

[Clic per tutti gli appunti](#) (AUTOMAZIONE – TRATTAMENTI TERMICI ACCIAIO – SCIENZA delle COSTRUZIONI...)



[e-mail per suggerimenti](#)

[Clic qui](#) – PRIMA PAGINA APPUNTI ACCIAIO

2.6- Instabilità flesso - torsionale

(Normativa NTC 2018 – NTC 2008 – circolare n°617 del 2009 – normativa EC3)

Una trave I o H, sottoposta a flessione sul piano dell'anima, ha un'ala (piattabanda) tesa ed una compressa. Questa, se è snella e non è sufficientemente vincolata lateralmente, tende a svergolarsi, subendo una torsione.

Superati dei limiti geometrici (vedi oltre) occorre eseguire una verifica all'instabilità flesso – torsionale.

Si indichi con:

M_{Ed} il massimo momento flettente di calcolo;

$M_{b,Rd}$ il momento resistente di progetto per l'instabilità.

Per la verifica di resistenza deve risultare:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1 \quad (2.6.1)$$

Il momento resistente $M_{b,Rd}$ per fenomeni di instabilità di una trave lateralmente non vincolata è espresso dalla formula:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot W_y \cdot \frac{f_{yk}}{\gamma_{M1}} \quad (2.6.2)$$

con $\gamma_{M1} = 1,05$

Dove W_y è il modulo di resistenza plastico $W_{y,pl}$ rispetto all'asse y per le sezioni di classe 1,2; il modulo di resistenza elastico $W_{y,el}$ rispetto all'asse y per le sezioni di classe 3 e di classe 4, considerando in quest'ultima la sezione efficace.

Il fattore χ_{LT} è il coefficiente di riduzione per l'instabilità flesso – torsionale. Per i profilati laminati o composti saldati è dato dalla espressione:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \cdot \frac{1}{f} \end{cases} \quad (2.6.3)$$

Elementi della formula (2.6.3)

$\bar{\lambda}_{LT}$ Coefficiente di snellezza adimensionale.

È il parametro che indica il grado di instabilità flessione – torsionale. È dato dalla formula:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_{yk}}{M_{cr}}}$$

dove:

W_y è il modulo di resistenza plastico per le sezioni di classe 1,2, di resistenza elastico per le sezioni di classe 3 e 4, considerando per quest'ultima la sezione efficace.

M_{cr} è il momento critico elastico di instabilità torsionale, considerando la sezione lorda del profilo. Il momento critico M_{cr} verrà, di seguito, calcolato secondo le normative EC3 e la normativa italiana NTC (vedi oltre).

È da notare che il prodotto $W_y \cdot f_{yk}$ rappresenta il momento resistente caratteristico della sezione, in assenza di instabilità flessione – torsionale. Ne risulta che, la snellezza adimensionale (relativa) $\bar{\lambda}_{LT}$ della sezione è tanto più piccola quanto maggiore è il momento critico M_{cr} rispetto a quello caratteristico $W_y \cdot f_{yk}$.

Secondo la normativa EC3, si può trascurare l'effetto della instabilità flessione – torsionale quando risulta:

$$\bar{\lambda}_{LT} \leq 0,4$$

f Parametro dipendente dalla distribuzione del momento sull'asse. Il parametro f tiene conto della diversa distribuzione del momento sull'asse della membratura attraverso l'espressione:

$$f = 1 - 0,5 \cdot (1 - k_c) \cdot \left[1 - 2,0 \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right] \quad (2-6.4)$$

Nell'espressione (2.6.4) il coefficiente k_c è il parametro correttivo che tiene conto della reale distribuzione del momento flettente sull'asse. I suoi valori sono riportati nella tabella 4.2.VIII in funzione della distribuzione del momento flettente.

Per una distribuzione uniforme del momento, risulta $k_c = 1$ e, sostituendo nella (2.4.6) si ha $f = 1$

Nel caso di diverse distribuzioni, si considera quella che fornisce un k_c più elevato, che determina un coefficiente f maggiore, da cui ne risulta un fattore χ_{LT} minore, e quindi il più piccolo momento resistente $M_{b,Rd}$, corrispondente al caso più critico (vedere esempio).

Ovviamente il caso più svantaggioso del valore del parametro f , riguardo al momento resistente, è quello che si ha con distribuzione uniforme del momento di sollecitazione, ove risulta $f = 1$


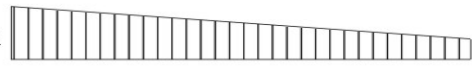






Tabella 4.2.VII definizione delle curve di instabilità per le varie tipologie di sezione per gli elementi inflessi

Sezione trasversale	Limiti	Curva di instabilità da tab.4.2.VI
Sezioni laminati ad I	$h/b \leq 2$	b
	$h/b > 2$	c
Sezione composta saldata	$h/b \leq 2$	c
	$h/b > 2$	d
Altre sezioni trasversali	–	d

Ultime due righe della tabella 4.2.VI

Curva di instabilità	a_0	a	b	c	d
Fattore di imperfezione α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Tabella 4.2.VIII coefficiente correttivo del momento flettente per la verifica a stabilità della travi inflesse.

Distribuzione del momento flettente	Fattore correttore k_c
M_{sx}  M_{dx} $\psi = M_{dx} / M_{sx} = 1$	1,0
M_{sx}  M_{dx} $-1 \leq \psi \leq 1$	$\frac{1}{1.33 - 0.33\psi}$
	0,94
	0,90
	0,91
	0,86
	0,77
	0,82

Φ_{LT} Parametro dipendente dalla snellezza adimensionale e dal fattore di imperfezione α_{LT} .

È espresso dalla formula:

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - \bar{\lambda}_{LT0}) + \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] \quad (2.6.5)$$

dove il parametro $\bar{\lambda}_{LT0}$ può essere assunto generalmente uguale a 0,2, comunque mai superiore a 0,4.

Assumendo il valore 0,2 si hanno condizioni più gravose rispetto a valori maggiori, in quanto si ottengono valori più alti di Φ_{LT} e quindi minori del fattore χ_{LT} , con conseguente valore minore del momento resistente $M_{b,Rd}$.

Il coefficiente β può essere fissato, generalmente, uguale a 1; comunque non inferiore a 0,75.

Dopo tali considerazioni, nelle applicazioni assumeremo la formula:

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] \quad (2.6.6)$$

α_{LT} fattore di imperfezione

Come per le aste compresse, per gli elementi inflessi, sono definite, in base al rapporto $\frac{h}{b}$, differenti curve di instabilità, indicate con le lettere: b, c, d tabella 4.2.VII.

In base alla lettera indicante la curva di instabilità (b, c, d) si ricava il fattore di imperfezione α_{LT} dalla ultima riga in fondo della precedente tabella 4.2.VI utilizzata per le aste compresse (nella tabella il fattore è indicato con α).

Esempio

Profilato IPE 270

$h=270$

$b=135$

$$\frac{h}{b} = \frac{270}{135}$$

$$\frac{h}{b} = 2$$

Dalla tabella 4.2.VII per $\frac{h}{b} = 2$ è definita la curva di instabilità b

Ultime due righe della tabella 4.2.VI

Curva di instabilità	a_0	a	b	c	d
Fattore di imperfezione α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Consultando le ultime due righe della tabella 4.2.VI, in corrispondenza della curva di instabilità *b* si ha:

$$\alpha_{LT} = 0,34$$

Riassumendo il procedimento di calcolo per la determinazione del il momento resistente di progetto per l'instabilità $M_{b,Rd}$:

1° si determina il momento critico elastico M_{cr} di instabilità torsionale vedi oltre (punti 2.6.1 e 2.6.2)

2° si determina il coefficiente di snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_{LT}$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_{yk}}{M_{cr}}}$$

3° si determina il parametro f

$$f = 1 - 0,5 \cdot (1 - k_c) \cdot \left[1 - 2,0 \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right]$$

dove k_c si ricava dalla tabella 4.2.VIII in funzione dell'andamento del momento flettente sull'asse

4° si determina il parametro Φ_{LT}

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

dove il coefficiente di imperfezione α_{LT} si determina dalle ultime due righe della Tabella 4.2.VI a seconda della curva di instabilità (*b,c,d*) ricavata dalla Tabella 4.2.VII in funzione del rapporto $\frac{h}{d}$

5° si determina il fattore χ_{LT} di riduzione del momento resistente per l'instabilità

$$\chi_{LT} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \cdot \frac{1}{f} \end{cases}$$

6° si determina il momento resistente per l'instabilità $M_{b,Rd}$

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot W_y \cdot \frac{f_{yk}}{\gamma_{M1}}$$

7° per la verifica deve risultare:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1$$

2.6.1- Momento critico elastico di instabilità torsionale – normativa EC3

Per la determinazione del momento critico elastico di instabilità torsionale M_{cr} si fa qui riferimento alla normativa “Eurocodice 3 – appendice F.”

Si considera il caso più usuale di travi con sezioni trasversali doppiamente simmetriche rispetto ai due assi. In tal caso la formula di M_{cr} è:

$$M_{cr} = C_1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E I_z}{(k L)^2} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{k}{k_w} \right)^2 \cdot \frac{I_w}{I_z} + \frac{(k L)^2 \cdot G I_t}{\pi^2 \cdot E I_z} - (C_2 z_g)} - C_2 z_g \right) \quad (2.6.7)$$

dove:

I_z Momento d'inerzia intorno all'asse debole z

L lunghezza della trave tra impunti che hanno vincolo laterale.

Occorre notare che i tratti di trave nei quali, il diagramma del momento flettente subisce discontinuità alle sue estremità non vincolate, si possono sostituire con tratti equivalenti, sollecitati dagli stessi carichi, aggiungendo agli estremi i momenti flettenti e gli sforzi di taglio

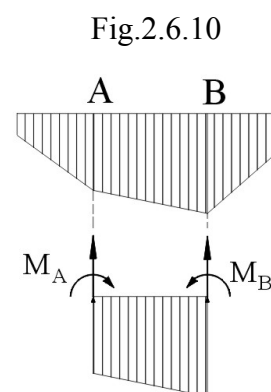


Fig.2.6.10

I_t Costante di torsione.

Nel caso di profilattiche si possono scomporre in più rettangoli risulta:

$$I_t = \frac{I}{3} \sum a_i \cdot t_i^3$$

I_w Costante di ingobbamento.

Per profilati semplici a I o H, senza irrigidimenti di bordo, la costante è espressa da:

$$I_w = \frac{I_z \cdot (h - t_f)^2}{4}$$

Per approfondimento consultare seguente punto 2.6.2.1 relativo a "Alcune note sulla rigidità torsionale".

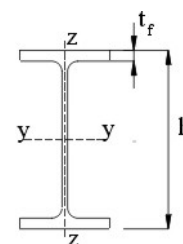
Per profilati diversi consultare l'appendice F - Eurocodice 3

k_w coefficiente di lunghezza efficace nei confronti dell'ingobbamento di un estremo.











Si ha:

- 0,5 per incastro completo
- 0,7 un estremo incastrato e uno libero
- 1 non vi è incastro

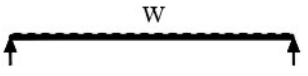

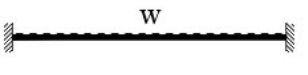






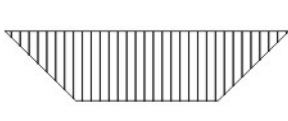
Fig.6.10.a



Prospetto F 1.1 Valori dei coefficienti C_1 , C_2 , C_3 corrispondenti ai valori del coefficiente k :
momento all'estremità

Condizioni di carico e di vincolo	Diagramma del momento flettente	Valore di k	Valori dei coefficienti			
			C_1	C_2	C_3	
	$\psi = +1$ 	1,0 0,7 0,5	1,000 1,000 1,000	-	1,000 1,113 1,144	
	$\psi = +3/4$ 	1,0 0,7 0,5	1,141 1,270 1,305	-	0,998 1,565 2,283	
	$\psi = +1/2$ 	1,0 0,7 0,5	1,323 1,473 1,514	-	0,992 1,556 2,271	
	$\psi = +1/4$ 	1,0 0,7 0,5	1,563 1,739 1,788	-	0,977 1,531 2,235	
	$\psi = 0$ 	1,0 0,7 0,5	1,879 2,092 2,150	-	0,939 1,473 2,150	
	$\psi = -1/4$ 	1,0 0,7 0,5	2,281 2,538 2,609	-	0,855 1,340 1,957	
	$\psi = -1/2$ 	1,0 0,7 0,5	2,704 3,009 3,093	-	0,676 1,059 1,546	
	$\psi = -3/4$ 	1,0 0,7 0,5	2,927 3,009 3,093	-	0,366 0,575 0,837	
	$\psi = -1$ 	1,0 0,7 0,5	2,752 3,063 3,149	-	0,000 0,000 0,000	
	Per $k = 1$ $C_1 = 1,88 - 1,40 \cdot \psi + 0,52 \cdot \psi^2$					
	con $C_1 \leq 2,70$ $ \psi = \left \frac{M_{min}}{M_{max}} \right $					

Prospetto F 1.2 Valori dei coefficienti C_1, C_2, C_3 corrispondenti ai valori del coefficiente K : casi di carico trasversale

Condizione di carico e di vincolo	Diagramma del momento flettente	Valori di k	Valori dei coefficienti		
			C_1	C_2	C_3
		1,0 0,5	1,132 0,972	0,459 0,304	0,525 0,980
		1,0 0,5	1,285 0,712	1,562 0,652	0,753 1,070
		1,0 0,5	1,365 1,070	0,553 0,432	1,730 3,050
		1,0 0,5	1,565 0,938	1,267 0,715	2,640 4,800
		1,0 0,5	1,046 1,010	0,430 0,410	1,120 1,890

k coefficiente di lunghezza efficace nei confronti della rotazione di un estremo nel piano.

Si ha:

- 0,5 per incastro completo
- 0,7 un estremo incastrato e uno libero
- 1 non vi è incastro

z_g differenza tra la coordinata z_a del punto ove viene applicato il carico e quella z_s del centro di taglio.

$$z_g = z_a - z_s$$

Per carichi di gravità z_g è positivo per carichi applicati al disopra del centro di taglio. Nel caso generale z_g è positivo per carichi che agiscono dal loro punto di applicazione verso il centro di taglio

C_1, C_2 Coefficienti dipendenti dalle condizioni di carico e di vincolo all'estremo.

Sono portati i valori di C_1, C_2 nei prospetti F.1.1 e F.1.2 nei vari casi di carico, quali vengono indicati dalla forma del diagramma del momento flettente sulla lunghezza L tra i vincoli laterali e in funzione del coefficiente k .

Nel prospetto F.1.1, nei casi in cui $k = 1$, qualunque sia il rapporto dei momenti agli estremi, il valore di C_1 è dato dalla espressione:

$$C_1 = 1,88 - 1,40 \cdot \psi + 0,52 \cdot \psi^2$$

con $C_1 \leq 2,70$

dove ψ è il rapporto tra il momento minore in valore assoluto e quello maggiore, assunti poi con segno.

$$|\psi| = \left| \frac{M_{min}}{M_{max}} \right|$$

Per la condizione di carico di momenti agli estremi è $C_2 = 0$ e per carichi trasversali applicati nel centro di taglio risulta $z_g = 0$. In questi due casi risulta nullo il contributo $C_2 \cdot z_g$ nella espressione (2.6.7) del momento resistente.

Considerando il caso molto usuale in cui il taglio V passa per il centro di taglio, l'espressione del momento critico elastico di instabilità torsionale $M_{b,rc}$ è:

$$M_{cr} = C_1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E I_z}{(kL)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \cdot \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 \cdot G I_t}{\pi^2 \cdot E I_z}} \quad (2.6.8)$$

Obbligatorietà della verifica a flessione torsione

Dalla snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_{LT}$, dipende l'instabilità flessione-torsionale che è tanto più piccola quanto minore risulta $\bar{\lambda}_{LT}$.

