^2} + 2a_{12} \frac{x_1 x_2}{x_0^2} + 2a_{01} \frac{x_0 x_1}{x_0^2} + 2a_{02} \frac{x_0 x_2}{x_0^2} + a_{11} \frac{x_0^2}{x_0^2} = 0$$

$$f(x, y) = a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + 2a_{01} x + 2a_{02} y + a_{00} = 0 \qquad (2.0.3)$$

Per individuare una conica occorrono 5 condizioni indipendenti.

Le coniche costituiscono un sistema lineare ∞^5 avente come incognite i coefficienti.

Per 5 punti passa una conica e, in generale una sola.

2.1- Coniche generali – coniche degeneri

Consideriamo l'equazione della conica in coordinate omogenee

$$F(x_0, x_1 x_2) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{01} x_0 x_1 + 2a_{02} x_0 x_2 + a_{00} x_0^2 = 0 \qquad (2.0.1)$$

se la curva è a punti semplici le derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}$ non sono tutte nulle.

Si hanno punti singolari quando tali derivate sono tutte e tre nulle:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

si ha:

tenendo conto: $a_{12} = a_{21} \quad a_{01} = a_{10} \quad a_{02} = a_{20}$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 2a_{00}x_0 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{10}x_0 + 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_0} = 2a_{20}x_0 + 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.1.2)$$

Dividendo le singole equazioni lineari per 2, si ha che: la conica ha punti singolari quando è soddisfatto il seguente sistema omogeneo:

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 = 0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.1.3)$$

la matrice caratteristica del sistema è:

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (2.1.4)$$

Il sistema omogeneo (2.4) ammette auto soluzioni quando il determinante Δ della sua matrice $\mathscr{A}$ è nullo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.1.5)$$

In tali punti una retta interseca la conica in due punti coincidenti, (punto doppio), essendo le derivate parziali tutte e tre nulle. Inoltre detta retta oltre al punto doppio ha con la conica almeno un altro punto in comune ed è quindi una componente di essa.

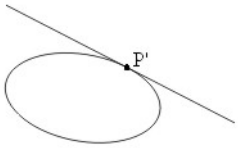
La conica si fattorizza, si degenera ammettendo come componenti delle rette.

Condizione necessaria e sufficiente affinché una conica sia generale e non degenere è che il determinante Δ della matrice caratteristica $\mathscr{A}$ della conica sia diverso da zero.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2.1.6)$$

2.2- Equazione della tangente alla conica $\mathscr{C}^2$

fig.2.2.1



La conica generica (non specificata) verrà rappresentata simbolicamente con una linea chiusa

Se $F(x_0, x_1, x_2)$ è l'equazione della conica in coordinate omogenee, la tangente nel punto $P'(x'_0, x'_1, x'_2)$ è data dall'espressione (1.8.6)

$$\frac{\partial F(x'_0, x'_1, x'_2)}{\partial x_0} \cdot x_0 + \frac{\partial F(x'_0, x'_1, x'_2)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial F(x'_0, x'_1, x'_2)}{\partial x_2} \cdot x_2 = 0$$

dividendo per 2

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F(x'_0, x'_1, x'_2)}{\partial x_0} \cdot x_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial F(x'_0, x'_1, x'_2)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial F(x'_0, x'_1, x'_2)}{\partial x_2} \cdot x_2 = 0 \qquad (2.2.1)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F(x'_0, x'_1, x^1_2)}{\partial x_0} &= a_{00}x'_0 + a_{01}x'_1 + a_{02}x'_2 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F(x'_0, x'_1, x^1_2)}{\partial x_1} &= a_{10}x'_0 + a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 \qquad (2.2.2) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F(x'_0, x'_1, x^1_2)}{\partial x_2} &= a_{20}x'_0 + a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 \end{aligned}$$

L'equazione della tangente è:

$$\left(a_{00}x'_0 + a_{01}x'_1 + a_{02}x'_2\right) \cdot x_0 + \left(a_{10}x'_0 + a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2\right) \cdot x_1 + \left(a_{20}x'_0 + a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2\right) \cdot x_2 = 0 \qquad (2.2.3)$$

la matrice dei coefficienti (2.2.2) della tangente si ottengono dalla moltiplicazione della matrice $\mathscr{A}$ (2.1.4) per la matrice X' delle coordinate del punto $P'(x'_0, x'_1, x'_2)$

$$X' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'_0} \\ \boldsymbol{x'_1} \\ \boldsymbol{x'_2} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}\cdot X' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}x_0' & a_{01}x_1' & a_{02}x_2' \\ a_{10}x_0' & a_{11}x_1' & a_{12}x_2' \\ a_{20}x_0' & a_{21}x_1' & a_{22}x_2' \end{pmatrix} \qquad (2.2.4)$$

Se si indica con X la matrice delle coordinate omogenee

$$X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix}$$

la trasposta è:

$$X_{-1} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \qquad (2.2.5)$$

L'equazione della tangente si può esprimere nel prodotto matriciale:

$$X_{-1}\cdot\mathcal{A}\cdot X' = 0 \qquad (2.2.6)$$

Infatti, sostituendo a X_{-1} la (2.2.5) e alla espressione $\mathcal{A}\cdot X'$ la (2.2.4) si ha:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00}x_0' & a_{01}x_1' & a_{02}x_2' \\ a_{10}x_0' & a_{11}x_1' & a_{12}x_2' \\ a_{20}x_0' & a_{21}x_1' & a_{22}x_2' \end{pmatrix} = 0$$

da cui si ha

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$$

Esempio

Data la conica:

$$x^2 + y^2 + 2xy + 3y + 2 = 0$$

Verificare che la conica non sia degenere e determinare la retta tangente alla conica nel suo punto $P'(0,-2)$

Matrice caratteristica

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4} \neq 0$$

La conica non è degenere

La conica in coordinate omogenee è:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 3x_0x_2 + 2x_0^2 = 0$$

l'equazione della tangente è:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

da cui si ha:

$$-x_0 - 2x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \qquad 2x_0 + 4x_1 + x_2 = 0$$

in coordinate non omogenee:

$$4x + y + 2 = 0$$

L'equazione della tangente, ovviamente si può ottenere utilizzando l'espressione generale della tangente ad una curva $\mathcal{C}^2$

$$x^2 + y^2 + 2xy + 3y + 2 = 0$$

$$\frac{\partial f(x', y')}{\partial y}(y - y') + \frac{\partial f(x', y')}{\partial x}(x - x') = 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x + 2y \qquad \frac{\partial f(0,-2)}{\partial y} = 0 - 4 = -4$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2y + 2x + 3 \qquad \frac{\partial f(0,-2)}{\partial x} = -4 + 3 = -1$$

$$-4x - y - 2 = 0$$

$$4x + y + 2 = 0$$

2.3- Polarità definita in una conica $\mathcal{C}^2$

Sia:

$$F(x_0, x_1 x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \qquad (2.3.0)$$

l'equazione di una conica, e sia:

$$P'(x_0', x_1', x_2')$$

un punto del piano.

