Ottavio Serra

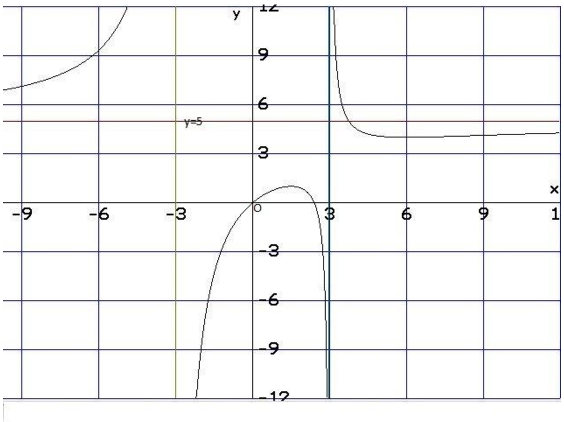
Esame di stato 2019. Soluzione del Questionario.

Nota: le righe in rosso sono complementi aggiunti dal sottoscritto.

Quesito 1. Dagli asintoti *"verticali"* segue d=-9; dall'asintoto *"Orizzontale"* segue $p(x)=5x^2+ax+b$; dai punti di intersezione con l'asse delle x segue a=-12, b=0. Perciò

$$f(x)=\frac{5x^2-12x}{x^2-9}.$$

Siccome il grafico di f interseca l'asintoto y=5 nel punto di scissa 15/4, prevedo un massimo relativo per x compreso tra 0 e 3, un minimo relativo per x>15/4 e perciò, qualitativamente, il grafico è il seguente:



Siccome il grafico di f è una curva del 3° ordine, una retta lo può intersecare al massimo in tre punti, perciò l'ordinata del massimo relativo **deve essere** minore dell'ordinata del minimo relativo.

La derivata è $f'(x)=6\frac{2x^2-15x+18}{\left(x^2-9\right)^2}$, i cui zeri sono 3/2 e 6; le ordinate sono rispettivamente y_{Max}= f(3/2)=1 e y_{min}= f(6)=4, valori che confermano le previsioni qualitative. Si noti che il grafico deve avere un (solo) flesso per x>6 (e ordinata compresa tra 4 e 5). Uguagliando a zero la derivata seconda, si trova l'equazione $4x^3-45x^2+108x-135=0$, la cui unica soluzione reale è x=8,555… confermando quanto suggerito dal grafico.

Quesito 2. La funzione g(x) è un polinomio con tutti i termini di grado dispari e coefficienti tutti positivi. Perciò i suoi valori si estendono da – Infinito a +Infinito e siccome la sua derivata ha tutti i termini pari e coefficienti tutti positivi, è positiva per tutte le x reali; segue che g(x) è monotòna crescente e, essendo continua su tutto l'asse reale, assume tutti i valori reali una e una sola volta. Perciò ammette un solo zero. Il limite per x tendente a +Infinito di $g(x)/(1,1^x)$ vale zero, perché il numeratore è un infinito di ordine polinomiale, mentre il denominatore è un infinito di ordine esponenziale, cioè di ordine arbitrariamente elevato. Del resto, basta applicare il teorema di L'Hòspital (2019 volte!) per verificare che il limite è zero.

Quesito 3. Il parallelepipedo richiesto è il cubo di spigolo pari alla radice quadrata di un sesto di S.

Infatti, detto x lo spigolo di base, y lo spigolo laterale, $S=2x^2+4xy$; la somma di tutti gli spigoli è f(x,y)=8x+4y che, col vincolo precedente, diventa f(x)=6x+S/x. Poi, f'(x)=… eccetera.

Determinare anche gli estremi di x. A quale tipo di curva appartiene il grafico di f(x)?

Quesito 4. Si tratta dell'estensione allo spazio del problema del cerchio di Apollonio, celebre matematico greco (Perga 262 a.C. – Alessandria 190 a.C.). Detto P(x;y;z) il generico punto della superficie da determinare, dalla condizione $AP^2 = 2.BP^2$ segue l'equazione $x^2+y^2+z^2+12x-8y-6z+13=0$, che rappresenta la sfera di centro C(-6; 4; 3) e raggio $\sqrt{48}$.

Il vettore **CT/4** = (4; -4; -4) /4 = (1; -1; -1) è il vettore normale al piano tangente che pertanto ha equazione (x+10) -(y-8) -(z-7) =0, ovvero x-y-z+25=0.

Verificare *che la distanza di questo piano dal centro della sfera è uguale al raggio della sfera.*

Quesito 5.