Si può trascurare l'effetto della instabilità flessione-torsionale quando:

$$\bar{\lambda}_{LT} \leq 0,4 \quad (2-6.9)$$

Momento critico elastico di instabilità torsionale – normativa italiana NTC 2018 – NTC 2008 e integrazione, secondo la circolare n° 617 2009

Nella circolare di integrazione alla normativa NTC, punto C.4.2.4.1.3.2, per il momento critico M_{cr} , necessario per la determinazione della snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_{Lt}$, è proposta l'espressione:

$$M_{cr} = \psi \cdot \frac{\pi}{L_{cr}} \sqrt{E J_z \cdot G J_T} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{L_{cr}} \right)^2 \cdot \frac{E J_\omega}{G J_T}} \quad (2.6.10)$$

dove:

L_{cr} è la lunghezza di libera inflessione laterale;

J_z è il momento d'inerzia assiale rispetto all'asse debole. $E J_z$ è definita rigidezza flessionale rispetto all'asse debole.

Occorre notare che nella normativa NTC tale momento d'inerzia è indicato genericamente con J_y , specificando, poi, che va calcolato rispetto all'asse debole. Qui è indicato con J_z

J_T è la costante torsionale. $G J_T$ è definita rigidezza torsionale; Per i profilati che si possono scomporre in porzioni rettangolari sottili, di ampiezza a_i e spessore t_i la costante torsionale è:

$$J_T = \frac{I}{3} \cdot \sum a_i t_i^3 \quad (2.6.11)$$

ψ è coefficiente che tiene conto della distribuzione del momento flettente lungo l'asse della trave ed è espresso dalla formula:

$$\psi = 1,75 - 1,05 \cdot \frac{M_B}{M_A} + 0,3 \cdot \left(\frac{M_B}{M_A} \right)^2 \quad (2.6.12)$$

con M_A, M_B momenti flettenti agenti agli estremi del tratto L_{cr} considerato della trave con $|M_B| < |M_A|$.

J_ω è la costante di ingobbamento.

Per i profilati I, H è:

$$J_\omega = \frac{I}{24} \cdot t_f \cdot b^3 \cdot h_a^2$$

$$\text{Unità di misura} \quad [J_\omega] = \text{cm}^6$$

con h_a distanza tra gli assi delle due ali. Con buona approssimazione si può porre :

$$h_a \cong h$$

$E J_\omega$ è definita rigidezza torsionale secondaria del profilo (vedi oltre)

-----0-----

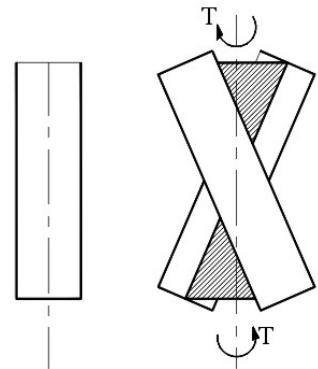
2.6.2.1- Alcune note sulla rigidezza torsionale secondaria per i profilati I e H (approfondimento)

Consideriamo un profilato di tipo I o H, sollecitato da una torsione uniforme, determinata da un momento torcente T .

Distinguiamo il caso in cui il profilato si deformi liberamente per effetto del momento torcente T , senza vincoli di ostacolo all'ingobbamento, da quello in cui questo sia impedito in una sezione.

Nel primo caso, con libero ingobbamento, il momento torcente applicato è equilibrato da tensioni tangenziali interne, simili a quelle che si hanno nelle sezioni circolari, con l'effetto della rotazione in senso opposto delle due ali di estremità, non vincolate, come è rappresentato schematicamente in figura. In questo caso le ali non subiscono flessione lungo la loro lunghezza.

Fig.2.6.32a



L'espressione del momento torcente è analoga, formalmente, a quella di S. Venant per le sezioni circolari:

Fig.2.6.33

$$T = G \cdot J_T \cdot \frac{d\alpha}{dx} \quad (2.6.13)$$

e per una T costante in un tratto l :

$$T = G \cdot J_T \cdot \frac{\alpha}{l}$$

Dove J_T è la costante torsionale (al posto del momento d'inerzia polare che si ha nelle sezioni circolari)

$$J_T = \frac{l}{3} \cdot \sum a_i \cdot t_f^3 \quad (2.6.14)$$

Il prodotto $G J_T$ è definito rigidezza torsionale

L'espressione (2.6.13) è il momento torcente interno principale di reazione a quello esterno, nel caso in cui il profilato possa deformarsi liberamente senza vincoli di ostacolo all'ingobbamento.

Consideriamo ora il caso in cui il profilato a I o H, incastrato ad un estremo e libero all'altro, sia sottoposto in questo ad un momento torcente T .

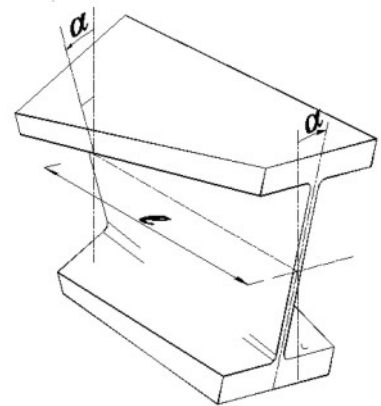


Fig.2.6.35

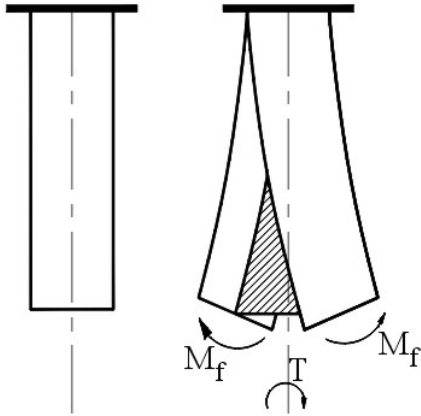
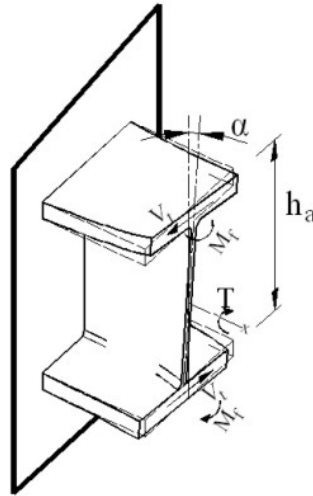


Fig.2.6.34



Per effetto del momento torcente, come è rappresentato schematicamente in figura Fig.2.6.35, l'estremo libero subisce una rotazione con sbandamento laterale in senso opposto delle due ali, mentre l'estremo incastrato non può subire né rotazioni né spostamenti. Ne viene che le due ali, sono soggette ad un momento flettente M_f attorno al loro asse forte z , variabile lungo il loro asse "x".

Si ha così un incurvamento variabile delle due ali: nullo all'incastro (raggio infinito) e massimo all'estremità libera (raggio minimo). Indicando con r il raggio di curvatura di un'ala alle distanza x dall'incastro, si ha:

$$\frac{1}{r} = - \frac{M_f}{E \cdot J_{a,z}} \quad (2.6.15)$$

dove $J_{a,z}$ è il momento d'inerzia assiale dell'ala rispetto all'asse neutro z di flessione:

$$J_{a,z} = \frac{1}{12} \cdot t_f \cdot b^3$$

Il rapporto $\frac{1}{r}$ è la curvatura variabile che subisce l'ala lungo il suo asse.

Fig.2.6.36

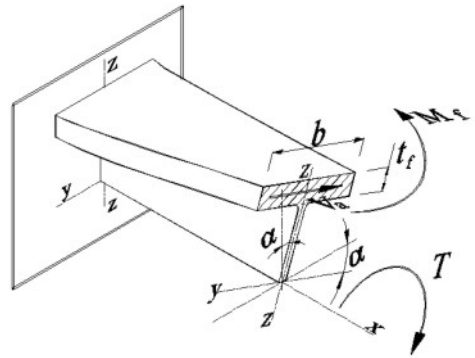
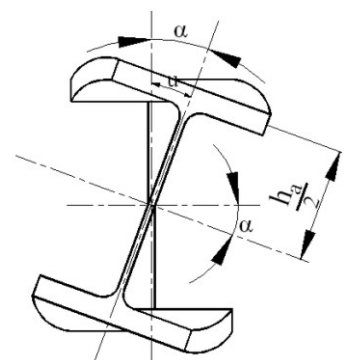


Fig.2.6.37

All'angolo di torsione α in una sezione generica, corrisponde, in questa, uno spostamento u dell'asse dell'ala rispetto all'asse del profilato.

Con buona approssimazione, per piccole deformazioni elastiche, la curvatura è espressa dalla derivata seconda dello spostamento u che subisce l'asse dell'ala rispetto all'asse del profilato lungo l'asse x di questo:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2u}{dx^2} \quad (2.6.16)$$



Indichiamo con α l'angolo di torsione in una sezione generica distante x da quella incastrata, presa come riferimento. Esso è variabile lungo l'asse: nullo all'incastro e massimo all'estremo libero.

Indicando con h_a la distanza tra gli assi delle due ali:

$$h_a = h - t_f$$

lo spostamento u , corrispondente ad α è:

$$u = \alpha \cdot \frac{h_a}{2} \quad (2.6.17)$$

sostituendo nella (2.6.16) si ha:

$$\frac{1}{r} = \frac{h_a}{2} \cdot \frac{d^2\alpha}{dx^2} \quad (2.6.18)$$

confrontando con la (2.6.15) si ha:

$$-\frac{M_f}{E \cdot J_a} = \frac{h_a}{2} \cdot \frac{d^2\alpha}{dx^2}$$

da cui:

$$M_f = -E J_a \cdot \frac{h_a}{2} \cdot \frac{d^2\alpha}{dx^2} \quad (2.6.19)$$

Il momento flettente M_f , sollecitato in senso opposto sulle due ali, è variabile lungo il loro asse x ; per cui, su ciascuna di esse, si ha la comparsa di uno sforzo di taglio V_a :

$$V_a = \frac{dM_f}{dx}$$

sostituendo si ha:

$$V_a = -E J_{a,z} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{d^3\alpha}{dx^3} \quad (2.6.20)$$

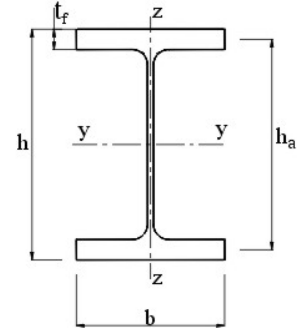
I due sforzi di taglio di reazione V_a in senso contrario sulle ali, agenti con un braccio h_a rispetto all'asse del profilato, determinano un momento torcente supplementare secondario T_s , da sommare al momento torcente primario T_p , dato dalla espressione di S. Venant (2.6.13).

Lo sforzo di taglio secondario è:

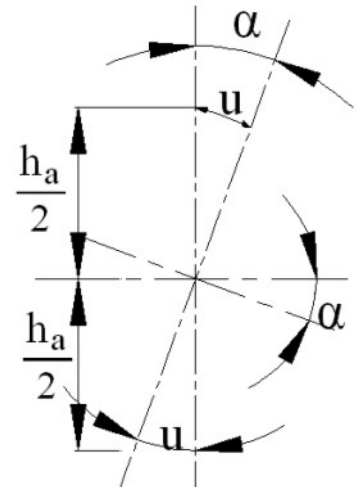
$$T_s = V_a \cdot h_a$$

sostituendo si ha:

Fig.2.6.6



2.6.38



$$T_s = -E J_{a,z} \cdot \frac{h_a^2}{2} \frac{d^3 \alpha}{dx^3} \quad (2.6.21)$$

Si dà nome di *coefficiente di ingobbamento* J_ω all'espressione costante:

$$J_\omega = J_{a,z} \cdot \frac{h_a^2}{2} \quad (2.6.22)$$

Si definisce *rigidezza torsionale secondaria* l'espressione:

$$E J_\omega = E J_{a,z} \cdot \frac{h_a^2}{2}$$

Per i profilati I, H, il coefficiente di ingobbamento J_ω è:

$$J_\omega = J_{a,z} \cdot \frac{h_a^2}{2} \quad (2.6.22)$$

con J_a momento d'inerzia assiale rispetto all'asse forte z :

$$J_{a,z} = \frac{I}{12} \cdot t_f \cdot b^3 \quad \text{sostituendo si ha}$$

$$J_\omega = \frac{I}{24} \cdot t_f \cdot b^3 \cdot h_a^2 \quad (2.6.23)$$

con buona approssimazione si può porre $h_a \cong h$

Il coefficiente di ingobbamento J_ω è la costante da cui dipende lo sforzo di taglio secondario.

Unità di misura di J_ω : $[J_\omega] = \text{cm}^6$

Occorre notare che l'espressione del coefficiente di ingobbamento J_ω , utilizzato nella normativa NTC, è approssimativamente uguale a quello I_w utilizzato nella normativa EC3

Infatti, l'espressione (2.6.2.3) si può esprimersi nella forma:

$$J_\omega = \frac{I}{4} \cdot \frac{t_f \cdot b^3}{6} \cdot h_a^2 \quad (2.6.24)$$

dove:

$$h_a = (h - t_f) \quad (2.6.25)$$

Il momento d'inerzia I_z del profilato rispetto all'asse debole z è:

$I_z = \text{momento d'inerzia delle ali} + \text{momento d'inerzia dell'anima}$

$$I_z = 2 \cdot \frac{I}{12} \cdot t_f \cdot b^3 + \text{momento d'inerzia dell'anima}$$

$$I_z = \frac{I}{6} \cdot t_f \cdot b^3 + \text{momento d'inerzia dell'anima}$$

Il momento d'inerzia dell'anima è trascurabile rispetto a quella delle ali; quindi con approssimazione si ha:

$$I_z \cong \frac{I}{6} \cdot t_f \cdot b^3 \quad (2.6.26)$$

sostituendo le (2.6.5), (2.6.2.6) nella (2.6.2.4) si ha:

$$J_\omega \cong \frac{I}{4} \cdot I_z \cdot (h - t_f)^2 = I_w$$

Risulta quindi:

$$J_\omega \cong I_w$$

-----o-----

2.6.2.2- Riassunto della verifica flessione - torsionale secondo la normativa NTC

Si riassume qui brevemente il procedimento per la verifica flessione - torsionale secondo la normativa NTC. Si procede come già spiegato, utilizzando la normativa EC3

1°- Si determina il momento critico M_{trc}

$$M_{cr} = \psi \cdot \frac{\pi}{L_{cr}} \sqrt{E J_z \cdot G J_T} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{L_{cr}} \right)^2 \cdot \frac{E J_\omega}{G J_T}} \quad (2.6.10)$$

con:

$$J_T = \frac{I}{3} \cdot \sum a_i t_i^3 \quad (2.6.14)$$

$$J_\omega = \frac{I}{24} \cdot t_f \cdot b^3 \cdot h_a^2 \quad (2.6.23)$$

2°- si ricava la snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_{LT}$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_{yk}}{M_{cr}}}$$

con W_y modulo di resistenza relativo al tipo di sezione

3°- si ricava il parametro f

$$f = 1 - 0,5 \cdot (1 - k_c) \cdot \left[1 - 2,0 \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right]$$

dove k_c si ricava dalla tabella 4.2.VIII in funzione dell'andamento del momento flettente sull'asse

4°- si determina il parametro Φ_{LT}

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

dove il coefficiente di imperfezione α_{LT} si determina dalle ultime due righe della Tabella 4.2.VI a seconda della curva di instabilità (b, c, d) ricavata dalla Tabella 4.2.VII

in funzione del rapporto $\frac{h}{b}$

5°- si determina il fattore χ_{LT} di riduzione del momento resistente per l'instabilità

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi} \cdot \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \cdot \frac{1}{f} \end{cases}$$

6°- si determina il momento resistente per l'instabilità $M_{b,Rd}$

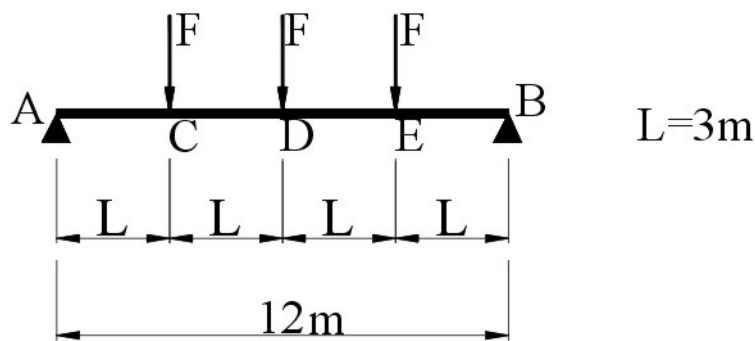
$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot W_y \cdot \frac{f_{yk}}{\gamma_{M1}}$$

7° per la verifica deve risultare:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1$$

Esempio di verifica flesso – torsionale.