Si definisce retta polare p' del punto P' rispetto alla conica c retta di equazione

$$\frac{\partial F(x_0', x_1', x_2')}{\partial x_0} \cdot x_0 + \frac{\partial F(x_0', x_1', x_2')}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial F(x_0', x_1', x_2')}{\partial x_2} \cdot x_2 = 0 \qquad (2.3.1)$$

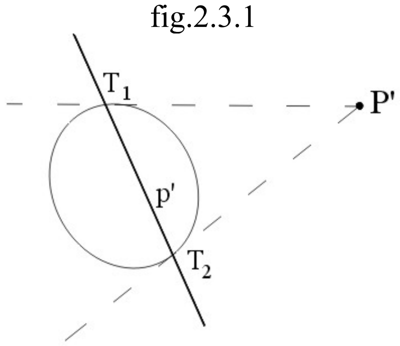
per concisione, le derivate parziali calcolate ne punto $P'(x_0', x_1', x_2')$, abbreviato con $P'(X')$ si indicheranno con:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F\left(x_0',x_1',x_2'\right)}{\partial x_0} = F_0\left(X'\right) \\ \dfrac{\partial F\left(x_0',x_1',x_2'\right)}{\partial x_1} = F_1\left(X'\right) \\ \dfrac{\partial F\left(x_0',x_1',x_2'\right)}{\partial x_2} = F_2\left(X'\right) \end{cases}$$

La retta polare del punto $P'\left(X'\right)$ rispetto alla conica si indica anche con:

$$F_0\left(X'\right)\cdot x_0 + F_1\left(X'\right)\cdot x_1 + F_2\left(X'\right)\cdot x_2 = 0$$

fig.2.3.1



Le derivate parziali della conica (2.3.0) rispetto a x_0,x_1,x_2 calcolate nel punto $P'\left(x_0',x_1',x_2'\right)$ sono

$$\begin{aligned} F_0\left(X'\right) &= a_{00}x_0' + a_{01}x_1' + a_{02}x_2' \\ F_1\left(X'\right) &= a_{10}x_0' + a_{11}x_1' + a_{12}x_2' \qquad (2.3.2) \\ F_2\left(X'\right) &= a_{20}x_0' + a_{21}x_1' + a_{22}x_2' \end{aligned}$$

Si ha così la stessa espressione dell' equazione della tangente t; solamente che, in questa, le derivate parziali erano calcolate in un punto $P'\left(x_0',x_1',x_2'\right)$ appartenente alla conica, mentre nella polare p' sono calcolate in un punto generico del piano, che può appartenere anche alla conica.

Ovviamente se il punto $P'\left(X'\right)$ appartiene alla conica, la polare p' di esso coincide con la tangente t' alla conica in detto punto.

In forma matriciale l'equazione della polare nel punto $P'\left(X'\right)$ ha la stessa espressione della tangente

$$X_{-1}\cdot\mathcal{A}\cdot X' = 0 \qquad (2.3.2)$$

$$X_{-1}\cdot\mathcal{A}\cdot X' = \left(x_0 \quad x_1 \quad x_2\right)\cdot\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 0 \qquad (2.3.3)$$

Costruzione della polare di un punto esterno alla conica

Si dimostra (vedi oltre) che la polare di un punto P' esterno alla conica si ottiene congiungendo i punti T_1, T_2 di tangenza alla conica delle due tangenti ad essa, condotte dal punto P' (fig.2.3.1)

2.3.1 Corrispondenza tra punto e polare rispetto ad una conica $\mathscr{C}^2$

Data una retta p', scritta in coordinate plukeriane:

$$p' \equiv u'_0 x_0 + u'_1 x_1 + u'_2 x_2 = 0 \qquad (2.3.4)$$

ad essa vi corrisponde un punto $P'\left(x'_0, x'_1, x'_2\right)$ del pianola cui polare rispetto alla conica $\mathscr{C}^2$ è la retta p'.

Affinché ciò avvenga occorre che u_0, u_1, u_2 della retta p' siano tali da rispettare l'uguaglianza:

$$F_0\left(X'\right)\cdot x_0 + F_1\left(X'\right)\cdot x_1 + F_2\left(X'\right)\cdot x_2 = u'_0 x_0 + u'_1 x_1 + u'_2 x_2 = 0$$

le due rette sono identiche se i rispettivi coefficienti sono proporzionali con lo stesso rapporto.

$$\begin{aligned} F_0\left(X'\right) &= \rho \cdot u'_0 \\ F_1\left(X'\right) &= \rho \cdot u'_1 \\ F_2\left(X'\right) &= \rho \cdot u'_2 \end{aligned}$$

ponendo $\rho = 1$ per la (2.3.2) si ha:

$$\begin{cases} a_{00}x'_0 + a_{01}x'_1 + a_{02}x'_2 = u'_0 \\ a_{10}x'_0 + a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 = u'_1 \\ a_{20}x'_0 + a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 = u'_2 \end{cases} \qquad (2.3.5)$$

Il sistema lineare (2,4,1) nelle incognite x'_0, x'_1, x'_2 ammette soluzioni se il determinante della matrice $\mathscr{A}$ dei coefficienti è diversa da zero, dove $\mathscr{A}$ coincide con la matrice caratteristica della conica. Ciò si ha quando la conica è generale e non degenere.

Si può concludere che:

data una retta p' del piano, ad essa vi corrisponde un punto $P'\left(X'\right)$, detto polo, che ha come polare rispetto alla conica detta retta p'. Vi è corrispondenza biunivoca tra polo e retta polare rispetto ad una conica.

