Ottavio Serra

Esame di stato 2019, Soluzione del Problema 1.

1) Il grafico della funzione f è una parabola con asse di simmetria x=1/(2a), interseca l'asse y in B(0; b) e ivi è tangente alla retta di coefficiente angolare -1. (ovvio).
La funzione g(x) è continua e derivabile su tutto l'asse reale (ovvio), $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0^-$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0^+$ (se a>0, altrimenti si invertono i limiti 0^- e 0^+). Ciò segue immediatamente dal fatto che il fattore e^{2x-x^2} è un infinitesimo di ordine *esponenziale* (maggiore di ogni n>0) mentre il fattore (ax+b) è un infinito del primo ordine. Segue che il grafico di g presenta un minimo assoluto di ordinata negativa e, a destra, un massimo assoluto di ordinata positiva, se a>0; viceversa, se a<0 viene prima il massimo e poi il minimo. Derivando g(x) si vede che g'(0)=-1, perciò i grafici di f e di g sono tangenti in B(0; b) alla rette y=-x+b. Tutto ciò qualunque siano i parametri a e b.

2) Imponendo che i grafici si intersechino (oltre che in B(0; b)) anche in A(2; 1), si ottiene il sistema:
$$\begin{cases}4a-2+b=1\\(2a+b)e^{4-4}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a-2+b=1\\(2a+b)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a-2=0\\b=1-2a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$$
Con questi valori di a e di b le funzioni diventano $f(x)=x^2-x-1$, $g(x)=(x-1)e^{2x-x^2}$, il punto B(0; -1) e la tangente comune in B è y=-x-1.
Il grafico di f è una parabola col vertice in (-1/2; -5/4). La derivata di g(x) è $g'(x)=e^{2x-x^2}+(x-1)e^{2x-x^2}(2-2x)$. Uguagliando a zero, ho:
1+(x-1)(2-2x)=0, cioè $2x^2-4x+1=0$, le cui soluzioni sono $x_1=1-\frac{1}{\sqrt{2}}, x_2=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$. Le ordinate del minimo e del massimo sono rispettivamente $g(x_1)=-\sqrt{\frac{e}{2}}$ e $g(x_2)=+\sqrt{\frac{e}{2}}$.
Il fatto che i punti $G_{\min}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}};-\sqrt{\frac{e}{2}}\right)$ e $G_{Max}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}};+\sqrt{\frac{e}{2}}\right)$ siano simmetrici rispetto al punto (1; 0), come pure i punti B(0; -1) e A(2; 1), fa presumere che (1; 0) sia centro di simmetria per il grafico di g. Provo perciò la traslazione x=X+1, y=Y. Ottengo $Y=g(X)=Xe^{-X^2+1}$, che è chiaramente una funzione dispari (simmetrica rispetto alla nuova origine (X=0; Y=0), corrispondente del punto (x=1; y=0). La forma traslata è più agevole per trovare i flessi.
$Y'=e^{-X^2+1}-2X^2e^{-X^2+1}\geq 0\Rightarrow 2X^2\leq 1\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}\leq X\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$, da cui per la traslazione inversa si riottengono i risultati già trovati. Per avere i flessi (ne prevedo tre) trovo Y'':
$Y''=e^{-X^2+1}(-2X)(1-2X^2)+e^{-X^2+1}(-4X)=0\Rightarrow -2X+4X^3-4X=0$, da cui si ottengono le tre soluzioni $X=0, X=-\sqrt{\frac{3}{2}}, X=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Le ordinate dei tre flessi sono $Y=0, Y=-\sqrt{\frac{3}{2e}}, Y=\sqrt{\frac{3}{2e}}$. Tornando alle vecchie coordinate x, y i tre flesso sono

$F_1(1;\ 0)$, centro di simmetria per g, $F_2\left(1-\sqrt{\frac{3}{2}};-\sqrt{\frac{3}{2e}}\right), F_3\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2e}}\right)$.

Nella fig.1 riporto i grafici di f e di g:

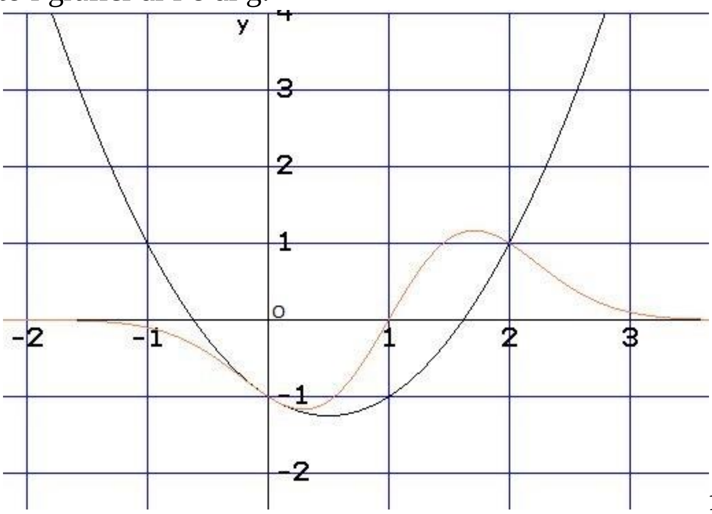

fig.1

La fig.2 mostra il grafico di g e della tangente in B(0; -1):