Fig.2.6.7



Nella figura è schematizzato una trave principale, semplicemente appoggiata agli estremi, sulla quale appoggiano tre travi secondarie che trasmettono uno sforzo, costituito da un carico permanente $G_1 = 9,5 \text{ kN}$ e uno accidentale $Q_1 = 12 \text{ kN}$.

La trave è in acciaio S 275

Dimensionare la trave, ed eseguire, se occorre, la verifica flesso torsionale.

---o---

Conviene eseguire un predimensionamento a semplice flessione retta, considerando un carico di snervamento ridotto $f'_{yk} < f_{yk}$.

Tenendo conto della lunghezza $L = 3 \text{ m}$ e totale di 12 m

Poniamo:

$$f'_{yk} = \frac{1}{2} f_{yk} \quad f'_{yk} = \frac{1}{2} \cdot 275 = 135,5 \text{ kN} / \text{mm}^2$$

Occorre inoltre, con delle piastre, irrigidire l'anima della trave, alle estremità e in corrispondenza dell'applicazione dei carichi F .

Si sceglie un profilato IPE, che generalmente ha una sezione di classe 1 o 2.

Per la verifica deve risultare:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd}} \leq 1$$

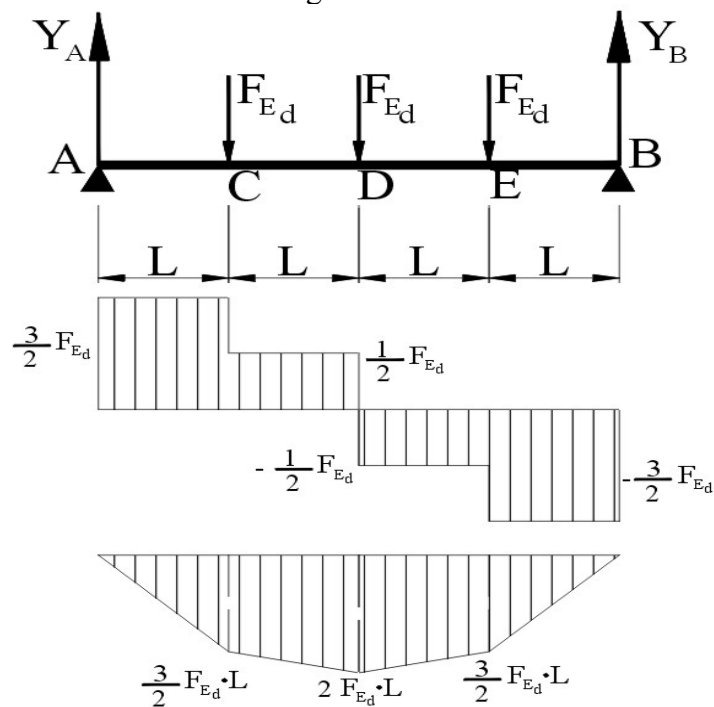
Per il predimensionamento si pone:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd}} = 1 \quad \text{e si ha:}$$

$$M_{c,Rd} = M_{Ed} \quad \frac{f'_{yk} \cdot W_{pl}}{\gamma_{M0}} = M_{Ed}$$

da cui ricava W_{pl} e quindi il profilato IPE

Fig.2.6.8



Calcolo del momento di progetto M_{Ed}

Forza di progetto F_{Ed} dovuto ai carichi G_1 e Q_1

$$F_{Ed} = G_1 \cdot \gamma_{G1} + Q_1 \cdot \gamma_{Q1}$$

dove per SLU di tipo SRT è:

$$\begin{cases} \gamma_{G1} = 1,3 \\ \gamma_{Q1} = 1,5 \end{cases}$$

$$F_{Ed} = 9,5 \cdot 1,3 + 12 \cdot 1,5$$

$$F_{Ed} = 30,35 \text{ kN}$$

Momento di progetto M_{Ed}

Risulta:

per simmetria: $Y_A = Y_B = \frac{3 F_{Ed}}{2}$

Momento in C:

$$M_{Ed,C} = Y_A \cdot L \quad M_{Ed,C} = \frac{3 F_{Ed}}{2} \cdot L \quad M_{Ed,C} = \frac{3 \cdot 30,35}{2} \cdot 3$$

$$M_{Ed,C} = 136,57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Momento in D:

$$M_{Ed,D} = Y_A \cdot 2L - F_{Ed} \cdot L \quad M_{Ed,D} = \frac{3 F_{Ed}}{2} \cdot 2L - F_{Ed} \cdot L$$

$$M_{Ed,D} = 2 F_{Ed} \cdot L \quad M_{Ed,D} = 2 \cdot 30,35 \cdot 3$$

$$M_{Ed,D} = 182 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Momento in E:

$$M_{Ed,E} = M_{Ed,C} = \frac{3 F_{Ed}}{2} \cdot L = 136,57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Momento massimo è:

$$M_{Ed,max} = M_{Ed,D}$$

Momento di progetto relativo i carichi F_{Ed} si pone uguale al momento massimo di progetto

$M_{Ed,max}$:

$$M_{Ed,max} = M_{Ed,D} = 2 F_{Ed} \cdot L$$

$$M_{Ed,max} = 182 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Posto $\frac{M_{Ed,max}}{M_{c,Rd}} = 1 \quad \Rightarrow \quad M_{c,Rd} = M_{Ed,max}$

$$\frac{f'_{yk} \cdot W_{pl,y}}{\gamma_{M0}} = M_{Ed,max} \quad \Rightarrow \quad W_{pl,y} = \frac{M_{Ed,max} \cdot \gamma_{M0}}{f'_{yk}}$$

$$W_{pl,y} = \frac{182 \cdot 10^6 \cdot 1,05}{137,5} = 1389 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

si ha:

$$W_{pl,y} = 1389 \text{ cm}^3$$

$$S_y = \frac{1398}{2} = 659 \text{ cm}^3$$

Tenendo conto che si è fissato una tensione di snervamento basso, si sceglie il profilato IPE 400 con $W_{pl,y} = 1307 \text{ cm}^3$, $S_y = 654 \text{ cm}^3$. Parametri più vicini (anche se per difetto a quelli calcolati).

Occorre ora verificare se la trave sia sufficientemente vincolata lateralmente nei riguardi della piattabanda compressa, soggetta a flesso torsione, nel tratto L tra due piastre di irrigidimento dell'anima (e di stabilità laterale dell'ala compressa).

Si assume quindi come lunghezza di libera inflessione il tratto L tra le due piastre di irrigidimento, ove è più gravosa la distribuzione della tensione di flessione, indicata dal diagramma del momento flettente.

Per la verifica deve essere:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1$$

Caratteristiche del profilato IPE 400

Profilato IPE 400

$$h = 400 \text{ mm} = 40 \text{ cm}$$

$$b = 180 \text{ mm} = 18 \text{ cm}$$

$$t_f = 13,5 \text{ mm} = 1,3 \text{ cm}$$

$$t_w = 8,6 \text{ mm} = 0,86 \text{ cm}$$

$$A = 8450 \text{ mm}^2 = 84,5 \text{ cm}^2$$

$$h_w = 373 \text{ mm} = 37,3 \text{ cm}$$

$$I_y = 23130 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 1318 \text{ cm}^4$$

$$W_{pl,y} = 1307 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 654 \text{ cm}^3$$

$$W_{el,y} = 1156 \text{ cm}^3$$

$$G = 66,3 \text{ kg/m}$$

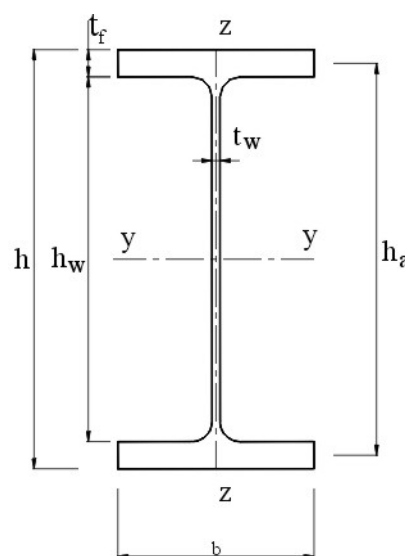


Fig.2.6.9

Per prima cosa occorre determinare la snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_{Lt}$ in base alla quale si può stabilire se occorre o meno la verifica flesso-torsionale. Essa non occorre se risulta:

$$\bar{\lambda}_{Lt} \leq 0,4 \quad \text{punto 5.5.2 (7) EC3}$$

$$\bar{\lambda}_{Lt} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_{yk}}{M_{cr}}} \quad (e1.1)$$

dove:

W_y è il modulo di resistenza a flessione rispetto all'asse y , relativo al tipo di classe della sezione.

M_{cr} è il momento critico di instabilità torsionale. Nell'esercizio proposto è ricavato secondo le due normative EC3 e NTC.

Momento critico M_{cr} e verifica secondo la normativa EC3

Si suppone che i carichi passino, ciascuno, per il centro di taglio; e quindi $C_2 = 0$.

Non vi sono incastri quindi $k = 1$. $k_w = 1$ Si ha:

$$M_{cr} = C_1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E I_z}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 \cdot G I_t}{\pi^2 \cdot E I_z}} \quad (e1.2)$$

Costante di ingobbamento I_w

$$I_w = \frac{I_z (h - t_f)^2}{4} \quad I_w = \frac{1318 \cdot (40 - 1,35)^2}{4}$$

$$I_w = 492214 \text{ cm}^6$$

Costante di torsione I_t

$$I_t = \frac{I}{3} \cdot \sum a_i \cdot t_f^3$$

$$I_t = \frac{I}{3} \cdot (2 \cdot b \cdot t_f^3 + h_w \cdot t_w^3) \quad I_t = \frac{I}{3} \cdot (2 \cdot 18 \cdot 1,35^3 + 37,3 \cdot 0,86^3)$$

$$I_t = 37,4 \text{ cm}^4$$

-----0-----

Nota

Per la prosecuzione del calcolo conviene, da qui in poi, che, nelle unità di misura delle grandezze ove compare la lunghezza, questa sia espressa in cm.

Così:

Modulo di elasticità longitudinale:

$$E = 210000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 210000 \cdot \frac{10^{-3} \text{ kN}}{10^{-2} \text{ cm}^2}$$

$$E = 21000 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Modulo di elasticità tangenziale:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{con } \nu = 0,3 \quad G = \frac{21000}{2 \cdot (1 + 0,3)}$$

$$G = 8077 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Tensione caratteristica di snervamento:

$$f_{yk} = 275 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 275 \cdot \frac{10^{-3} \text{ kN}}{10^{-2} \text{ cm}^2}$$

$$f_{yk} = 27,5 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

-----0-----

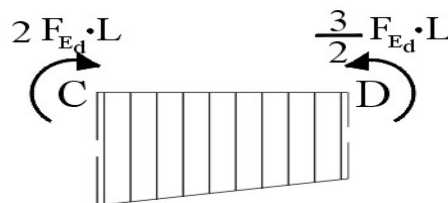
Coefficiente C_1 .

La trave presenta nei tratti AC, CD, DE, EB configurazioni diverse del momento flettente, con differenti momenti agli estremi.

Nel prospetto 4.7 è riportato il coefficiente C_1 in base al rapporto ψ tra il momento più piccolo e quello più grande posti agli estremi del tratto considerato, e in funzione del coefficiente k .

Fig.2.5.10

Per il calcolo del momento resistente, si considera il tratto DE (oppure CD) più sollecitati, che forniscono un coefficiente C_1 minore, da cui si ricava il momento resistente più piccolo (il più debole) da confrontare con quello di progetto.



Rapporto ψ tra il momento M_D di estremità minimo e quello M_C di estremità max.

$$\psi = \frac{M_D}{M_C} = \frac{M_B}{M_C} = \frac{\frac{3}{2} \cdot F_{Ed} \cdot L}{2 \cdot F_{Ed} \cdot L}$$

$$\psi = \frac{3}{4}$$

Con $k = 1$ e $\psi = \frac{3}{4}$ dal prospetto F.1.1 si ha:

$$C_1 = 1,141$$

-----0-----

Si ricorda che con $k=1$, estremi non incastrati, per un qualsiasi rapporto di momenti agli estremi, con approssimazione, il coefficiente C_1 si ottiene dall'espressione:

$$C_1 = 1,88 - 1,40 \cdot \psi + 0,52 \cdot \psi^2 \quad \text{con } C_1 \leq 2,70$$

-----0-----

Momento critico M_{cr} - normativa EC3

$$M_{cr} = C_1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E I_z}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 \cdot G I_t}{\pi^2 \cdot E I_z}} \quad (e1.1)$$

-----○-----

Nota

Ponendo nella formula le dimensioni lineari in cm e di forza in kN , si ottiene il valore di M_{cr} in $kN \cdot cm$

Infatti

$$[I_w] = cm^6 \quad [C_1] \text{ adimensionale}$$

$$[I_z] = cm^4 \quad [E] = \frac{kN}{cm^2}$$

$$[L] = cm \quad [G] = \frac{kN}{cm^2}$$

$$\left[C_1 \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2} \right] = \frac{kN}{cm^2} \cdot cm^4 \cdot \frac{1}{cm^2} = kN$$

$$\left[\frac{I_w}{I_z} \right] = \frac{cm^6}{cm^4} = cm^2$$

$$\left[\frac{L^2 \cdot G \cdot I_t}{\pi^2 \cdot E \cdot I_z} \right] = cm^2 \cdot \frac{kN}{cm^2} \cdot cm^4 \cdot \frac{1}{kN} \cdot \frac{1}{cm^4} = cm^2$$

quindi

$$\left[\sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 \cdot G \cdot I_t}{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}} \right] = \sqrt{cm^2} = cm$$

$$[M_{cr}] = \left[C_1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E I_z}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 \cdot G I_t}{\pi^2 \cdot E I_z}} \right] = kN \cdot cm$$

-----○-----

Sostituendo nella (e1.1) i parametri calcolati si ha:

$$M_{cr} = 1,141 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 1318}{300^2} \sqrt{\frac{492214}{1318} + \frac{300^2 \cdot 8077 \cdot 37,4}{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 1318}}$$

$$M_{cr} = 75360 \text{ kN} \cdot cm \quad (e1.3)$$

Snellezza adimensionale

$$\bar{\lambda}_{Lt} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_{yk}}{M_{cr}}} \quad \bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{1307 \cdot 27,5}{75360}}$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = 0,69 \quad (\text{e1.4})$$

Risulta:

$$\bar{\lambda}_{LT} > 0,4$$

Quindi necessita la verifica a flessione – torsione: punto 5.5.2 (7) EC3

Momento resistente di instabilità flessionale $M_{b,Rd}$

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot W_y \cdot \frac{f_{yk}}{\gamma_{M1}}$$

dove W_y è il modulo di resistenza a flessione plastico per le sezioni di classe 1, 2, elastico per le classi 3,4 riferita alla sezione efficace per quest'ultima ($W_{el,eff,y}$).