Esercizio

Data la retta

$$p' \equiv 2x - y + 2 = 0$$

Determinare il polo $P'\left(x'_0, x'_1, x'_2\right)$ della retta data rispetto alla conica

$$x^2+y^2-4xy+3=0$$

---------o---------

Retta in coordinate omogenee

$$2x_0+2x_1-x_2=0$$

conica in coordinate omogenee

$$x_1^2+x_2^2-4x_1x_2+3x_0^2=0$$

Matrice caratteristica

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante

$$\Delta=-9\neq 0$$

Conica generale

Affinché il punto $P'(x_0',x_1',x_2')$ *sia il polo della retta data* p' *occorre che i coefficienti dell'equazione della polare di* $P'(x_0',x_1',x_2')$ *siano proporzionali a quelli della retta* p'

$$a\,F_0(X')\cdot x_0+F_1(X')\cdot x_1+F_2(X')\cdot x_2=2x_0+2x_1-x_2=0$$

Deve essere

$$F_0(X')=3\cdot x_0'+0\cdot x_1'+0\cdot x_2'=\rho\cdot 2$$
$$F_1(X')=0\cdot x_0'+1\cdot x_1'-2\cdot x_2'=\rho\cdot 2$$
$$F_2(X')=0\cdot x_0'-2\cdot x_1'+1\cdot x_2'=\rho\cdot(-1)$$

con qualsiasi $\rho\neq 0$

ponendo $\rho=1$ *le coordinate del polo* $P'(x_0',x_1',x_2')$ *della polare* p' *rispetto alla conica si ottengono dalla soluzione del sistema lineare*

$$\begin{cases} 3\cdot x_0'=2 \\ x_1'-2x_2'=2 \\ -2x_1'+x_2'=-1 \end{cases}$$

$$x_0'=\frac{2}{3}$$

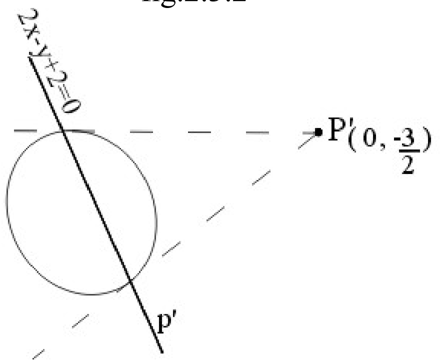
$$\begin{cases} x_1'-2x_2'=2 \\ -2x_1'+x_2'=-1 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3 \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-3$$

$$x_1'=\frac{0}{-3}=0 \qquad x_2'=\frac{3}{-3}=-1$$

$$\begin{cases} x'_0 = \dfrac{2}{3} \\ x'_1 = 0 \\ x'_2 = -1 \end{cases}$$

fig.2.3.2



Il polo della polare p' è:

in coordinate omogenee $P'\left(\frac{2}{3},0,-1\right)$ *ovvero*

$$P'\left(1,0,-\frac{3}{2}\right)$$

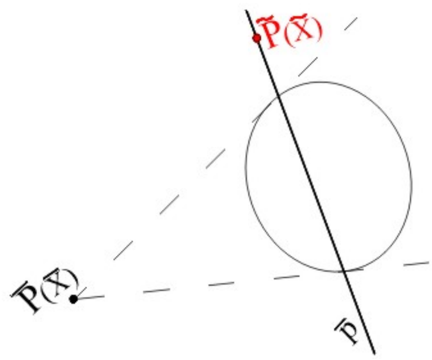
In coordinate non omogenee il polo è:

$$P'\left(0,-\frac{3}{2}\right)$$

2.3.2 Punti coniugati rispetto ad una conica $\mathscr{C}^2$

Un punto $\widetilde{P}(\widetilde{X})$ si dice coniugato del punto $\overline{P}(\overline{X})$ rispetto alla conica quando (detto punto $\widetilde{P}(\widetilde{X})$) appartiene alla polare $\overline{p}$ di $\overline{P}(\overline{X})$

Fig.2.3.3



Ciò vuol dire che data la conica

$$F(x_0,x_1x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \quad (2.3.6)$$

il punto $\overline{P}(\overline{X})$ ha come polare la retta $\overline{p}$

$$\overline{p} \equiv F_0(\overline{X})\cdot x_0 + F_1(\overline{X})\cdot x_1 + F_2(\overline{X})\cdot x_2 = 0 \qquad (2.3.7)$$

con le derivate parziali calcolate nel punto $\overline{P}(\overline{X})$.

Il punto $\widetilde{P}(\widetilde{X})$ è coniugato di $\overline{P}(\overline{X})$ rispetto alla conica se appartiene a $\overline{p}$: le coordinate $\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2$ del punto $\widetilde{P}(\widetilde{X})$ soddisfano l'equazione (2.3.7) della polare $\overline{p}$ di $\overline{P}(\overline{X})$

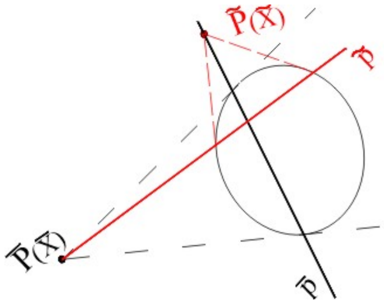
$$F_0(\overline{X})\cdot \widetilde{x}_0 + F_1(\overline{X})\cdot \widetilde{x}_1 + F_2(\overline{X})\cdot \widetilde{x}_2 = 0 \qquad (2.3.8)$$

2.3.3 Reciprocità

Si dimostra che data l'equazione (2.5.1) se ne può scrivere un'altra scambiando le coordinate $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$ del punto $\widetilde{P}(\widetilde{X})$ con quelle $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{x}_2$ del punto $\overline{P}(\overline{X})$

$$F_0(\widetilde{X})\cdot \overline{x}_0 + F_1(\widetilde{X})\cdot \overline{x}_1 + F_2(\widetilde{X})\cdot \overline{x}_2 = 0 \qquad (2.3.9)$$

fig.2.3.4

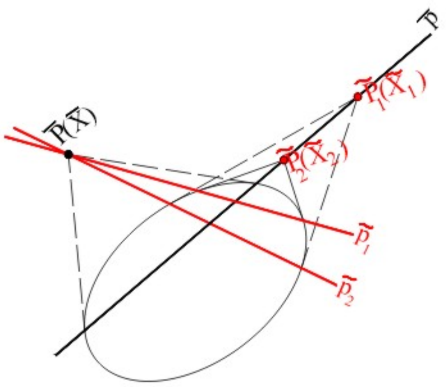


Ne deriva che se $\widetilde{P}(\widetilde{X})$ appartiene alla polare $\overline{p}$ del punto $\overline{P}(\overline{X})$, allora, tale punto $\overline{P}(\overline{X})$ appartiene alla polare $\widetilde{p}$ dell'altro punto coniugato $\widetilde{P}(\widetilde{X})$ (fig.2.3.4)

