Ottavio Serra

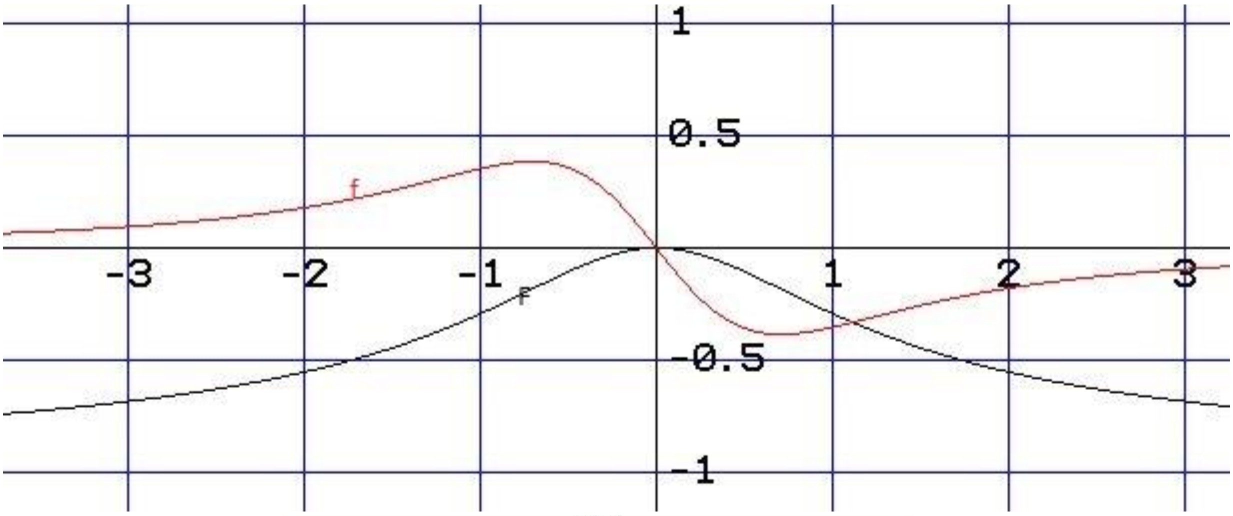
Esame di stato 2019. Soluzione del problema 2.

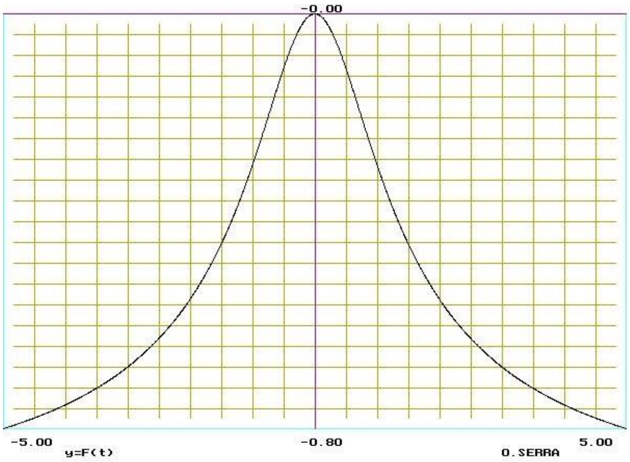
1) Un campo elettrico variabile genera un campo magnetico variabile ortogonale al primo, per le equazioni di Maxwell. Il campo elettrico variabile produce quella che Maxwell chiama *corrente di spostamento*, che a tutti gli effetti si comporta come una corrente di cariche elettriche diretta lungo l'asse di simmetria del condensatore; perciò il campo magnetico indotto è tangente alle circonferenze concentriche e ortogonali a tale asse. Segue che la circuitazione di **B** lungo la circonferenza c del testo è $\int_c \vec{B}.d\vec{l} = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}r.2\pi r = \frac{2\pi k r^2 t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$.

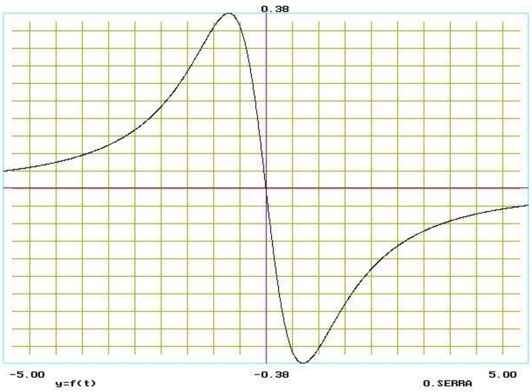
2) Per calcolare il campo elettrico dalla conoscenza del campo magnetico occorre la 4ª equazione di Maxwell. Detta S l'area del disco di bordo c, $\int_c \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0\left[\iint_S \vec{J}.d\vec{S} + \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S}\right]$. Il primo integrale esprime la legge di Ampère (somma algebrica delle correnti *concatenate* con c, J è la densità di corrente di conduzione), il secondo integrale è la corrente *di spostamento* di Maxwell (si ricordi che il vettore **D**=ε**E**, ora detto vettore induzione dielettrica, nell'800 era chiamato spostamento elettrico).
Nel nostro caso J è nulla, perciò la 4ª equazione di Maxwell si riduce a
$2\pi r B = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\pi r^2$, da cui, ricordando l'espressione della circuitazione di B ricavata nel primo punto, si ottiene $\frac{2\pi r^2 kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} = \mu_0\varepsilon_0 \pi r^2 \frac{\partial E}{\partial t}$ e infine $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{k}{\mu_0\varepsilon}\frac{2t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$.
Quest'ultima equazione (differenziale) si integra in modo elementare, fornendo
$E(t) = \frac{k}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{-2}{\sqrt{t^2+a^2}} + C$. La costante di Integrazione C si ottiene dal fatto che E(0)=V(0)/d=0, perciò $C = \frac{2k}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{1}{a}$; finalmente $E(t) = \frac{2k}{\mu_0\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right]$, q.e.d.
In ultimo, per avere il flusso del campo elettrico attraverso S si moltiplichi E per l'area πr^2 di S. La d.d.p. V(t) tra le armature del condensatore è V=E.d.
B tende a zero al tendere del tempo t all'infinito sia perché, formalmente, è infinitesimo come $1/t^2$, sia, dal punto di vista fisico, perché è proporzionale alla variazione (derivata) del campo elettrico che, al divergere di t, tende al valore costante C su calcolato.

3) I punti 3) e 4) sono di pura analisi matematica e, secondo me, sono stati introdotti sia per *allungare il brodo*, sia per consentire, a chi non sa di fisica, di scrivere almeno qualcosa di matematica. Infatti, le funzioni f(t), e F(t), con un fattore moltiplicativo negativo, le abbiamo già incontrate nei punti precedenti.

4) Idem, come sopra.
Gli integrali proposti hanno valor zero per motivi di simmetria.
Calcolate, invece, l'integrale di f per x che va da 1 a 2.
Riporto solo i grafici di F(t) e di f(t) con a=1.







I grafici sovrapposti sono stati realizzati con Derive,
i grafici singoli con mio software.

I punti di flesso di F sono punti stazionari di f: $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$.

I flessi di f sono x=0 (centro di simmetria) e $x = \pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Si noti il cambiamento di parità passando da una funzione alla sua derivata.