Classe del profilato

Sollecitazione a flessione retta

Classe dell'anima

Classe 1 $\frac{C}{t} \leq 72\varepsilon$

Classe 2 $\frac{C}{t} \leq 83\varepsilon$

Classe 3 $\frac{C}{t} \leq 124\varepsilon$

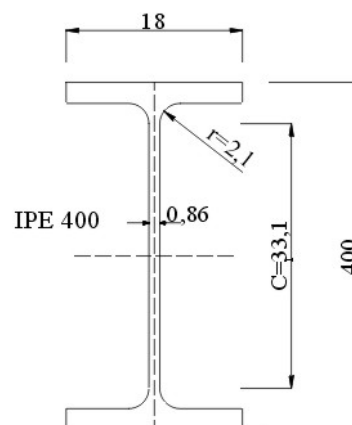
$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_{yk}}} = \sqrt{\frac{235}{275}} = 0,92$$

sostituendo si ha:

Classe 1 $\frac{C}{t} \leq 66,24$

Classe 2 $\frac{C}{t} \leq 76,36$

Fig.e1.1



$$\text{Classe 3} \quad \frac{C}{t} \leq 114$$

Per il profilato IPE 440 si ha:

$$C = h_w - 2r \quad C = 37,3 - 2 \cdot 2,1$$

$$C = 33,1 \text{ cm}$$

$$t = t_w = 0,86 \text{ cm}$$

$$\frac{C}{t} = \frac{33,1}{0,86} = 38,41$$

l'anima del profilato IPE 400 è di classe 1

Classe dell'ala

$$\text{Classe 1} \quad \frac{C}{t} \leq 9\varepsilon$$

$$\text{Classe 2} \quad \frac{C}{t} \leq 10\varepsilon$$

$$\text{Classe 3} \quad \frac{C}{t} \leq 14\varepsilon$$

Per $\varepsilon = 0,92$ si ha:

$$\text{Classe 1} \quad \frac{C}{t} \leq 8,28$$

$$\text{Classe 2} \quad \frac{C}{t} \leq 9,2$$

$$\text{Classe 3} \quad \frac{C}{t} \leq 12,9$$

Per il profilato IPE 440 si ha:

$$C = \frac{b}{2} - \frac{t_f}{2} - r \quad C = \frac{18}{2} - \frac{0,86}{2} - 2,1$$

$$C = 6,47$$

$$t = t_f = 1,35$$

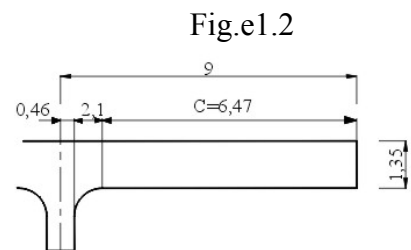
$$\frac{C}{t} = \frac{6,47}{1,35} = 4,79$$

L'ala del profilato IPE 400 è di classe 1

La sezione del profilato IPE 400 ha sezione di classe 1.

Si utilizza così, per la verifica, il modulo di resistenza plastico $W_{pl,y}$

Coefficiente di riduzione χ_{LT}



$$\chi_{LT} = \frac{I}{f} \cdot \frac{I}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} I \\ \frac{I}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \cdot \frac{I}{f} \end{cases} \quad (e1.5)$$

per sezioni di classe 1 $\beta = 1$

Coefficiente f di distribuzione del momento


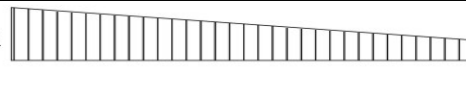
$$f = 1 - 0,5 \cdot (1 - k_c) \cdot \left[1 - 2,0 \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right]$$

Il coefficiente k_c è riportato nella tabella 4.2.VIII in funzione della distribuzione del momento flettente nel tratto considerato.

Rapporto ψ tra il momento M_D di estremità minimo e quello M_C di estremità max.

$$\psi = \frac{M_D}{M_C} = \frac{M_B}{M_C} = \frac{\frac{3}{2} \cdot F_{Ed} \cdot L}{2 \cdot F_{Ed} \cdot L}$$

$$\text{Con } \psi = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ si ha:}$$

Distribuzione del momento flettente	Fattore correttore k_c
M_{sx}  M_{dx} $\psi = M_{dx} / M_{sx} = 1$	1,0
M_{sx}  M_{dx} $-1 \leq \psi \leq 1$	$\frac{1}{1,33 - 0,33\psi}$

$$k_c = \frac{1}{1,33 - 0,33 \cdot \psi} \quad k_c = \frac{1}{1,33 - 0,33 \cdot 0,75}$$

$$k_c = 0,92$$

$$f = 1 - 0,5 \cdot (1 - 0,92) \cdot \left[1 - 2,0 \cdot (0,69 - 0,8)^2 \right]$$

$$f = 0,96 \quad (e1.6)$$

Espressione Φ_{LT}

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - \bar{\lambda}_{LT0}) + \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

Generalmente si può porre $\lambda_{LT0} = 0,2$, $\beta = 1$

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

Il coefficiente α_{LT} di imperfezione dipende dalla curva di instabilità ricavata dalla tabella 4.2.VII, in base al rapporto $\frac{h}{b}$

Sezione trasversale	Limiti	Curva di instabilità da tab.4.2.VI
Sezioni laminati ad I	$h/b \leq 2$	b
	$h/b > 2$	c

Per il profilato IPE 400

$$\frac{h}{b} = \frac{400}{180} = 2,2 > 2$$

la curva di instabilità è la "c."

Nelle ultime due righe della tabella 4.2.VI, già utilizzata per il carico di punta, in corrispondenza della curva "c" si ha:

$$\alpha = 0,49$$

Ultime due righe della tabella 4.2.VI

Curva di instabilità	a_0	a	b	c	d
Fattore di imperfezione α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + 0,49 \cdot (0,69 - 0,2) + 0,69^2]$$

$$\Phi_{LT} = 0,9 \quad (\text{e.1.7})$$

Sostituendo le (e1.4), (e1.6), (e1.7) nella (e1.5) si ha:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \cdot \frac{1}{f} \end{cases}$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{0,96} \cdot \frac{1}{0,9 + \sqrt{0,9^2 - 0,69^2}}$$

$$\chi_{LT} = 0,70 < \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{0,69^2} \cdot \frac{1}{0,96} = 2,18 \end{cases}$$

Momento resistente di progetto per l'instabilità

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot W_y \cdot \frac{f_{yk}}{\gamma_{M1}} \quad \text{con } \gamma_{M0} = 1,05$$

$$M_{b,Rd} = 0,7 \cdot 1308 \cdot \frac{27,5}{1,05}$$

$$M_{b,Rd} = 23980 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

Per la verifica deve essere

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1$$

Nota

Va evidenziato che nella normativa EC3 le grandezze di calcolo (progetto) sono indicate con il pedice "Sd" invece che "Ed". così il momento di progetto è indicato con " M_{Sd} " invece che " M_{Ed} ".

La tensione caratteristica di snervamento è indicata con f_y , invece che f_{yk} .

Qui per uniformità di simbologia, spesso, si adotta la simbologia italiana NTC

Momento di progetto M_{Ed}

Carico distribuito

Al momento di progetto $M_{Ed,max} = 183 \text{ kN} \cdot \text{m}$ dovuto ai carichi F_{Ed} , occorre aggiungere il momento $M_{Ed,p}$ dovuto al peso proprio della trave, con massa lineare $G = 66,3 \text{ kg/m}$.

Il peso proprio lineare in kN/m è:

$$p = \frac{G \cdot 10^{-3}}{9,81} = \frac{66,3 \cdot 10^{-3}}{9,81} = 0,68 \text{ kN/m}$$

Il peso lineare di progetto è:

$$p_{Ed} = \gamma_{G1} \cdot p \quad p_{Ed} = 1,3 \cdot 0,68$$

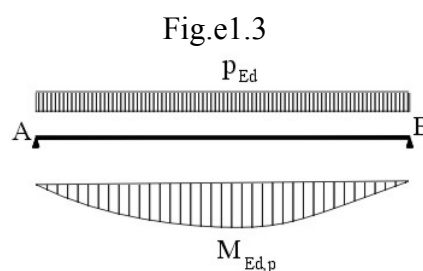
$$p_{Ed} = 0,88 \text{ kN/m}$$

Momento massimo in mezzera: sezione D:

$$M_{Ed,p} = \frac{1}{8} \cdot p \cdot l^2$$

$$M_{Ed,p} = \frac{1}{8} \cdot 0,88 \cdot 12^2$$

$$M_{Ed,p} = 15,84 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



Il momento totale di progetto è:

$$M_{Ed} = M_{Ed,max} + M_{Ed,p} \quad M_{Ed} = 182 + 15,84$$

$$M_{Ed} = 197,84 \text{ kN}$$

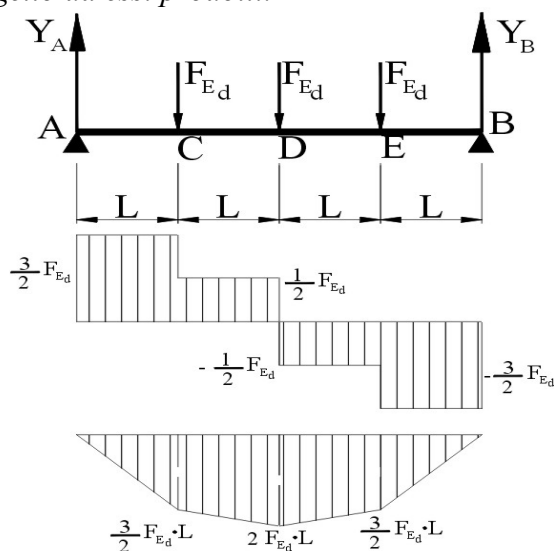
Verifica:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd}} = \frac{197,84}{239,8} < 1 \quad \text{verificato}$$

Momento critico M_{cr} e Verifica flessione – torsionale secondo la normativa italiana NTC

Per completezza di trattazione si ripercorre il procedimento di verifica per intero, utilizzando la normativa italiana NTC per il calcolo della resistenza critica M_{cr} .

Ovviamente si utilizzano i risultati ottenuti riguardo al predimensionamento, le forze F_{Ed} di progetto e i momenti di progetto da essi prodotti.



Forza di progetto F_{Ed}

$$F_{Ed} = 30,35 \text{ kN}$$

Momento in C

$$M_{Ed,C} = \frac{3 F_{Ed}}{2} \cdot L = 136,57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Momento in D

$$M_{Ed,D} = 2 F_{Ed} \cdot L = 182,00 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Momento in E

$$M_{Ed,E} = \frac{3 F_{Ed}}{2} \cdot L = 136,57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Momento di progetto

$$M_{Ed,max} = M_{Ed,D} = 2 F_{Ed} \cdot L = 182,00 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Profilato scelto:

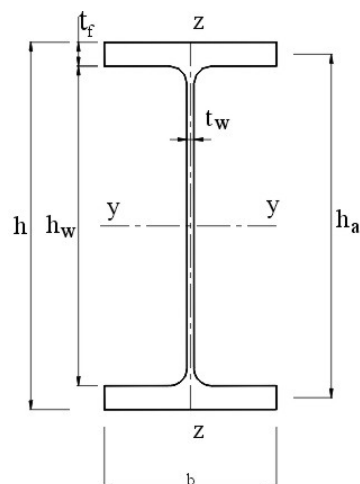
Profilato IPE 400

$$h = 400 \text{ mm} = 40 \text{ cm}$$

$$b = 180 \text{ mm} = 18 \text{ cm}$$

$$I_y = 23130 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 1318 \text{ cm}^4$$



$$\begin{aligned}
 t_f &= 13,5 \text{ mm} = 1,3 \text{ cm} & W_{pl,y} &= 1307 \text{ cm}^3 \\
 t_w &= 8,6 \text{ mm} = 0,86 \text{ cm} & S_y &= 654 \text{ cm}^3 \\
 A &= 8450 \text{ mm}^2 = 84,5 \text{ cm}^2 & W_{el,y} &= 1156 \text{ cm}^3 \\
 h_w &= 373 \text{ mm} = 37,3 \text{ cm} & G &= 66,3 \text{ kg/m}
 \end{aligned}$$

Snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_{LT}$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_{yk}}{M_{cr}}}$$

Momento critico M_{cr}

$$M_{cr} = \psi \cdot \frac{\pi}{L_{cr}} \sqrt{E J_z \cdot G J_T} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{L_{cr}}\right)^2 \cdot \frac{E J_\omega}{G J_T}}$$

Si ricavano i vari parametri per la determinazione di M_{cr}

Coefficiente di distribuzione ψ

$$\psi = 1,75 - 1,05 \cdot \frac{M_B}{M_A} + 0,3 \cdot \left(\frac{M_B}{M_A}\right)^2$$

$$\text{con } |M_B| < |M_A|$$

Il coefficiente ψ tiene conto che il momento resistente M_{cr} dipende dalla distribuzione del momento flettente sul tratto di trave considerato.

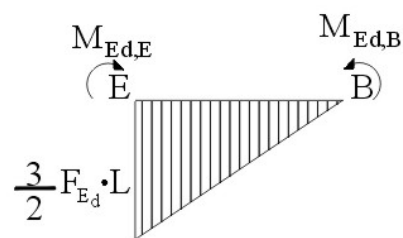
$$\psi = \frac{\text{momento di estremità minimo}}{\text{momento di estremità max.}}$$

Tratto EB (equivalente al tratto AC)

$$\frac{M_B}{M_E} = 0$$

$$\psi = 1,75$$

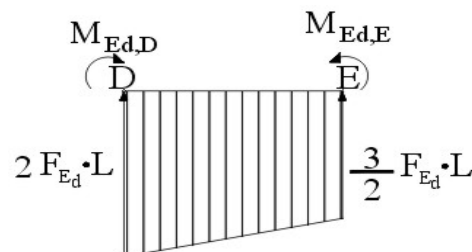
Fig.e1.5



Tratto DE (equivalente al tratto CD)

$$\frac{M_E}{M_D} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F_{Ed} \cdot L}{2 \cdot F_{Ed} \cdot L} \quad \frac{M_E}{M_D} = \frac{3}{4}$$

Fig.e1.5



$$\psi = 1,75 - 1,05 \cdot \frac{3}{4} + 0,3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\psi = 1,13$$

La distribuzione più onerosa si ha sul tratto di trave DE (CD), in cui risulta più piccolo il coefficiente di distribuzione ψ e quindi minimo il momento critico M_{cr} , da cui si otterrà il massimo valore della snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_{LT}$.