Dalla reciprocità si hanno la seguenti conseguenze.

a) Si faccia percorrere il punto $\widetilde{P}(\widetilde{X})$ sulla polare $\overline{p}$ di $\overline{P}(\overline{X})$. Si considerino così i due punti $\widetilde{P}_1(\widetilde{X}_1), \widetilde{P}_2(\widetilde{X}_2)$ sulla polare $\overline{p}$ di $\overline{P}(\overline{X})$ (fig.2.3.5). Le rispettive polari $\widetilde{p}_1$ e $\widetilde{p}_2$ dei punti $\widetilde{P}_1(\widetilde{X}_1), \widetilde{P}_2(\widetilde{X}_2)$ passano entrambi per il punto $\overline{P}(\overline{X})$ polo di $\overline{p}$. Ne viene che:

fig.2.3.5



Le polari dei punti $\widetilde{P}(\widetilde{X})$ di una polare $\overline{p}$ di un polo $\overline{P}(\overline{X})$, formano un fascio di rette $\widetilde{p}$ con centro in detto polo

b) Se la polare $\overline{p}$ di $\overline{P}(\overline{X})$ passa per il punto $\widetilde{P}(\widetilde{X})$, allora la polare $\widetilde{p}$ di $\widetilde{P}(\widetilde{X})$ passa per $\overline{P}(\overline{X})$.

c) Due rette $\overline{p}$, $\widetilde{p}$ tali che una passa per il polo dell'altra si dicono coniugate rispetto alla conica

d) Se una retta $\widetilde{p}$ descrive un fascio di rette per il punto $\overline{P}(\overline{X})$, allora i poli $\widetilde{P}(\widetilde{X})$ di esse descrivono la polare $\overline{p}$ di $\overline{P}(\overline{X})$ (fig.2.3.5)

Esempio

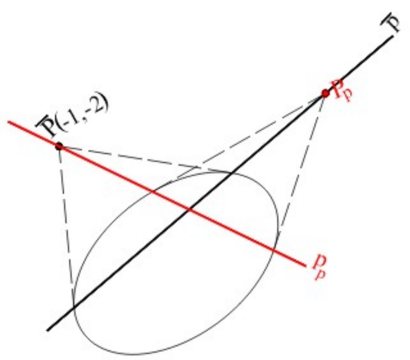
Data la conica

$$x^2 + y^2 + 4xy - 2 = 0$$

a) *determinare la polare* $\overline{p}$ *del punto* $\overline{P}(-1,-2)$

b) *Verificare che, considerato un punto* P_p *della polare* $\overline{p}$ *, la polare* p_p *di tale punto* P_p *passa per il punto* $\overline{P}(-1,-2)$

fig.2.3.6



Il punto in coordinate omogenee

$$\overline{P}(1,-1,-2)$$

equazione della polare

$$X_{-1} \cdot \mathcal{A} \cdot X' = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

polare $\overline{p}$ $\qquad -2x_0 - 5x_1 - 4x_2 = 0$

Consideriamo un punto della polare $\overline{p}$

Per $x = 2$ *si ha:* $y = -3$

Il punto della polare in coordinate omogenee è $P_p(1,2,-3)$

La polare p_p *di* $P_p(1,2,-3)$ *è:*

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$p_p \equiv \quad -3x_0 - 4x_1 + x_2 = 0$$

la polare p_p *passa per il punto* $\overline{P}(1,-1,-2)$ *.Infatti le coordinate di tale punto soddisfano l'equazione della polare.*

$$-2(1) - 4(-1) - 2 = 0$$

2.3.4 Autoconiugio

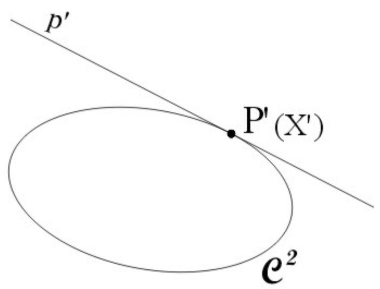
Definizione

Un punto $P(x_0,x_1,x_2)$ *si definisce autoconiugato rispetto alla conica* $\mathscr{C}^2$ *quando appartiene alla propria polare* p.

Sia $P'(x_0',x_1',x_2') \equiv P'(X')$ un punto appartenente alla conica $\mathscr{C}^2$

$$P'(X') \in \mathscr{C}^2$$

fig.2.3.7



La polare p' di $P'(X')$ è:

$$F_0(X')\cdot x_0 + F_1(X')\cdot x_1 + F_2(X')\cdot x_2 = 0 \qquad (2.3.10)$$

dove, in questo caso, le derivate parziali $F_0(X')$, $F_1(X')$, $F_2(X')$ sono calcolate nel punto $P'(x_0',x_1',x_2')$ appartenete alla conica, e quindi l'equazione della polare p' coincide con quella della tangente in tale punto.

La tangente in un punto $P'(x_0',x_1',x_2')$ *della conica coincide con la polare rispetto alla conica di tale punto.*

Il polo della retta tangente ad una conica coincide con il punto di tangenza

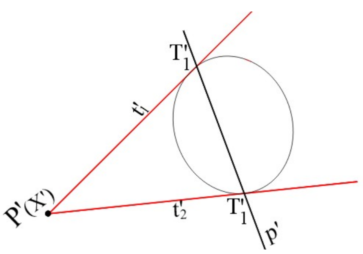
Il punto di tangenza di una retta alla conica è autoconiugato: appartiene alla retta tangente che lo contiene e che ne costituisce la sua polare.