(Siccome i dadi sono **oggetti macroscopici**, *distinguibili almeno in linea di principio*, vanno contate le disposizioni; **se fossero indistinguibili**, **come i bosoni**, andrebbero contate le combinazioni).

a) La somma non superiore a 5 si può ottenere con quattro "1" o con 3 "1" e un "2".
I 4 "1" si possono ottenere in un sol modo, i 3 "1" e il "2" si possono ottenere i 4 modi (perché?) La misura dell'evento è perciò 5, la misura dello spazio di probabilità è 6^4 e $P=5/6^4= 0{,}0039$ circa.
Lanciando n dadi, qual è la probabilità P(n) che la somma degli n risultati non superi n+1? Verificare che, se n tende all'infinito, tale probabilità tende a zero: come si potrebbe intuire ciò? **Calcolare** il **minimo** numero n dei dadi tali che P(n) sia minore di 10^{-3}.

b) Nei risultati dei quattro lanci deve comparire almeno un "3" o almeno un "6"; la probabilità che un dado **non dia** né "3" né "6" è q=4/6=2/3; perciò la probabilità che il prodotto dei quattro risultati **non sia multiplo di 3** è $Q=q^4=(2/3)^4$ e la probabilità che sia multiplo di 3 è P=1-16/81 che vale poco più dell'80%. **Generalizzare** al caso di n dadi: che cosa si nota? **Calcolare** anche la probabilità che il prodotto dei quattro risultati sia **pari. Generalizzare** al caso di n dadi e dare una giustificazione intuitiva del fatto che per n tendente all'infinito questa probabilità tende a 1.

c) **1° caso**: E1=4 "4"; ciò si può realizzare in un sol modo perciò $m(E_1)=1$. **2° caso**: E_2 =3 "4"" e un "a" dove a può assumere uno dei 3 valori (1, 2, 3) e può uscire su uno qualunque dei 4 dadi; perciò $m(E_2)=\binom{4}{1}3^1=12$. **3° caso:** E_3 = 2 "4", 1 "a" e 1 "b", (a e b sono valori distinti o coincidenti tra 1, 2, 3; perciò $m(E_3)=\binom{4}{2}3^2=54$. **4° caso:** E_4 = 1 "4", 1 "a", 1 "b", 1 "c", dove a, b, c assumono valori, distinti o coincidenti, sui numeri 1, 2, 3; perciò $m(E_4)=\binom{4}{3}3^3=108$. Dunque la probabilità richiesta è $P=\frac{1+12+54+108}{6^4}=\frac{175}{12996}\approx 13{,}5\%.$
Come varia la probabilità che il massimo risultato sia 4 lanciando due dadi, tre dadi, cinque dadi, sei dadi? Sapreste dare una giustificazione qualitativa della tendenza osservata?
Un modo generale molto elegante per calcolare la probabilità che, lanciando n dadi (o equivalentemente lanciando un dado n volte) il massimo risultato sia k (intero da 1 a 6) è il seguente: $P(n, Max=k) = P(n, Max\leq k) - P(n, Max \leq k-1) = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n$. Verificare il caso del quesito (n=4, k==4).
Calcolare quante volte devo lanciare un (**solo**) dado perché la probabilità che esca il "5" sia maggiore del 90%. **Calcolare** poi (lanciando un solo dado) la probabilità che il "5" esca per la

prima volta all'10^{mo} lancio e, infine, la probabilità che il "5" esca almeno una volta nei primi tre lanci e almeno una volta nei tre lanci 20°, 21° e 22°.

Quesito 6. Per la relazione tra verso della correte indotta e variazione di flusso magnetico vedi la legge di Lenz. La f.e.m. indotta f_{media}= -S(ΔB/Δt) e i_{media} =-S(ΔB/Δt)/R; eccetera, sostituire i dati.

a) ΔB=-0,2 -0=-0,2 mT, Δt=3 ms. Segue i_{media} =+0,05 A;
b) ΔB=0,2-(-0,2) =0,4 mT, Δt=2 ms. Segue i_{media} =-0,15 A;
c) ΔB=0-(0,2) =-0,2 mT, Δt=5 ms. Segue i_{media} = 0,03 A.

Quesito 7. Nel riferimento R del laboratorio la velocità della particella è

u=+25cm/2ns= 1,25 .10^8m/s=0,417c.

Siccome l'astronave R' si muove, rispetto a R, con velocità v=+0,8c, la particella rispetto a R' avrà velocità $u'=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}=\frac{0,417c-0,8c}{1-0,417.0,8}=\frac{-0,383}{0,666}c=-0,575c=-1,725{,}10^8 m/s$. L'astronave sorpassa la particella e la vede andare all'indietro. **Che succederebbe se la particella fosse un fotone?**

L'astronave vede un tratto di $25.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=25.\sqrt{1-0,64}=25.0,6=15cm$ (*contrazione delle lunghezze)* e un intervallo di tempo pari a 2/0,6=3,33 ns (*dilatazione dei tempi*).

Quesito 8. La forza magnetica è $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$. Detto θ l'angolo tra i vettori **v** e **B**, la componente di **v** ortogonale a **B** èv.sen(θ) e il modulo di **F** è qvB.sen(θ), che va uguagliato alla forza centripeta mv^2/r da cui segue v=qBr.sen(θ)/m. La componente di v parallela al campo non produce forza magnetica, perciò il moto è rettilineo uniforma, con Δx=v.cosθ.Δt, perciò la traiettoria complessiva è un'elica cilindrica. Siccome Δx è il passo dell'elica, Δt è il periodo del moto circolare: Δt=2πr/(v.senθ) e infine Δx=v.cosθ.2πr/(v.senθ) =2πr.cotg(θ). Si ricava tang(θ)=2πr/Δx=6,28.0,105/0,381=1,73. Perciò θ=60°. Segue che il modulo della velocità è

v=1,602.10^{-19}.10^{-3}.0,105. 0,866/(1,672.10^{-27})=0,087.10^5= 8700 m/s.