Lunghezza di libera inflessionelaterale L_{cr}

$$L_{cr} = 300 \text{ cm}$$

Rigidezza flessionale laterale $E \cdot J_z$

Occorre notare che nel supplemento del 2-2-2009 è indicata con $E \cdot I_y$ riferita però genericamente all'asse debole. Per uniformità di trattazione, qui, la rigidezza flessionale si indica con $E \cdot J_z$, avendo indicato con z l'asse debole della trave

$$E \cdot J_z = 21000 \cdot 1318 \text{ kN} \cdot \text{cm}^2$$

Rigidezza torsionale $G \cdot J_T$

La costante torsionale J_T si ottiene dividendo schematicamente la sezione della trave in tre rettangoli: due ali e l'anima. Si ha:

$$J_T = \frac{1}{3} \left(2 \cdot b \cdot t_f^3 + h_w \cdot t_w^3 \right) \quad J_T = \frac{1}{3} \left(2 \cdot 18 \cdot 1,35^3 + 37,3 \cdot 0,86^3 \right)$$

$$J_T = 37,4 \text{ cm}^4$$

$$G \cdot J_T = 8077 \cdot 37,4 \text{ kN} \cdot \text{cm}^2$$

Rigidezza torsionale secondaria $E \cdot J_0$

Dove J_0 è la costante torsionale secondaria.

Per il profilato IPE è espresso da:

$$J_0 = J_a \cdot \frac{h_a^2}{2}$$

in cui:

h_a è la distanza tra i baricentri della due ali

$$h_a = h - t_f \quad h_a = 40 - 1,35$$

$$h_a = 38,65 \text{ cm}$$

J_a è il momento d'inerzia dell'ala rispetto al suo asse forte

$$J_a = \frac{1}{12} \cdot t_f \cdot b^3$$

sostituendo si ha:

$$J_0 = \frac{1}{24} \cdot t_f \cdot b^3 \cdot h_a^2 \quad (\text{vedi nota punto 2.6.2.1})$$

$$J_0 = \frac{1}{24} \cdot 1,35 \cdot 18^3 \cdot 38,65^2$$

$$J_0 = 49 \cdot 10^4 \text{ cm}^6$$

$$E \cdot J_0 = 21000 \cdot 49 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{cm}^4$$

Sostituendo i parametri determinati nell'espressione del momento critico

$$M_{cr} = \psi \cdot \frac{\pi}{L_{cr}} \sqrt{E J_z \cdot G J_T} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{L_{cr}} \right)^2 \cdot \frac{E J_0}{G J_T}}$$

si ha:

$$M_{cr} = 1,13 \cdot \frac{\pi}{300} \sqrt{21000 \cdot 13,18 \cdot 8077 \cdot 37,4} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{300} \right)^2 \cdot \frac{21000 \cdot 49 \cdot 10^4}{8077 \cdot 37,4}}$$

$$M_{cr} = 74459 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

Snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_{LT}$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_{pl,y} \cdot f_{yk}}{M_{cr}}} \quad \bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{1309 \cdot 27,5}{74559}}$$

$$\lambda_{LT} = 0,7$$

Essendo $\lambda_{LT} > 0,4$ occorre eseguire la verifica a flessione torsione

Momento resistente $M_{b,Rd}$

Come si è verificato nella precedente verifica, la sezione del profilato è di classe 1

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot \frac{f_{yk} \cdot W_{pl,y}}{\gamma_{M1}}$$

Coefficiente di riduzione χ_{LT}

$$\chi_{LT} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \cdot \frac{1}{f} \end{cases} \quad (e1.5)$$

per sezioni di classe 1 $\beta = 1$


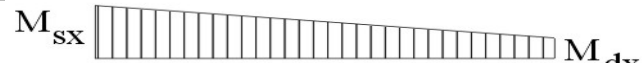
Coefficiente f di distribuzione del momento

$$f = 1 - 0,5 \cdot (1 - k_c) \cdot \left[1 - 2,0 \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right]$$

Il coefficiente k_c è riportato nella tabella 4.2.VIII in funzione della distribuzione del momento flettente nel tratto considerato.

Rapporto ψ

Con $\psi = \frac{3}{4} = 0,75$ si ha:

Distribuzione del momento flettente	Fattore correttore k_c
 $\psi = M_{dx} / M_{sx} = 1$	1,0
 $-1 \leq \psi \leq 1$	$\frac{1}{1,33 - 0,33\psi}$

$$k_c = \frac{1}{1,33 - 0,33 \cdot \psi} \quad k_c = \frac{1}{1,33 - 0,33 \cdot 0,75}$$

$$k_c = 0,92$$

$$f = 1 - 0,5 \cdot (1 - 0,92) \cdot \left[1 - 2,0 \cdot (0,69 - 0,8)^2 \right]$$

$$f = 0,96 \quad (e1.6)$$

Espressione Φ_{LT}

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - \bar{\lambda}_{LT0}) + \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

Generalmente si può porre $\bar{\lambda}_{LT0} = 0,2$, $\beta = 1$

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

Il coefficiente α_{LT} di imperfezione dipende dalla curva di instabilità ricavata dalla tabella 4.2.VII, in base al rapporto $\frac{h}{b}$

Sezione trasversale	Limiti	Curva di instabilità da tab.4.2.VI
Sezioni laminati ad I	$h/b \leq 2$	b
	$h/b > 2$	c

Per il profilato IPE 400

$$\frac{h}{b} = \frac{400}{180} = 2,2 > 2$$

la curva di instabilità è la "c."

Nelle ultime due righe della tabella 4.2.VI, già utilizzata per il carico di punta, in corrispondenza della curva "c" si ha:

$$\alpha = 0,49$$

Ultime due righe della tabella 4.2.VI

Curva di instabilità	a_0	a	b	c	d
Fattore di imperfezione α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

$$\Phi_{LT} = 0,9 \quad \Phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + 0,49 \cdot (0,69 - 0,2) + 0,69^2] \quad (\text{e.1.7})$$

Sostituendo le (e1.4), (e1.6), (e1.7) nella (e1.5) si ha:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \cdot \frac{1}{f} \end{cases}$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{0,96} \cdot \frac{1}{0,9 + \sqrt{0,9^2 - 0,7^2}}$$

$$\chi_{LT} = 0,70 < \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{0,69^2} \cdot \frac{1}{0,7} = 2,12 \end{cases}$$

Momento resistente di progetto per l'instabilità

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot W_y \cdot \frac{f_{yk}}{\gamma_{M1}} \quad \text{con } \gamma_{M0} = 1,05$$

$$M_{b,Rd} = 0,7 \cdot 1308 \cdot \frac{27,5}{1,05}$$

$$M_{b,Rd} = 23980 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

Per la verifica deve essere

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1$$

Momento di progetto M_{Ed}

Carico distribuito

Al momento di progetto $M_{Ed,max} = 183 \text{ kN} \cdot \text{m}$ dovuto ai carichi F_{Ed} , occorre aggiungere il momento $M_{Ed,p}$ dovuto al peso proprio della trave, con massa lineare $G = 66,3 \text{ kg/m}$.

Il peso proprio lineare in kN/m è:

$$p = \frac{G \cdot 10^{-3}}{9,81} = \frac{66,3 \cdot 10^{-3}}{9,81} = 0,68 \text{ kN/m}$$

Il peso lineare di progetto è:

$$p_{Ed} = \gamma_{G1} \cdot p \qquad p_{Ed} = 1,3 \cdot 0,68$$

$$p_{Ed} = 0,88 \text{ Kn/m}$$

Momento massimo in mezzera: sezione D:

$$M_{Ed,p} = \frac{1}{8} \cdot p \cdot l^2 \qquad M_{Ed,p} = \frac{1}{8} \cdot 0,88 \cdot 12^2$$

$$M_{Ed,p} = 15,84 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Il momento totale di progetto è:

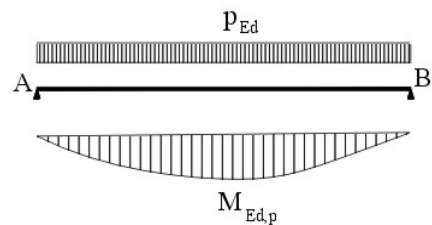
$$M_{Ed} = M_{Ed,max} + M_{Ed,p} \qquad M_{Ed} = 182 + 15,84$$

$$M_{Ed} = 197,84 \text{ kN}$$

Verifica:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd}} = \frac{197,84}{239,8} < 1 \quad \text{verificato}$$

Fig.e1.3



2.7- Aste presso-inflesse – normativa EC3

Si considerano qui aste sottoposte ad una sollecitazione che può tradursi in una forza assiale di compressione e un momento flettente, che può scomporsi in due momenti attorno agli assi y, z .

- Forza assiale di compressione, applicata con una eccentricità non trascurabile (superiore a $\frac{l}{1000}L$):
- Asta compressa e soggetta ad azioni trasversali;
- Aste di telai soggette a compressione e momenti flettenti agli estremi:

In queste aste si verificano maggiormente fenomeni di instabilità, che si distingue in *instabilità piana* e *instabilità flessione – torsionale*

2.7.1- Instabilità piana – Normativa EC3

Occorre considerare le diverse classi di appartenenza della sezione dell'asta.

2.7.1.1- Classe 1-2

È da premettere che nella normativa EC3 lo sforzo normale di progetto è indicato con N_{Sd} e il momento di progetto con M_{Sd} (con N_{Ed} e M_{Ed} nella normativa italiana NTC). La tensione caratteristica di snervamento è indicata con f_y (con f_{yk} nella normativa NTC)

Si suppone che l'asta sia sollecitata a compressione con una forza normale di progetto N_{Sd} e ad un momento flettente M_{Sd} che si decompone nei due momenti secondo i due assi principali della sezione y, z :

$$M_{y,Sd}, M_{z,Sd}$$

Ovviamente una delle due componenti può essere nulla.

Considerando l'insieme delle azioni sulla struttura e determinate le sollecitazioni di progetto: $N_{Sd}, M_{y,Sd}, M_{z,Sd}$, per la verifica occorre che sia rispettata la relazione:

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_{min} \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_y \cdot M_{y,Sd}}{\frac{W_{pl,y} \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_z \cdot M_{z,Sd}}{\frac{W_{pl,z} \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad (2.7.1)$$

Distinguiamo nei tre termini del primo membro.

Primo addendo

Il primo termine della somma riguarda il contributo alla sollecitazione offerta dalla compressione. Al numeratore è posto lo sforzo di compressione di calcolo (progetto), al denominatore l'espressione della resistenza all'instabilità dell'asta compressa.

χ_{min} è il coefficiente di riduzione riferito all'asse, che per la geometria della sezione e le condizioni di vincolo, lo rendono minimo. Si ottiene con il procedimento eseguito nel caso del *carico di punta*.

-----o-----

Nota 1

Consideriamo per esempio il caso di un profilato I o H.

Le condizioni di vincolo possono essere diverse rispetto ai due assi principali e quindi avere differenti lunghezze di libera inflessione, di snellezze e di snellezze adimensionali.

Ricordiamo che la snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_{asse}$ rispetto ad un asse è:

$$\bar{\lambda}_{asse} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}}$$

con N_{cr} euleriano risulta

$$\bar{\lambda}_{asse} = \frac{\lambda_{asse}}{\lambda_p} \quad \text{con} \quad \lambda_p = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

Così se "l" è la lunghezza dell'asta, si ha:

asse y	$l_{0,y} = \beta_y \cdot l$	$\lambda_y = \frac{\beta_y \cdot l}{i_y}$	$\bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_p}$
asse z	$l_{0,z} = \beta_z \cdot l$	$\lambda_z = \frac{\beta_z \cdot l}{i_z}$	$\bar{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_p}$

Incastro – incastro	$\beta = 0,5$	$l_0 = 0,5 \cdot l$
---------------------	---------------	---------------------

Cerniera – cerniera	$\beta = 1$	$l_0 = 1 \cdot l$
---------------------	-------------	-------------------

Incastro – cerniera	$\beta = 0,7$	$l_0 = 0,7 \cdot l$
---------------------	---------------	---------------------

Incastro – estremo libero	$\beta = 2$	$l_0 = 2 \cdot l$
---------------------------	-------------	-------------------

Si hanno così due differenti coefficienti di riduzione calcolati rispetto ai due assi y,z

Asse y

$$\Phi_y = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha (\bar{\lambda}_y - 0,2) + \lambda_y^2 \right]$$

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y \cdot \sqrt{\Phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}}$$

Asse z

$$\Phi_z = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha (\bar{\lambda}_z - 0,2) + \lambda_z^2 \right]$$

$$\chi_z = \frac{I}{\Phi_z \cdot \sqrt{\Phi_z^2 - \bar{\lambda}_y^2}}$$

χ_{min} è il minimo tra i due valori χ_y, χ_z

-----0-----

Secondo addendo

Il secondo termine della somma si riferisce al contributo offerto alla sollecitazione dalla componente del momento di calcolo $M_{y,Sd}$ attorno all'asse y .

Al numeratore è posto la componente $M_{y,Sd}$ del momento di progetto, moltiplicata per il coefficiente k_y , che tiene conto dell'influenza che ha il carico assiale sulla flessione, per effetto della snellezza dell'asta.

Tale coefficiente k_y è dato dall'espressione dipendente dal carico assiale di progetto N_{Sd} :

$$k_y = 1 - \frac{\mu_y \cdot N_{Sd}}{\chi_y \cdot A \cdot f_y} \leq 1,5 \quad (2.7.2)$$

Dove:

- N_{Sd} Sforzo di compressione di calcolo;
- χ_y^* coefficiente di riduzione riferito all'asse y ;
- A sezione lorda del profilato;
- μ_y coefficiente dipendente dalla snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_y$ e dalla differenza tra il modulo di resistenza plastico $W_{pl,y}$ e quello elastico $W_{el,y}$

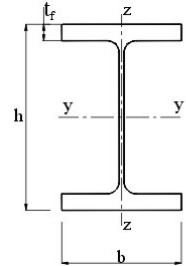
$$\mu_y = \bar{\lambda}_y \cdot (2 \cdot \beta_{My} - 4) + \frac{W_{pl,y} - W_{el,y}}{W_{el,y}} \leq 0,9 \quad (2.7.3)$$

$\bar{\lambda}_y$ è la snellezza adimensionale riferita all'asse y : $\bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_{lp}}$ con $\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$

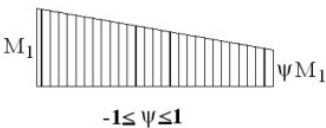
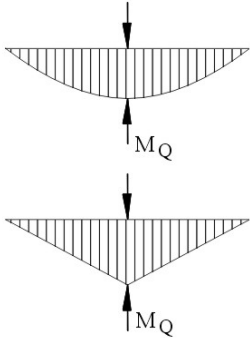
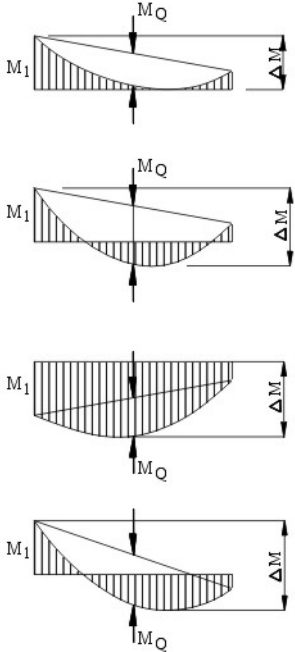
β_M è il coefficiente di momento equivalente uniforme riportato nella tabella 5.5.3, dipendente dall'andamento del diagramma del momento flettente lungo l'asta tra due punti contraventati. Si distingue a seconda attorno a quale asse agisce il momento e in quale direzione sono i punti di controventatura:

Coefficiente	momento attorno all'asse	punti contraventati in direzione
$\beta_{M,y}$	$y - y$	$z - z$
$\beta_{M,z}$	$z - z$	$y - y$
β_{ML}	$y - y$	$y - y$

Tab.5.5.3 Coefficiente di momento equivalente uniforme



· Vedi "Nota 1." χ_y si ottiene con lo stesso procedimento riferito all'asse y

Diagramma del momento	Coefficiente di momento equivalente uniforme β_M
<p>Momento all'estremità</p>  <p style="text-align: center;">$-1 \leq \psi \leq 1$</p>	$\beta_{M,\psi} = 1,8 - 0,7\psi$
<p>Momenti dovuti a carichi laterali nel piano</p> 	$\beta_{M,Q} = 1,3$ $\beta_{M,Q} = 1,4$
<p>Momenti dovuti a carichi laterali nel piano più momenti d'estremità</p> 	$\beta_M = \beta_{M,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} \cdot (\beta_{M,Q} - \beta_{M,\psi})$ $M_Q = \max M \quad \text{dovuto al solo carico laterale}$ $\Delta M = \begin{cases} \max M & \text{per diagramma del momento senza scambio di segno} \\ \max M + \min M & \text{per diagramma del momento con scambio di segno} \end{cases}$

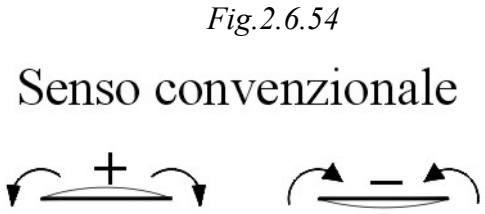
Nell'espressione (2.7.3) $\beta_{M,y}$ si riferisce al momento attorno all'asse y e punti contraventati in direzione z-z

$\beta_{M,z}$ si riferisce al momento attorno all'asse z e punti contraventati in direzione y-y
 Il coefficiente β_{ML} si riferisce all'instabilità flessorio-torzionale (vedi oltre)

Esempio

Si consideri come esempio il caso di un diagramma con momento **con scambio di segno**, determinato dalla composizione dei momenti M_A, M_B posti all'estremità dell'asta con un momento dovuto ad un carico laterale q uniformemente distribuito.