2.3.5 Costruzione della retta polare di un punto del piano

Se il punto appartiene alla conica, allora, come si è rilevato, la retta polare coincide con la tangente a pale punto

Se il punto $P'(X')$ non appartiene alla conica allora la polare p' è la congiungente i punti di tangenza T_1',T_2' delle due tangenti t_1',t_2' alla conica $\mathscr{C}^2$ condotte dal punto $P'(X')$

Fig.2.3.8

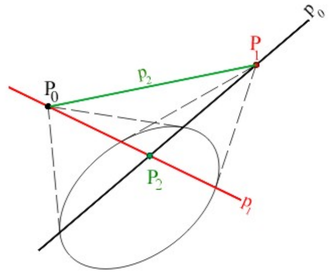


Infatti $P'(X')$ appartiene alla tangente t_1' polare di T_1' e quindi la polare di $P'(X')$, passa per T_1'. Così anche $P'(X')$ appartiene alla tangente t_2' polare di T_2' e quindi la polare di $P'(X')$, passa per T_2'. Si conclude che la polare p' di $P'(X')$ passa per i punti di tangenza T_1',T_2'

2.3.6 Triangolo autopolare

Si definisce triangolo autopolare rispetto ad una conica, quello in cui ogni vertice è polo del lato opposto, e quindi, ovviamente ogni lato è polare rispetto alla conica del vertice opposto

Fig.2.3.9



Per fissarne uno, come esempio, si parta da un punto P_0 esterno alla conica,. Si tirino le due tangenti alla conica da P_0 e si tracci la polare p_0. Su questa si fissi un punto P_1 da cui, tracciando le tangenti alla conica si ottiene la corrispondente polare p_1. Questa passa per il punto P_0 (appartenendo P_1 a p_0). Si consideri ora il punto di intersezione P_2 tra le due polari p_0, p_1. La polare p_2 di P_2 passerà per P_0, P_1, appartenendo alla polari di questi detto punto P_2. Si ottiene così un triangolo $P_0\,P_1\,P_2$, autopolare i cui ogni vertice è polo del lato opposto.

2.4- Punti di intersezione di due coniche

I punti di intersezione di due coniche si ottengono dalla soluzione del sistema delle loro equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \\ a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_{01}x + 2a'_{02}y + a'_{00} = 0 \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

Il sistema è di $2 \times 2 = 4^\circ$ grado

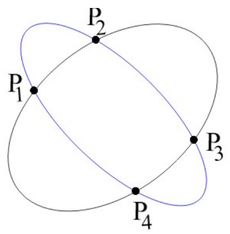
Nelle soluzioni si presentano diversi casi

a. Il sistema è indeterminato. Vi sono infinite soluzioni. Ciò avviene quando le due coniche hanno una componente in comune. Si tratta di coniche degeneri aventi una retta in comune e le equazioni sono soddisfatte per tutti i punti di tale retta. Ovviamente l'indeterminazione si ha quando la due coniche sono coincidenti

b. Le coniche sono distinte e il sistema ammette 4 soluzioni reali che possono essere

b.1- 4 soluzioni reali e distinte

fig.2.4.1

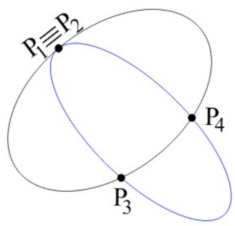


Si hanno 4 punti di intersezione reali e distinti di cui mai sono tre allineati

$$P_1 \neq P_2 \neq P_3 \neq P_4$$

b.2- 2 soluzioni reali ecoincidenti e 2 reali e distinte

fig.2.4.2

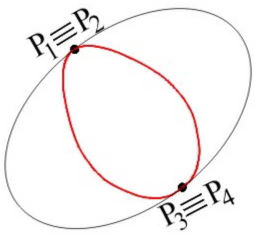


Si ha un punto di tangenza (con due punti coincidenti) e altri due punti distinti non allineati con quello di tangenza

$$P_1 \equiv P_2 \neq P_3 \neq P_4$$

b.3- 2 soluzioni reali e coincidenti e 2 reale e coincidenti

fig.2.4.3

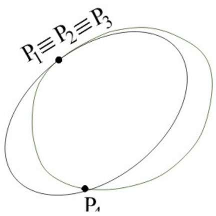


si hanno due punti di tangenza ove vi sono due punti di intersezione coincidenti

$$P_1 \equiv P_2 \neq P_3 \equiv P_4$$

b.4- 3 soluzioni reali e coincidenti e 1 soluzione reale distinta dagli altri

fig.2.4.4

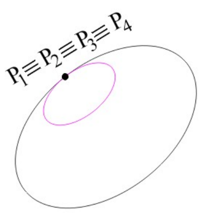


Si ha un punto di tangenza triplo ove si concentrano tre punti di intersezione

$$P_1 \equiv P_2 \equiv P_3 \neq P_4$$

b.4- 4 soluzioni reali e coincidenti

fig.2.4.5



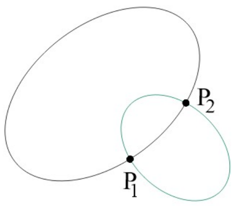
si ha un punto di tangenza quadruplo ove si concentrano tutti e 4 i punti di intersezione

$$P_1 \equiv P_2 \equiv P_3 \equiv P_4$$

c. Il sistema ammette 2 soluzioni reali e due complesse coniugate. Si possono distinguere diversi casi

c.1- due soluzioni reali e distinte e due complesse e coniugate

fig.2.4.6

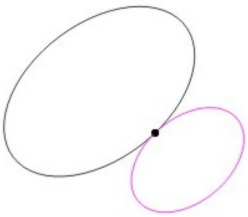


le due coniche hanno due soli punti di intersezione reali e distinti

$P_1 \neq P_2$ + due punti complessi e coniugati

c.2- due soluzioni reali e coincidenti e due complesse e coniugate

fig.2.4.7

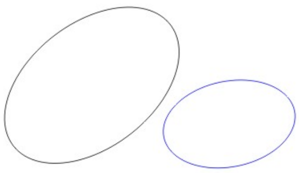


Si ha un punto di tangenza con due punti di intersezione coincidenti e due punti di intersezione complessi coniugati

$P_1 \equiv P_2$ + due punti complessi e coniugati

c.2- 4 soluzioni a due a due complessi coniugate

fig.2.4.8



le due coniche non hanno punti di intersezione reali ma solo complessi

2.5- Fascio di coniche

Date due coniche $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$

$$\begin{cases} F'(x_0,x_1,x_2) = \sum\limits_{0\ ij}^{2} a'_{ij}x_Ix_j = 0 \\ F''(x_0,x_1,x_2) = \sum\limits_{0\ ij}^{2} a''_{ij}x_Ix_j = 0 \end{cases} \qquad (2.5.1)$$

Si definisce fascio di coniche individuate dalla due coniche di base date, la combinazione lineare:

$$\lambda \cdot F'(x_0,x_1,x_2) + \mu \cdot F''(x_0,x_1,x_2) = 0 \qquad (2.5.2)$$

Al variare dei due parametri λ e μ si hanno le diverse coniche del fascio

L'equazione del fascio si può esprimere rispetto ad un solo parametro dividendo l'equazione per uno dei due parametri λ o μ che sia diverso da zero.

Così, se $\lambda \neq 0$ dividendo l'equazione del fascio per questo si ottiene

$$F'(x_0,x_1,x_2) + \frac{\mu}{\lambda} \cdot F''(x_0,x_1,x_2) = 0$$

ponendo

$$\frac{\lambda}{\mu} = k$$

si ha:

$$F'(x_0,x_1,x_2) + k \cdot F''(x_0,x_1,x_2) = 0 \qquad (2.5.3)$$

Come precedentemente esposto due coniche hanno 4 punti di intersezione, detti punti base, in cui sono soddisfatte entrambi le equazioni. Ne deriva che tutte le coniche del fascio passano per i quattro punti di intersezione delle coniche di base. Infatti se in tali punti vanno a zero le due equazioni F' e F'' andrà a zero anche la combinazione lineare di esse, che determina l'equazione del fascio.

Sviluppando l'equazione del fascio si ha:

$$\lambda \cdot \left(a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + 2a'_{12}x_1x_2 + 2a'_{01}x_0x_1 + 2a'_{02}x_0x_2 + a'_{00}x_0^2\right) +$$
$$\mu \cdot \left(a''_{11}x_1^2 + a''_{22}x_2^2 + 2a''_{12}x_1x_2 + 2a''_{01}x_0x_1 + 2a''_{02}x_0x_2 + a''_{00}x_0^2\right) = 0$$

Riunendo i termini simili aventi lo stesso esponente si ha:

$$\left(\lambda \cdot a'_{11} + \mu \cdot a''_{11}\right) \cdot x_1^2 + \left(\lambda \cdot a'_{22} + \mu \cdot a''_{22}\right) \cdot x_2^2 + \left(\lambda \cdot a'_{12} + \mu \cdot a''_{12}\right) \cdot x_1x_2 + \left(\lambda \cdot a'_{01} + \mu \cdot a''_{01}\right) \cdot x_0x_1 +$$
$$+ \left(\lambda \cdot a'_{02} + \mu \cdot a''_{02}\right) \cdot x_0x_1 + \left(\lambda \cdot a'_{00} + \mu \cdot a''_{00}\right) \cdot x_0^2 = 0$$

la matrice caratteristica è:

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a'_{00} + \mu \cdot a''_{00} & \lambda \cdot a'_{01} + \mu \cdot a''_{01} & \lambda \cdot a'_{02} + \mu \cdot a''_{02} \\ \lambda \cdot a'_{10} + \mu \cdot a''_{10} & \lambda \cdot a'_{11} + \mu \cdot a''_{11} & \lambda \cdot a'_{12} + \mu \cdot a''_{12} \\ \lambda \cdot a'_{20} + \mu \cdot a''_{20} & \lambda \cdot a'_{21} + \mu \cdot a''_{21} & \lambda \cdot a'_{22} + \mu \cdot a''_{22} \end{pmatrix} \qquad (2.5.4)$$

Come noto è la matrice del sistema omogeneo dell'annullamento delle derivate parziali rispetto a $x_0, x_1 x_2$. Esso ammette soluzioni quando il determinante della matrice è nullo

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda \cdot a'_{00} + \mu \cdot a''_{00} & \lambda \cdot a'_{01} + \mu \cdot a''_{01} & \lambda \cdot a'_{02} + \mu \cdot a''_{02} \\ \lambda \cdot a'_{10} + \mu \cdot a''_{10} & \lambda \cdot a'_{11} + \mu \cdot a''_{11} & \lambda \cdot a'_{12} + \mu \cdot a''_{12} \\ \lambda \cdot a'_{20} + \mu \cdot a''_{20} & \lambda \cdot a'_{21} + \mu \cdot a''_{21} & \lambda \cdot a'_{22} + \mu \cdot a''_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.5.5)$$

Il determinate può essere espresso rispetto ad solo parametro dividendo tutto per λ o per μ nel caso che siano diversi da zero. Dividendo per $\lambda \neq 0$ e posto $\frac{\mu}{\lambda} = k$ si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{00} + k \cdot a''_{00} & a'_{01} + k \cdot a''_{01} & a'_{02} + k \cdot a''_{02} \\ a'_{10} + k \cdot a''_{10} & a'_{11} + k \cdot a''_{11} & a'_{12} + k \cdot a''_{12} \\ a'_{20} + k \cdot a''_{20} & a'_{21} + k \cdot a''_{21} & a'_{22} + k \cdot a''_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.5.6)$$

Il fascio di coniche ammette coniche degeneri quando le derivate parziali rispetto a $x_0, x_1 x_2$ sono nulle; quindi quando il determinate (2.5.5) è nullo. L'annullamento del determinante (2.5.6) fornisce una equazione di terzo grado nle parametro k che ammette tre soluzioni. Si possono avere i seguenti casi

1. 3 soluzioni reali e distinte.
   il fascio ammette 3 coniche degeneri.

2. 2 soluzioni reali e coincidenti più un'altra reale distinta dalle prime due
   Il fascio ammette due coniche degeneri coincidenti e un'altra distinta dalle prime due. In pratica si dispone di due coniche degeneri

3. 3 soluzioni reali coincidenti
   il fascio dispone di una sola conica degenere (3 coincidenti)

4. 2 soluzioni complesse coniugate e una reale
   si hanno due coniche degeneri complesse ed una reale. In pratica si dispone di una sola conica degenere reale

Si può presentare il caso che si abbia sviluppando l'equazione nel parametro k si abbia un abbassamento di grado. Ciò avviene se $\lambda = 0$ (si ottiene $k = \infty$) in tal caso si ha una componente base comune.

L'equazione si può ridurre ad una identità. In tal caso si ha un fascio di coniche tutte degeneri l'equazione si verifica per qualsiasi valore di λ, μ .

Concludendo

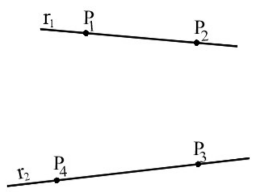
In generale ad un fascio di coniche vi appartengono 3 coniche degeneri reali o complesse. Se le coniche basi $\mathscr{C}', \mathscr{C}''$ sono degeneri aventi una componente comune, allora questa è comune a tutte le coniche del fascio.