Per conformità alle rappresentazioni schematiche della tabella Tab.5.5.3 si consideri il momento positivo quando sono tese la fibre superiori dell'asta (convenzione opposta a quella tradizionalmente assunta nella Scienza delle Costruzioni)



Momenti all'estremità dell'asta

Siano M_A, M_B i momenti all'estremità dell'asta, entrambi positivi con $M_A > M_B$

$$M_A = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Dalla tabella Tab.5.5.3 si ricava il coefficiente di momento equivalente relativo i momenti di estremità:

$$\psi = \frac{M_a}{M_b} \qquad \psi = \frac{3}{5}$$

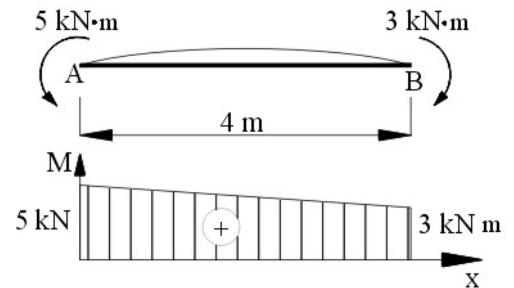
$$\psi = 0,6$$

$$\beta_{M,\psi} = 1,8 - 0,7\psi$$

$$\beta_{M,\psi} = 1,8 - 0,7 \cdot 0,6$$

$$\beta_{M,\psi} = 1,38 \quad (e.1)$$

Fig.2.6.55



Momento massimo M_Q dovuto al carico uniforme laterale nel piano q

$$M_Q = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

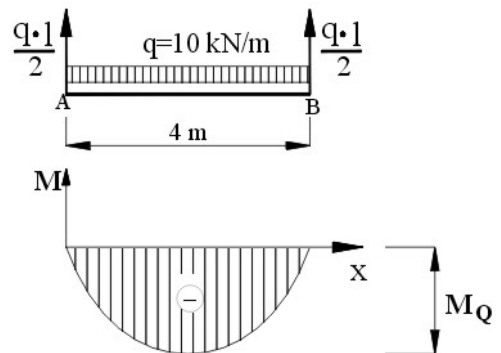
$$q = 10 \text{ kN/m}$$

$$l = 4 \text{ m}$$

$$M_Q = \frac{10 \cdot 4^2}{8}$$

$$M_Q = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Fig.2.6.56

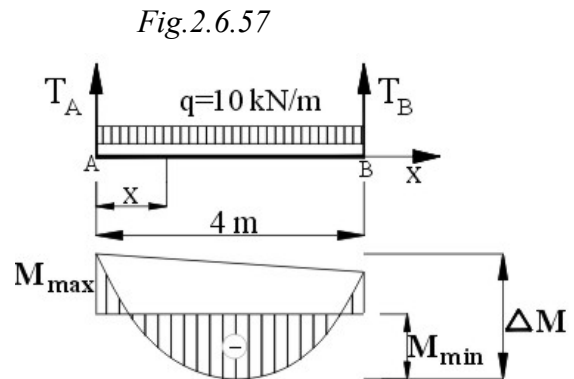


Dalla tabella Tab.5.3.2 si ricava il coefficiente di momento equivalente relativo al carico laterale q uniforme nel piano

$$\beta_{M,Q} = 1,3 \quad (e.2)$$

Momento risultante e determinazione del momento minimo "minM"

Si determina il momento M_x in una sezione generica x dell'asta, dovuto sia ai momenti M_a , M_b posti all'estremità dell'asta sia al carico distribuito q .



Sforzo di taglio T_A

Per l'equilibrio dei momenti rispetto all'estremità B si ha:

$$T_A \cdot 4 - 5 - 10 \cdot \frac{4^2}{2} = 0$$

$$T_A = 20,5 \text{ kN} \quad (e.3)$$

Momento rispetto ad una sezione generica x

$$M_x = -T_A \cdot x + M_A + q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M_A = -20,5 \cdot x + 5 + 10 \cdot \frac{x^2}{2} \quad (e.4)$$

Derivata prima

$$\frac{dM}{dx} = -20,5 + 10 \cdot x$$

Sezione x_{min} in cui si annulla la derivata prima

$$-20,5 + 10 \cdot x_{min} = 0$$

$$x_{min} = 2,05 \text{ m} \quad (e.5)$$

Derivata seconda

$$\frac{d^2M}{dx^2} = 10 > 0$$

Nella sezione $x_{min} = 2,05 \text{ m}$ si ha un minimo

Momento minimo "minM"

Sostituendo la (e.5) nella (e.3) si ottiene il momento minimo "minM"

$$\min M = -20,5 \cdot 2,05 + 5 + 10 \cdot \frac{2,05^2}{2}$$

$$\min M = -16 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (e.6)$$

Incremento ΔM

$$\text{Momento massimo} \quad \max M = M_A = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{Momento minimo} \quad \min M = -16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$|\Delta M| = |\max M| + |\min M| \quad |\Delta M| = 5 + 16$$

$$|\Delta M| = 21$$

Coefficiente di momento equivalente uniforme dell'insieme dei carichi

$$\beta_M = \beta_{M,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} \cdot (\beta_{M,Q} - \beta_{M,\psi})$$

$$\beta_{M,\psi} = 1,38$$

$$\beta_{M,Q} = 1,3$$

$$|\Delta M| = 21$$

$$\beta_M = 1,38 + \frac{20}{21}(1,3 - 1,38)$$

$$\beta_M = 1,3$$

Terzo addendo

Il terzo termine della somma si riferisce al contributo offerto alla sollecitazione dalla componente del momento di calcolo $M_{z,Sd}$ attorno all'asse z .

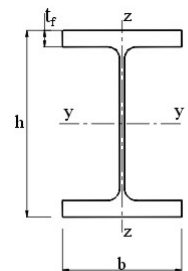
Valgono le stesse argomentazioni espresse per la componente $M_{y,Sd}$ attorno all'asse y .

In breve si ha:

$$k_z = 1 - \frac{\mu_z \cdot N_{Sd}}{\chi_z \cdot A \cdot f_y} \leq 1,5 \quad (2.7.4)$$

con

$$\mu_z = \bar{\lambda}_z \cdot (2 \cdot \beta_{Mz} - 4) + \frac{W_{pl,z} - W_{el,z}}{W_{el,z}} \leq 0,9 \quad (2.7.5)$$



2.7.1.2- Classe 3-4

In questo caso nella espressione di verifica si utilizzano i moduli di resistenza elastici $W_{el,y}$, $W_{el,z}$

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_{min} \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_y \cdot M_{y,Sd}}{W_{el,y} \cdot f_y} + \frac{k_z \cdot M_{z,Sd}}{W_{el,z} \cdot f_y} \leq 1$$

con:

$$k_y = 1 - \frac{\mu_y \cdot N_{Sd}}{\chi_y \cdot A \cdot f_y} \leq 1,5$$

$$k_z = 1 - \frac{\mu_z \cdot N_{Sd}}{\chi_z \cdot A \cdot f_y} \leq 1,5$$

In questo caso risulta nullo lo scarto tra il modulo di resistenza plastico e quello elastico, per cui i coefficienti μ_y , μ_z risultano:

$$\mu_y = \bar{\lambda}_y \cdot (2 \cdot \beta_{My} - 4) \leq 0,9$$

$$\mu_z = \bar{\lambda}_z \cdot (2 \cdot \beta_{Mz} - 4) \leq 0,9$$

Per le sezioni di classe 4 tutti i parametri vanno riferiti alla sezione efficace A_{eff} dell'asta e occorre tener conto dello spostamento e_N tra l'asse neutro della sezione efficace e quella lorda (vedi oltre esempio Tab.5.3.1)

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_{min} \cdot \frac{A_{eff} \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_y \cdot (M_{y,Sd} + N_{Sd} \cdot e_{Ny})}{W_{eff,y} \cdot f_y} + \frac{k_z \cdot (M_{z,Sd} + N_{Sd} \cdot e_{Nz})}{W_{eff,z} \cdot f_y} \leq 1$$

A_{eff} Sezione efficace

$W_{eff,y}$ modulo di resistenza efficace rispetto all'asse y

$W_{eff,z}$ modulo di resistenza efficace rispetto all'asse z

e_{Ny} , e_{Nz} spostamenti degli assi neutri della sezione efficace rispetto alla sezione lorda, (vedi oltre, esempi Tab.5.3.1)

2.7.2- Instabilità flesso – torsionale nelle aste presso inflesse – Normativa EC3

La verifica è simile all'instabilità piana.

Si considerano le classi di appartenenza delle sezioni e si applicano su di esse specifiche espressioni di verifica simili a quelle utilizzate per l'instabilità piana.

Si ha una variazione nel termine riguardante il momento resistente rispetto all'asse forte (y nei profilati I, H), moltiplicato per il coefficiente di riduzione χ_{LT} che tiene conto dello svergolamento delle ali.

2.7.2.1- Classe 1,2

Per la verifica deve risultare:

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_{min} \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_{LT} \cdot M_{y,Sd}}{\chi_{LT} \cdot \frac{W_{pl,y} \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_z \cdot M_{z,Sd}}{\frac{W_{pl,z} \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad (2.7.6)$$

dove:

χ_{min} è il valore minimo tra i due coefficienti di riduzione χ_y, χ_z calcolati rispetto ai due assi, dipendenti dalle condizioni di vincolo secondo i coefficienti β_y, β_z ;

χ_{LT} è il coefficiente di riduzione per l'instabilità torsionale.

$$\chi_{LT} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \cdot \frac{1}{f} \end{cases}$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_{yk}}{M_{cr}}}$$

ricordiamo che con $k = 1, C_2 = 0$ si ha:

$$M_{cr} = C_1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot EI_z}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 \cdot GI_T}{\pi^2 \cdot EI_z}}$$

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

$$f = 1 - 0,5 \cdot (1 - k_c) \cdot \left[1 - 2,0 \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right]$$

Nella determinazione della snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_{LT}$ si considera la distanza L tra due ritegni torsionali;

k_{LT} è definito con la limitazione che sia $k_{LT} \leq 1$

$$k_{LT} = 1 - \frac{\mu_{LT} \cdot N_{Sd}}{\chi_z \cdot A \cdot f_y} \leq 1 \quad (2.7.7)$$

si osservi che il coefficiente di riduzione χ_z è calcolato rispetto all'asse z .

μ_{LT} è definito con limitazione $\mu_{LT} \leq 0,9$

$$\mu_{LT} = 0,15 \cdot \bar{\lambda}_z \cdot \beta_{MLT} - 0,15 \leq 0,9 \quad (2.7.8)$$

β_{MLT} è il coefficiente di momento equivalente uniforme per l'instabilità flessione torsionale, dipendente dall'andamento del diagramma del momento flettente tra i punti contraventati in direzione $y-y$ come riportato in tab.5.5.3

2.7.2.2- Classe 3,4

Per la verifica delle sezioni di classe 3 si applica una espressione analoga alla (2.7.6), dove i moduli di resistenza plastici sono sostituiti da quelli elastici.

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_{min} \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_{LT} \cdot M_{y,Sd}}{\chi_{LT} \cdot \frac{W_{el,y} \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_z \cdot M_{z,Sd}}{\frac{W_{el,z} \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad (2.7.9)$$

Per le sezioni di classe 4 nella espressione di verifica si utilizzano i moduli di resistenza elastici calcolati sulla sezione efficace e si tiene conto dello spostamento e_N tra l'asse neutro della sezione efficace e quella lorda.

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_{min} \cdot \frac{A_{eff} \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_{LT} \cdot (M_{y,Sd} + N_{Sd} \cdot e_{Ny})}{\chi_{LT} \cdot \frac{W_{eff,y} \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_z \cdot (M_{z,Sd} + N_{Sd} \cdot e_{Nz})}{\frac{W_{eff,z} \cdot f_y}{\gamma_{M1}}} \leq 1$$

con

A_{eff} Sezione efficace;
 $W_{eff,y}$ modulo di resistenza efficace rispetto all'asse y ;
 $W_{eff,z}$ modulo di resistenza efficace rispetto all'asse z ;
 e_{Ny}, e_{Nz} spostamenti degli assi neutri della sezione efficace rispetto alla sezione lorda, (vedi esempi Tab.5.3.1).