Se le coniche basi $\mathscr{C}', \mathscr{C}''$ non hanno componenti comuni, allora tutte le coniche del fascio hanno solamente in comune i quattro punti di intersezione tra $\mathscr{C}', \mathscr{C}''$

Ogni conica passante per i quattro punti di intersezione tra $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ appartiene al fascio determinato da queste.

Per determinare l'equazione di un fascio di coniche per 4 punti (non aventi tre allineati) basta scrivere una combinazione lineare di due coniche (preferibilmente degeneri) passanti per i 4 punti.

Fig.2.5.1



Una conica degenere passante per il 4 punti è costituita dal prodotto delle equazioni di due rette, una passante per 2 punti e l'altra per gli altri due

$$\overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_3P_4} = 0$$

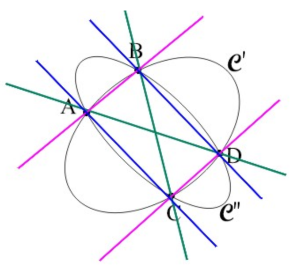
Come su esposto i quattro punti di intersezione di due coniche possono presentarsi in diverse modalità: reali e distinti, coincidenti o complessi coniugati.

Consideriamo le configurazioni possibili dei 4 punti base di intersezione tra le due coniche $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ determinati il fascio.

1. 4 punti base reali di intersezione tra $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$. Si distinguono:

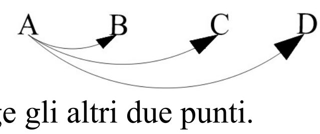
1.1 4 punti base reali e distinti

fig.2.5.2



Siano A, B, C, D i quattro punti base di intersezione reali e distinti con nessuna terna allineata.
$\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ siano due coniche generali (rappresentate simbolicamente con linee chiuse).

Le coniche degeneri sono costituite da coppie di rette congiungenti ciascuna due punti. Le combinazioni possibili di coppie di punti congiunti da una retta sono:

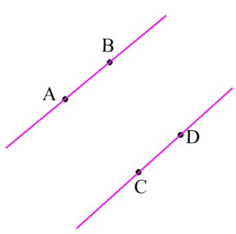


l'altra retta congiunge gli altri due punti.
si hanno così le seguenti coniche degeneri.

Prodotto equazioni delle due rette distinte

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$$

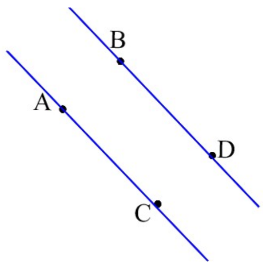
fig.2.5.3



Prodotto equazioni delle due rette distinte

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$$

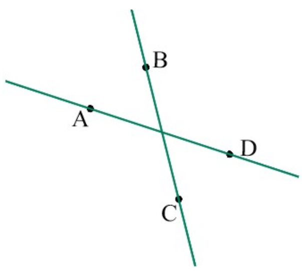
fig.2.5.4



Prodotto equazioni delle due rette distinte

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$$

fig.2.5.5



Dalla combinazione di coppie di coniche, generali o degeneri, passanti per i quattro punti A,B,C,D si possono scrivere le seguenti equazioni di fasci di coniche.

Supposto $\lambda \neq 0$ e posto $\frac{\lambda}{\mu} = k$ si ha:

$$\mathscr{C}' + k \cdot \mathscr{C}'' = 0 \qquad \mathscr{C}' + k \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0 \quad \mathscr{C}' + k \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CB} = 0 \quad \mathscr{C}' + k \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$$

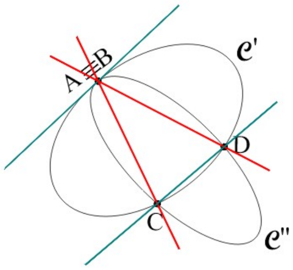
$\mathscr{C}'' + k \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0 \quad \mathscr{C}'' + k \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CB} = 0 \quad \mathscr{C}'' + k \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + k \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0 \quad \overline{AB} \cdot \overline{CD} + k \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0 \quad \overline{AC} \cdot \overline{BD} + k \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$

Si possono scrivere tre fasci di coniche con quelle degeneri

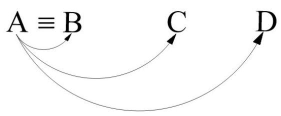
1.2 4 punti base reali, di cui due coincidenti e gli altri due distinti

fig.2.5.6



$\mathscr{C}', \mathscr{C}''$ sono due coniche generali (rappresentate simbolicamente con linee chiuse) passanti per i punti base A,B,C,D.
Le coniche degeneri sono costituite da coppie di rette congiungenti ciascuna due punti,, di cui due coincidenti.

Le combinazioni possibili di coppie di punti congiunti da una retta sono:



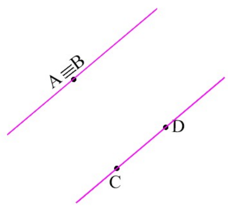
l'altra retta congiunge gli altri due punti.

Si hanno così le seguenti coniche degeneri

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$

con $\overline{AB}$ tangente nel punto $A \equiv B$

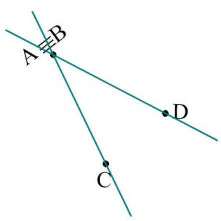
fig.2.5.7



$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$

con $A \equiv B$

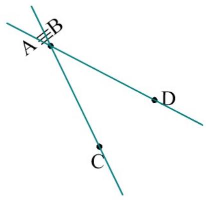
fig.2.5.8



$\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$

con $A\equiv B$

fig.2.5.9



la conica coincide con la precedente

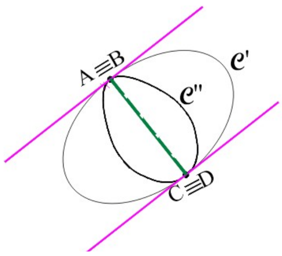
Si hanno due coniche degeneri coincidenti più una distinta
Dalla combinazione di coppie di coniche, generali o degeneri, passanti per i quattro punti A,B,C,D si possono scrivere le seguenti equazioni di fasci di coniche.

$\mathscr{C}'+k\cdot\mathscr{C}''=0$ $\quad$ $\mathscr{C}'+k\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}=0$ $\quad$ $\mathscr{C}'+k\cdot\overline{AD}\cdot\overline{CB}=0$ $\quad$ $\mathscr{C}''+k\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}=0$

$\mathscr{C}''+k\cdot\overline{AD}\cdot\overline{CB}=0$ $\quad$ $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+k\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}=0$

1.3 2 punti base coincidenti più 2 coincidenti

fig.2.5.10



le due coniche generali, non degeneri $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ sono tangenti nei punti di intersezione coincidenti $A\equiv B$ e $C\equiv D$.
Le coniche degeneri, come al solito sono date dal prodotto di due rette che congiungono, due a due, tutti e quattro i punti A,B,C,D.
In questo caso le due rette $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono coincidenti essendo $A\equiv B$ e $C\equiv D$

Le combinazioni possibili di coppie di punti congiunti da una retta sono:

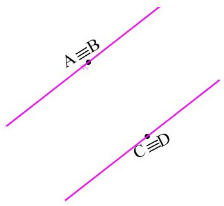
A ≡ B C ≡ D

l'altra retta congiunge gli altri due punti.

si hanno così le seguenti coniche degeneri

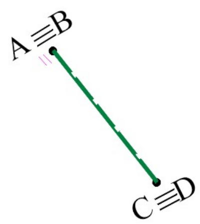
$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$
con $\overline{AB}$ tangente in $A \equiv B$
$\overline{CD}$ tangente in $C \equiv D$

fig.2.5.11



$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$
con $A \equiv B$ e $C \equiv D$

fig.2.5.12

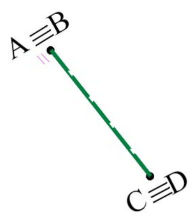


per cui
$\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ ne viene che la conica si traduce nella equazione della retta $\overline{AC}$ oppure $\overline{BD}$ moltiplicata per se stessa:

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = 0$$

$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$
con $A \equiv B$ e $C \equiv D$

fig.2.5.13



per cui

$\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ ne viene che la conica si traduce nella equazione della retta $\overline{AC}$ oppure $\overline{BD}$ moltiplicata per se stessa:

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = 0$$

la conica degenere è coincidente con la precedente

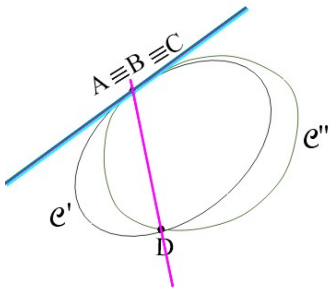
Dalla combinazione di coppie di coniche, generali o degeneri, passanti per i quattro punti A,B,C,D si possono scrivere le seguenti equazioni di fasci di coniche.

$\mathscr{C}' + k \cdot \mathscr{C}'' = 0$ $\quad \mathscr{C}' + k \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$ $\quad \mathscr{C}' + k \cdot \left(\overline{AC}\right)^2 = 0$ $\quad \mathscr{C}'' + k \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$

$\mathscr{C}'' + k \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$ $\quad \mathscr{C}'' + k \cdot \left(\overline{AC}\right)^2 = 0$ $\quad \overline{AD} \cdot \overline{BC} + k \cdot \left(\overline{AC}\right)^2 = 0$

1.3 3 punti base coincidenti più 1 distinto

fig.2.5.14



le due coniche generali, non degeneri $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ sono tangenti nel punto triplo $A \equiv B \equiv C$
Le coniche degeneri, come al solito sono date dal prodotto di due rette che congiungono, due a due, tutti e quattro i punti A,B,C,D.

In questo caso le tre rette $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ sono coincidenti essendo $A \equiv B \equiv C$

Le combinazioni possibili di coppie di punti congiunti da una retta sono:

A ≡ B ≡ C D

l'altra retta congiunge gli altri due punti.

si hanno così le seguenti coniche degeneri:

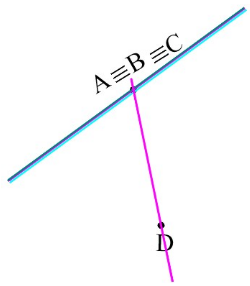
$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$

$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$

$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$

essendo coincidenti le rette $\overline{AB} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{BC}$ risulta:

fig.2.5.15



$\overline{AB}\cdot\overline{CD} \equiv \overline{AC}\cdot\overline{BD} \equiv \overline{AD}\cdot\overline{BC}$

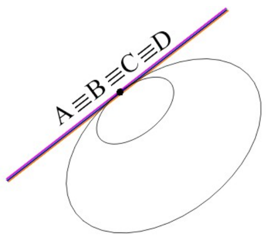
Si hanno tre coniche degeneri coincidenti.
In pratica si può si può ricavare una sola conica degenere

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 0$$

Dalla combinazione di coppie di coniche, generali o degeneri, passanti per i quattro punti A,B,C,D si possono scrivere le seguenti equazioni di fasci di coniche.

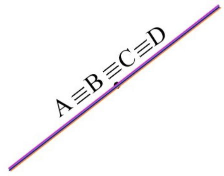
$\mathscr{C}' + k\cdot\mathscr{C}''=0 \quad \mathscr{C}' + k\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 0 \quad \mathscr{C}'' + k\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 0$

1.4 4 punti base coincidenti
fig.2.5.16



Le due coniche generali, non degeneri $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ sono tangenti nel punto quadruplo $A \equiv B \equiv C \equiv D$
Le coniche degeneri, come al solito sono date dal prodotto di due rette che congiungono, due a due, tutti e quattro i punti A,B,C,D.
In questo caso le quattro rette $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ sono coincidenti essendo $A \equiv B \equiv C \equiv D$

Si ha così una sola conica degenere costituita dalla scola retta tangente nel punto quadruplo $A \equiv B \equiv C \equiv D$ contata due volte



$$\left(\overline{AB}\right)^2 = 0$$

Dalla combinazione di coppie di coniche, generali o degeneri, passanti per i quattro punti A,B,C,D si possono scrivere le seguenti equazioni di fasci di coniche.

$\mathscr{C}' + k\cdot\mathscr{C}''=0 \quad \mathscr{C}' + k\cdot\left(\overline{AB}\right)^2 = 0 \quad \mathscr{C}'' + k\cdot\left(\overline{AB}\right)^2 = 0$

Avanti... Clic qui per continuare

Indietro... Clic per la pagina iniziale