Tab.5.3.1

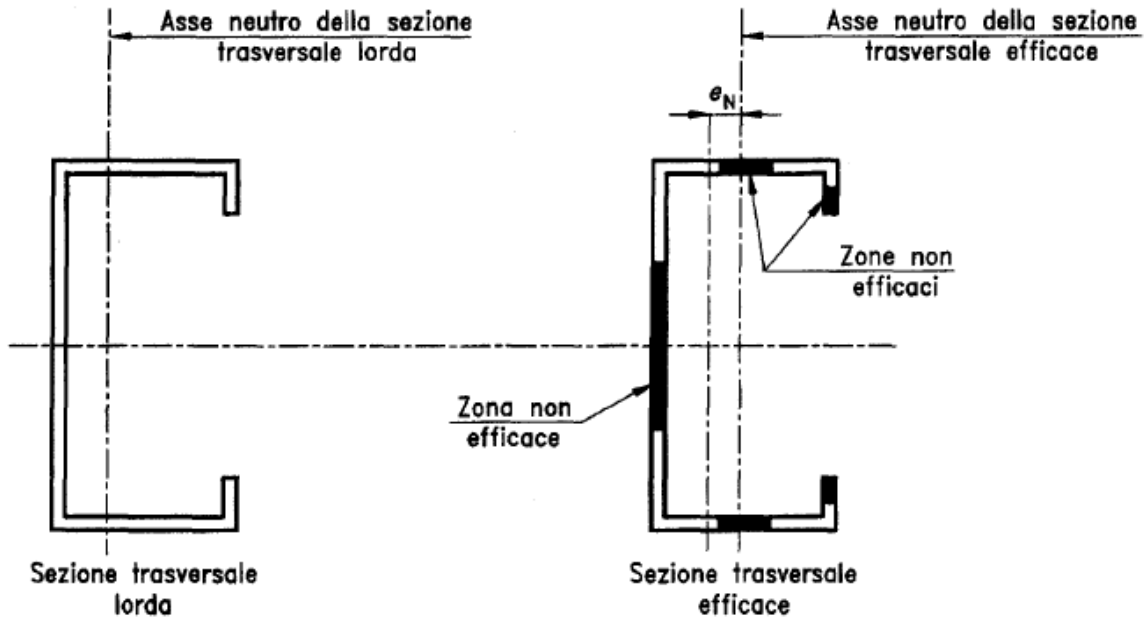
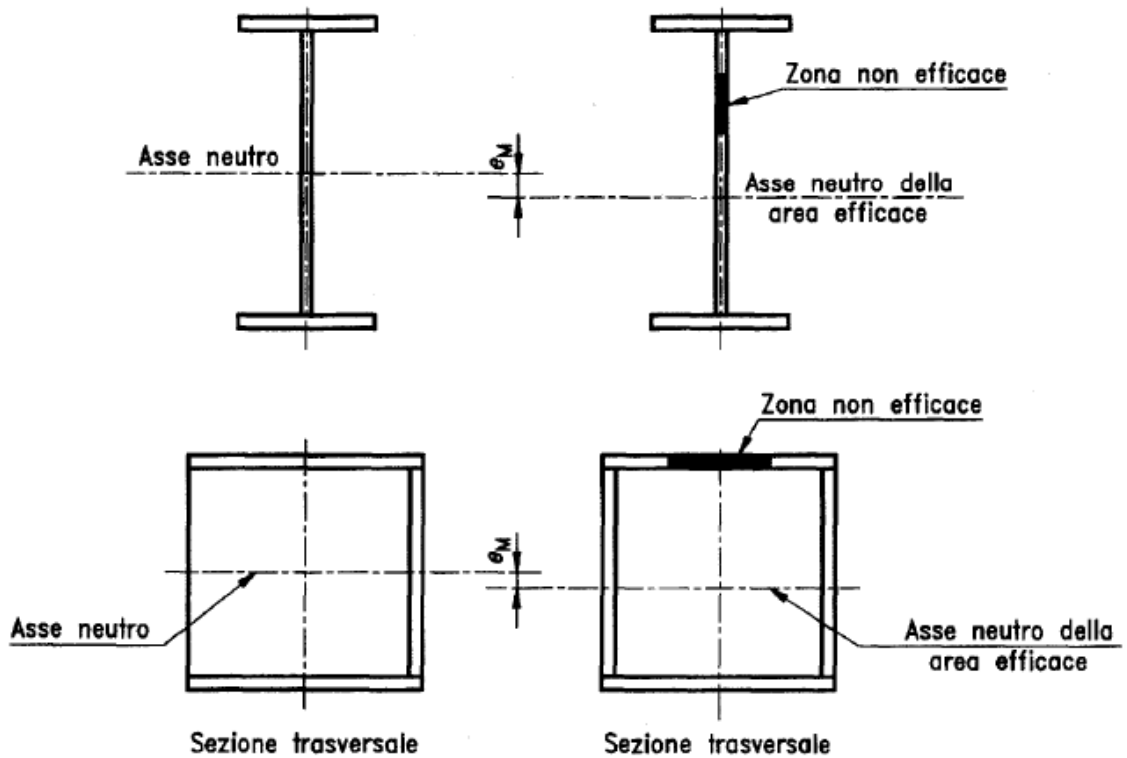


Fig. 5.3.1. Sezioni trasversali di classe 4 – forza assiale



2.7.3- Aste presso-inflesse Normativa italiana NTC 2018 – NTC 2008 (Supplemento ordinario n.27- 2 febbraio 2009)

2.7.3.1- Instabilità piana e torsionale

Si considera prima il caso di instabilità, senza spostamenti torsionali, impediti da opportuni vincoli, seguito dal caso in cui vi sono instabilità torsionali.

La normativa indica due metodi

2.7.3.1.1- Metodo A – instabilità piana nelle aste presso inflesse

Consideriamo un'asta prismatica, soggetta ad uno sforzo normale di progetto N_{Ed} e ad un momento flettente che può scomporsi nelle due componenti $M_{y,Ed}$, $M_{z,Ed}$ agenti nei due piani principali d'inerzia. Vi siano opportuni vincoli che impediscono spostamenti torsionali

Per la verifica deve risultare:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_{min} \frac{f_{yk} \cdot A}{\gamma_{M1}}} + \frac{M_{y,Ed}}{\frac{f_{yk} \cdot W_y}{\gamma_{M1}} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)} + \frac{M_{z,Ed}}{\frac{f_{yk} \cdot W_z}{\gamma_{M1}} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right)} \leq 1$$

Studiamo singolarmente i tre addendi della somma.

Primo addendo della somma

Il primo addendo esprime il contributo alla sollecitazione dello sforzo normale di progetto N_{Ed} alla sollecitazione. Si ha:

- al numeratore è posto lo sforzo normale di progetto N_{Ed}
- al denominatore è posta la resistenza all'instabilità dell'asta compressa

$$N_{b,Rd} = \chi_{min} \cdot \frac{f_{yk} \cdot A}{\gamma_{M1}}$$

dove χ_{min} è il coefficiente di riduzione minimo tra quelli calcolati rispetto all'asse y o z

$$\begin{array}{l} \text{asse } y \quad l_{0,y} = \beta_y \cdot l \quad \lambda_y = \frac{\beta_y \cdot l}{i_y} \quad \bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_p} \\ \text{asse } z \quad l_{0,z} = \beta_z \cdot l \quad \lambda_z = \frac{\beta_z \cdot l}{i_z} \quad \bar{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_p} \end{array}$$

$$\text{con } \bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} \quad \text{con } N_{cr} \text{ euleriano è: } \quad \lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$\text{Incastro – incastro} \quad \beta = 0,5 \quad l_0 = 0,5 \cdot l$$

$$\text{Cerniera – cerniera} \quad \beta = 1 \quad l_0 = 1 \cdot l$$

$$\text{Incastro – cerniera} \quad \beta = 0,7 \quad l_0 = 0,7 \cdot l$$

$$\text{Incastro – estremo libero} \quad \beta = 2 \quad l_0 = 2 \cdot l$$

Si hanno così due differenti coefficienti di riduzione calcolati rispetto ai due assi y, z

Asse y

$$\Phi_y = 0,5 \cdot [I + \alpha (\bar{\lambda}_y - 0,2) + \lambda_y^2]$$

$$\chi_y = \frac{I}{\Phi_y \cdot \sqrt{\Phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}}$$

Asse z

$$\Phi_z = 0,5 \cdot [I + \alpha (\bar{\lambda}_z - 0,2) + \lambda_z^2]$$

$$\chi_z = \frac{I}{\Phi_z \cdot \sqrt{\Phi_z^2 - \bar{\lambda}_z^2}}$$

χ_{min} è il minimo tra i due valori χ_y, χ_z

-----○-----

Secondo e terzo addendo della somma

Il secondo e terzo addendo della somma si riferiscono, rispettivamente, al contributo alla sollecitazione del momento di calcolo $M_{y,Ed}$ attorno all'asse y e quello $M_{z,Ed}$ attorno all'asse z . Si ha:

I - Al numeratore

$M_{y,eq,Ed}$, $M_{z,eq,Ed}$ sono momenti equivalenti costanti, rispettivamente, attorno all'asse y e all'asse z , che determinano lo stesso effetto di sollecitazione dei momenti effettivi, che hanno diagrammi di momento variante lungo l'asse dell'asta.

In generale si assume come momento equivalente:

$$M_{eq,Ed} = 1,3 \cdot M_{m,Ed}$$

dove $M_{m,Ed}$ è il momento medio sulla lunghezza dell'asta

$$M_{m,Ed} = \frac{1}{l} \int_0^l M_{Ed} \cdot dx$$

Deve essere rispettata la limitazione:

$$0,75 \cdot M_{max,Ed} \leq M_{eq,Ed} \leq M_{max,Ed}$$

dove $M_{max,Ed}$ è il momento flettente massimo che si ha lungo l'asta.

Se risulta :

$$M_{eq,Ed} < 0,75 \cdot M_{max,Ed} \quad \text{si pone} \quad M_{eq,Ed} = 0,75 \cdot M_{max,Ed}$$

Se risulta :

$$M_{eq,Ed} > M_{max,Ed} \quad \text{si pone} \quad M_{eq,Ed} = M_{max,Ed}$$

Caso particolare

Nel caso particolare, come si ha nei ritzi, di aste vincolate agli estremi e soggette ad un momento flettente variabile linearmente tra i valori estremi M_a , M_b con $|M_a| \geq |M_b|$, si può assumere come momento equivalente, approssimato:

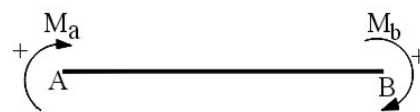
$$M_{eq,Ed} = 0,6 \cdot M_a - 0,4 \cdot M_b \geq 0,4 \cdot M_a$$

I momenti vanno valutati con segno positivo in senso orario.

Se risulta $M_{eq,Ed} < 0,4 \cdot M_a$ si pone $M_{eq,Ed} = 0,4 \cdot M_a$

-----o-----

Fig.2.7.4



Nel caso di Fig.2.7.6, con momento M_a costante su tutta la trave si ha

$$M_{eq,Ed} = 0,6 \cdot M_a - (-0,4 \cdot M_a)$$

$$M_{eq,Ed} = M_a$$

Fig.2.7.6

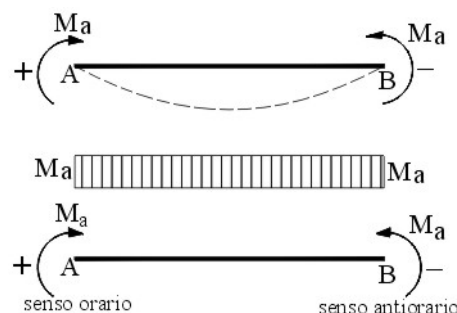


Fig.2.7.6.a

Con una distribuzione del momento come rappresentato in figura Fig.2.7.6.a, il momento equivalente risulta:

$$M_{eq,Ed} = 0,6 \cdot M_a - 0$$

$$M_{eq,Ed} = 0,6 \cdot M_a$$

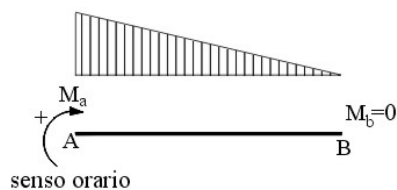
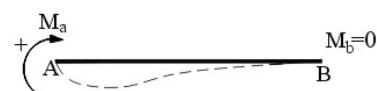
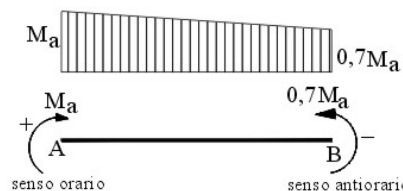


Fig.2.7.7

Con una distribuzione del momento come rappresentato in figura Fig.2.7.7, il momento equivalente risulta:

$$M_{eq,Ed} = 0,6 \cdot M_a - 0,4 \cdot (-0,7 M_a)$$

$$M_{eq,Ed} = 0,88 \cdot M_a > 0,4 \cdot M_a$$



Con una distribuzione del momento come rappresentato in figura, il momento equivalente risulta:

$$M_{eq,Ed} = 0,6 \cdot M_a - 0,4 \cdot (+ 0,55 M_a)$$

$$M_{eq,Ed} = 0,38 \cdot M_a$$

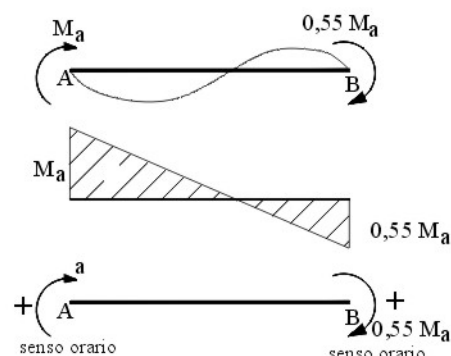
Risultando:

$$M_{eq,Ed} < 0,4 \cdot M_a$$

si pone:

$$M_{eq,Ed} = 0,4 \cdot M_a$$

Fig.2.7.7.a



II - Al denominatore

Al denominatore delle espressioni, che determinano i contributi alle sollecitazioni dovute ai momenti sui due piani principali d'inerzia, si ha:

W_y, W_z sono i moduli di resistenza, plastici per le sezioni di classe 1,2 ed elastici per le sezioni di classe 3;

γ_{M1} coefficiente di sicurezza

$N_{cr,y}, N_{cr,z}$ sono i carichi critici euleriani relativi agli assi principali d'inerzia, corrispondenti a quelli attorno ai quali sono stati calcolati i momenti posti al numeratore:

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_y}{L_{cr}^2} \quad N_{cr,z} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_z}{L_{cr}^2}$$

L_{cr} è la lunghezza di libera inflessione

2.7.3.1.2- Metodo A – instabilità flessione torsionale nelle aste presso inflesse.

La verifica è simile a quella eseguita nella instabilità piana per le aste presso inflesse. Per tener conto dell'effetto torsionale, si considera l'incremento di instabilità riducendo il momento resistente $\frac{f_{yk} \cdot W_y}{\gamma_{M1}}$ attorno all'asse y, moltiplicandolo per il coefficiente riduttivo χ_{LT} , calcolato rispetto all'asse debole z.

Per la verifica deve risultare

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_{min} \frac{f_{yk} \cdot A}{\gamma_{M1}}} + \frac{M_{y,eq,Ed}}{\chi_{LT} \cdot \frac{f_{yk} \cdot W_y}{\gamma_{M1}} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} \right)} + \frac{M_{z,eq,Ed}}{\frac{f_{yk} \cdot W_z}{\gamma_{M1}} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}} \right)} \leq 1$$

Riassumendo in breve la determinazione di χ_{LT}

$$M_{cr} = \psi \cdot \frac{\pi}{L_{cr}} \sqrt{E J_z \cdot G J_T} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{L_{cr}} \right)^2 \cdot \frac{E J_\theta}{G J_T}}$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_{yk}}{M_{cr}}}$$

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

$$f = 1 - 0,5 \cdot (1 - k_c) \cdot \left[1 - 2,0 \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right]$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \cdot \frac{1}{f} \end{cases}$$

2.7.3.1.3- Metodo B – instabilità flesso torsionale nelle aste presso inflesse.

È particolarmente adatto per la verifica delle membrature con sezioni doppiamente simmetriche, aperte o chiuse, soggette a sforzi assiali e momenti flettenti.

Per la verifica di sezioni di classe 1,2,3 deve risultare:

$$\begin{cases} \frac{N_{Ed}}{\chi_y \cdot \frac{A \cdot f_{yk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \cdot \frac{W_y \cdot f_{yk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yz} \cdot \frac{M_{z,Ed}}{\frac{W_z \cdot f_{yk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \\ \frac{N_{Ed}}{\chi_z \cdot \frac{A \cdot f_{yk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \cdot \frac{W_y \cdot f_{yk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zz} \cdot \frac{M_{z,Ed}}{\frac{W_z \cdot f_{yk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \end{cases}$$

dove

N_{Ed}

è lo sforzo normale assiale di progetto;

$M_{y,Ed}$, $M_{z,Ed}$

sono i momenti flettenti massimi di progetto sull'asta, rispettivamente attorno all'asse y e z;

χ_y , χ_z

sono i coefficienti di riduzione per l'instabilità a compressione

χ_{LT}

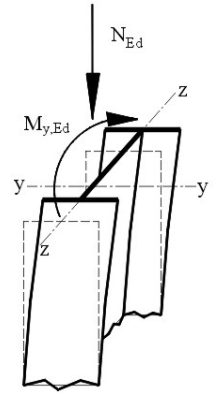
è il coefficiente di riduzione per l'instabilità flesso torsionale

k_{yy} , k_{yz} , k_{zy} , k_{zz}

Fig.2.7.8

sono i coefficienti di interazione dei momenti con gli spostamenti di sbandamento laterale.

Il primo pedice indica attorno a quale asse si presenta lo sbandamento laterale. Il secondo pedice indica in quale momento applicato si presenta detto sbandamento, determinando il esso un incremento di applicazione.



Così k_{yy} è il coefficiente di interazione, che determina un contributo all'azione del momento $M_{y.Ed}$, dovuto allo sbandamento laterale con rotazione attorno all'asse y (spostamento in direzione dell'asse z), dipendente dallo sforzo normale N_{Ed} e dalla snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_y$.

k_{yz} è il coefficiente di interazione, che determina un contributo all'azione del momento $M_{z.Ed}$, dovuto allo sbandamento laterale, attorno all'asse y, dipendente dallo sforzo normale N_{Ed} e snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_y$,

k_{zy} è il coefficiente di interazione, che determina un contributo all'azione del momento $M_{y.Ed}$, dovuto allo sbandamento laterale, attorno all'asse z, dipendente dallo sforzo normale N_{Ed} e snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_z$,

ecc....

Determinazione dei coefficienti $k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$

Si distinguono

- Per le membrature a sezione chiusa i coefficienti $k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$ si ricavano dalla (**Tabella C4.2.IV**).
- Per le membrature a sezione aperta, con vincoli che impediscono spostamenti torsionali, i coefficienti $k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$ si ricavano dalla (**Tabella C4.2.IV**)
- Per le membrature a sezione aperta, non vincolate torsionalmente, i coefficienti $k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$ si ricavano dalla (**Tabella C4.2.V**)

Tabella C4.2.IV - Coefficienti di interazione per la verifica di stabilità a presso flessione di elementi con modesta deformabilità torsionale

k	Tipi di sezione	Sezioni di classe 3 e 4 (proprietà delle sezioni calcolate nel campo elastico)
k_{yy}	I, H Sezioni cave	$\alpha_{my} \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda}_y \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{my} \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
k_{yz}	I, H Sezioni cave	k_{zz}
k_{zy}	I, H Sezioni cave	$0,8 \cdot k_{yy}$
k_{zz}	I, H	$\alpha_{mz} \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda}_y \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{mz} \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
	Sezioni cave	
Per presso flessione retta $M_{y,Ed} \neq 0$, $k_{zy} = 0$ ($M_{z,Ed} = 0$)		

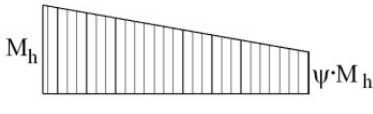
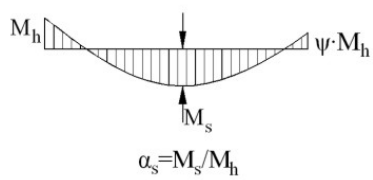
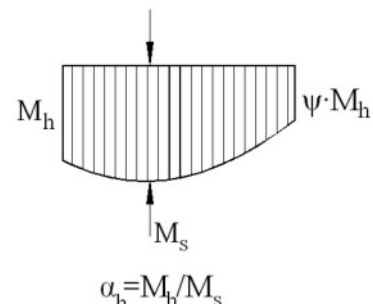
k	Tipi di sezione	Sezioni di classe 1 e 2 (proprietà delle sezioni calcolate nel campo plastico)
k_{yy}	I, H Sezioni cave	$\alpha_{my} \cdot \left(1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{my} \cdot \left(1 + 0,8 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
k_{yz}	I, H Sezioni cave	$0,6 \cdot k_{zz}$
k_{zy}	I, H Sezioni cave	$0,6 \cdot k_{yy}$
k_{zz}	I, H	$\alpha_{mz} \cdot \left(1 + (2 \cdot \bar{\lambda}_y - 0,6) \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{mz} \cdot \left(1 + 1,4 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
	Sezioni cave	
Per presso flessione retta $M_{y,Ed} \neq 0$, $k_{zy} = 0$ ($M_{z,Ed} = 0$)		

Tabella C4.2.V - Coefficienti di interazione per la verifica di stabilità a presso flessione di elementi deformabili torsionalmente

k	Sezioni di classe 3 e 4 (proprietà delle sezioni calcolate nel campo elastico)
k_{yy}	$\alpha_{my} \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda}_y \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{my} \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
k_{yz}	k_{zz}
k_{zy}	$\left(1 - \frac{0,05 \cdot \bar{\lambda}_z}{(\alpha_{mLT} - 0,25)} \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \geq \left(1 - \frac{0,05}{(\alpha_{mLT} - 0,25)} \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
k_{zz}	$\alpha_{mz} \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda}_z \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{mz} \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$

k	Sezioni di classe 1 e 2 (proprietà delle sezioni calcolate nel campo elastico)
k_{yy}	$\alpha_{my} \cdot \left(1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{my} \cdot \left(1 + 0,8 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$
k_{yz}	$0,6k_{zz}$
k_{zy}	$\left(1 - \frac{0,1 \cdot \bar{\lambda}_z}{(\alpha_{mLT} - 0,25)} \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \geq \left(1 - \frac{0,1}{(\alpha_{mLT} - 0,25)} \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$ per $\bar{\lambda}_z \geq 0,4$ $k_{zy} = 0,6 + \bar{\lambda}_z \leq \left(1 - \frac{0,1 \cdot \bar{\lambda}_z}{(\alpha_{mLT} - 0,25)} \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$ per $\bar{\lambda}_z < 0,4$
k_{zz}	$\alpha_{mz} \cdot \left(1 + (2 \cdot \bar{\lambda}_z - 0,6) \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{mz} \cdot \left(1 + 1,4 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$

Tabella C4.2.6 Coefficienti correttivi del momento flettente per la verifica di stabilità a pressoflessione deviata

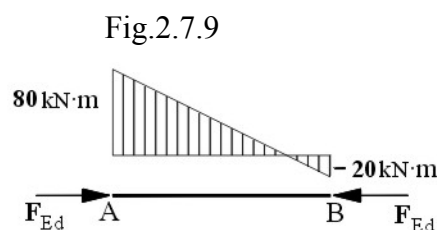
Diagramma del momento	Intervallo		Coefficienti $\alpha_{my}, \alpha_{mz}, \alpha_{mLT}$	
			Carico uniforme	Carico concentrato
	$-1 \leq \psi \leq 1$		$0,6 + 0,4\psi \geq 0,4$	
	$0 \leq \alpha_s \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,2 + 0,8 \cdot \alpha_s \geq 0,4$	$0,2 + 0,8 \cdot \alpha_s \geq 0,4$
	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,1 - 0,8 \cdot \alpha_s \geq 0,4$	$-0,8 \cdot \alpha_s \geq 0,4$
		$-1 \leq \psi \leq 0$	$0,1 \cdot (1 - \psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2(-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$
	$0 \leq \alpha_h \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 \div 0,10\alpha_h$
	$-1 \leq \alpha_h < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 \div 0,10\alpha_h$
		$-1 \leq \psi \leq 0$	$0,95 + 0,05\alpha_h(1 + 2\psi)$	$0,90 + 0,10\alpha_h(1 + 2\psi)$

I valori dei coefficienti di interazione dipendono dalla distribuzione del momento lungo l'asta, attraverso i coefficienti correttivi $\alpha_{my}, \alpha_{mz}, \alpha_{mLT}$, riportati nella **Tabella C4.VI**, in funzione della forma del diagramma del momento flettente.

Facciamo qui di seguito degli esempi esplicativi, per determinare l'espressione di uno dei coefficienti di interazione $k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$ e correttivi $\alpha_{my}, \alpha_{mz}, \alpha_{mLT}$, a seconda della particolare distribuzione del momento sull'asta e dell'asse di sbandamento.

Primo esempio

L'asta, deformabile torsionalmente sia sollecitata ad un carico assiale di progetto N_{Ed} e ad un momento flettente con distribuzione lineare nella sua lunghezza come in figura.



Si voglia determinare il coefficiente di interazione k_{zy} .

Sia:

$$\bar{\lambda}_z > 0,4$$

La sezione sia di classe I

Dalla **Tabella C4.2V** si ricava:

$$k_{zy} = \left(1 - \frac{0,1 \cdot \bar{\lambda}_z}{(\alpha_{mLT} - 0,25)} \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \geq \left(1 - \frac{0,1}{(\alpha_{mLT} - 0,25)} \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \quad \text{per } \lambda_z \geq 0,4$$

Il coefficiente di interazione k_{zy} è funzione della snellezza adimensionale $\bar{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_p}$ riferita all'instabilità per compressione, al coefficiente di riduzione χ_z , riferito anch'esso alla instabilità per compressione e dipende da coefficiente correttivo α_{mLT} che tiene conto della distribuzione del momento flettente lungo l'asta (dal tipo di diagramma del momento flettente), come riportato nella **Tabella C4.2.VI**.

Nel caso considerato nell'esempio si ha un andamento lineare con il rapporto ψ tra i momenti con segno alle estremità dell'asta (in valore assoluto $\frac{|\text{momento più piccolo}|}{|\text{momento più grande}|}$)

$$\psi = \frac{-20}{+80} = -\frac{1}{4}$$

è:

$$-1 < -\frac{1}{4} < 1$$

quindi risulta:

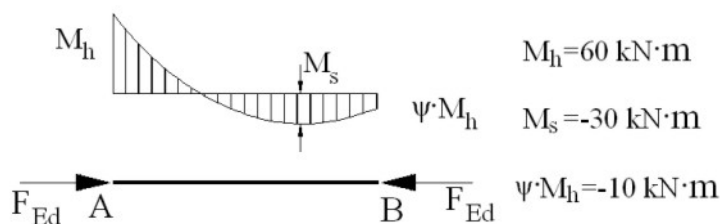
$$\alpha_{mLT} = 0,6 + 0,4\psi$$

$$\alpha_{mLT} = 0,6 + 0,4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)$$

$$\alpha_{mLT} = 0,5$$

Secondo esempio

Fig.2.7.10



L'asta, deformabile torsionalmente, sia sollecitata ad un carico assiale di progetto N_{Ed} e ad un momento flettente con distribuzione lineare nella sua lunghezza come in figura.

Sezione di classe 2

Si voglia determinare il coefficiente di interazione k_{zz} .

Dalla **Tabella C4.2V** si ricava:

$$k_{zz} = \alpha_{mz} \cdot \left(1 + (2 \cdot \bar{\lambda}_z - 0,6) \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{mz} \cdot \left(1 + 1,4 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_z \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$$

Il coefficiente k_{zz} è funzione di $\bar{\lambda}_z$, χ_z e del coefficiente α_{mz} che tiene conto della distribuzione del momento flettente lungo l'asta

Determinazione di α_{mz}

Per scegliere a quale schema di diagramma riferirsi, tra quelli riportati nella tabella **Tabella C4.2.6**, occorre determinare i due rapporti α_s, α_h

Rapporto α_s

$$\alpha_s = \frac{M_s}{M_h} = \frac{-30}{60} = -\frac{1}{2}$$

Rapporto α_h

$$\alpha_h = \frac{M_h}{M_s} = \frac{60}{-30} = -2$$

Risulta α_s nei limiti previsti $-1 \leq \alpha_s < 0$ nel secondo diagramma schematico, partendo dal primo in alto e, in quello, non vi sono limiti imposti sul valore di α_h

α_h è fuori dai limiti previsti nel terzo diagramma schematico.

Si ricava, quindi, il parametro α_{mz} dal secondo diagramma schematico corrispondente a $-1 \leq \alpha_s < 0$

$$\psi = \frac{M_B}{M_A} = \frac{-10}{60} = -\frac{1}{6}$$

risulta

$$-1 \leq \psi < 0$$

con carico uniforme deve essere

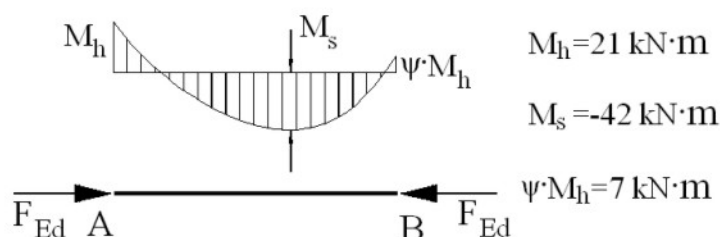
$$\alpha_{mz} = 0,1(1 - \psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$$

$$\alpha_{mz} = 0,1 \cdot \left[1 - \left(-\frac{1}{6} \right) \right] - 0,8 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$\alpha_{mz} = 0,57 > 0,4$$

Terzo esempio

Fig.2.7.11



L'asta, deformabile torsionalmente, sia sollecitata ad un carico assiale di progetto N_{Ed} e ad un momento flettente con distribuzione nella sua lunghezza come in figura.

Sezione di classe 3

Si voglia determinare il coefficiente di interazione k_{yy} .

Dalla **Tabella C4.2V** si ricava:

$$k_{yy} = \alpha_{my} \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda}_y \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\lambda_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right) \leq \alpha_{my} \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\lambda_y \cdot A \cdot f_{yk}} \right)$$

Il coefficiente k_{yy} è funzione di $\bar{\lambda}_y$, λ_y e del coefficiente α_{my} che tiene conto della distribuzione del momento flettente lungo l'asta.

Determinazione di α_{my}

Per scegliere a quale schema di diagramma riferirsi si determinano i valori di α_s , α_h

Rapporto α_s

$$\alpha_s = \frac{M_s}{M_h} = \frac{-42}{21} = -2$$

Rapporto α_h

$$\alpha_h = \frac{M_h}{M_s} = \frac{21}{-42} = -\frac{1}{2}$$

Risulta $\alpha_s = -2$ fuori dai limiti previsti nel secondo diagramma schematico, rappresentato partendo dal primo in alto

Risulta α_h nei limiti $-1 \leq \alpha_h < 0$ previsti nel terzo diagramma schematico (qualunque sia α_s)

Si ricava, quindi, il parametro α_{my} dal terzo diagramma schematico corrispondente a $-1 \leq \alpha_h < 0$

$$\psi = \frac{M_B}{M_A} = \frac{\psi \cdot M_h}{M_h} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

risulta

$$0 \leq \psi < 1$$

Con carico uniforme si ha:

$$\alpha_{my} = 0,95 + 0,05 \alpha_h$$

$$\alpha_{my} = 0,95 + 0,05 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$\alpha_{my} = 0,925$$

Coefficiente di riduzione λ_{LT} per l'instabilità flessione torsionale

È il coefficiente come definito al paragrafo 4.2.1.3.1 delle norme NTC

$$M_{cr} = \psi \cdot \frac{\pi}{L_{cr}} \sqrt{E J_z \cdot G J_T} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{L_{cr}} \right)^2 \cdot \frac{E J_{\theta}}{G J_T}}$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_{yk}}{M_{cr}}}$$

$$\begin{aligned}\phi_{LT} &= 0,5 \cdot \left[I + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] \\ f &= 1 - 0,5 \cdot (1 - k_c) \cdot \left[I - 2,0 \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right] \\ \chi_{LT} &= \frac{I}{f} \cdot \frac{I}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} I \\ \frac{I}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \cdot \frac{I}{f} \end{cases}\end{aligned}$$

Nella formula del momento critico M_{cr} il fattore EJ_z è la rigidezza flessionale laterale rispetto all'asse debole. Nella normativa NTC è indicata genericamente con EJ_y specificando che occorre riferirsi all'asse debole.

SEGUE \longrightarrow



Indietro...

[Clic per la pagina precedente](#)



Avanti...

[Clic per proseguire](#)



Indietro...

[Clic per tutti i file III parte](#)