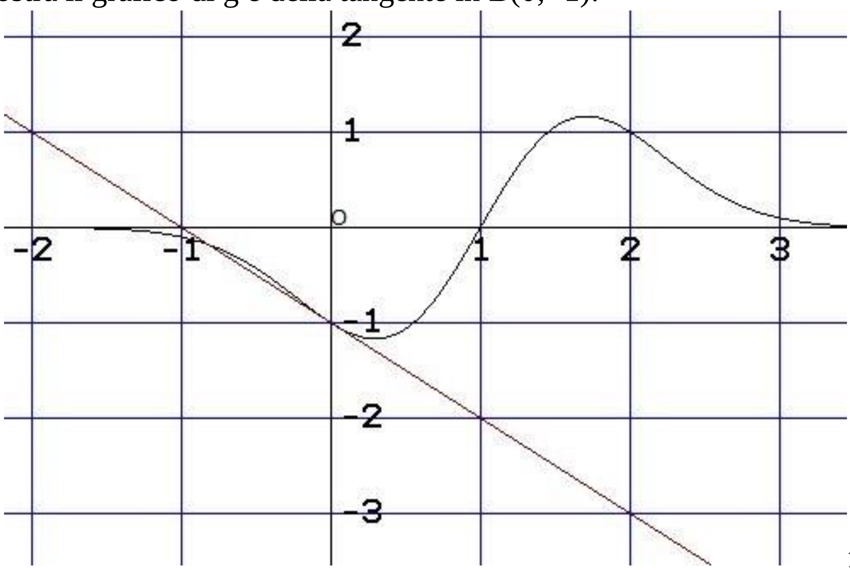

fig.2

Dal disegno si vede che la tangente seca il grafico di g in un punto prossimi a (-0,8; -0,2). Usando un metodo numerico per lo zero di una funzione, si trova x=-0,82 e quindi y=-0,18. Siccome i grafici di f e di g si toccano in B(0; -1) e si intersecano in A(2; 1), la regione S è limitata inferiormente dal grafici di f e superiormente dal grafico di g, per x che va da 0 a 2. Pertanto

$$S=\int_0^2 g(x)dx-\int_0^2 f(x)dx=0-\int_0^2 (x^2-x-1)dx=-\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-2\right)=\frac{4}{3}.$$

Si noti che l'integrale di g da 0 a 2 vale zero, per motivi di simmetria. Se non ci credete, fate il calcolo, magari sulla funzione dispari traslata, in tal caso per X che va da -1 a +1.

3) Ricordo che la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa, un circuito (il bordo di S) è data da μ, permeabilità magnetica del mezzo, per la somma algebrica delle correnti concatenate col circuito, Occorre perciò controllare se i punti $P_1(3/2;\ 0)$, $P_2(3/2;\ 1)$,

$P_3(3/2; -1)$ siano interni ad S o no, $f(3/2)=-1/4$, $g(3/2)=0{,}5e^{3/4}=1{,}058>1$; perciò P_1 e P_2 sono interni ad S e le correnti i_1 e i_2 sono concatenate, i_3 non è concatenata perché P_3 sta al di sotto di f, essendo $-1<-1/4$, e i_3 non contribuisce alla circuitazione,

Perciò, se i_2 è concorde con i_1, contribuisce ad aumentare la circuitazione, se è discorde, al crescere di i_2 da 0 a 2 A la circuitazione diminuisce fino ad annullarsi e poi si inverte, se i_2 supera 2 A. (**NOTA**: non ha nessuna importanza che i fili siano perpendicolari al piano x,y).

4) Il flusso di **B** attraverso una superficie S in generale è $\Phi_S(\vec{B}) = \iint_S B\cos(\theta)dS$, essendo θ l'angolo tra il vettore **B** e la normale all'elemento di superficie dS. Se, come nel nostro caso, S è piana e **B** è costante e uniforme, $\Phi=BS\cos(\theta)=BS\cos(\omega t+\alpha)$. Nel nostro caso $\alpha = 0$, perché **B** è perpendicolare al piano x,y della spira (la frontiera di S) all'istante zero, ma ciò non ha importanza per il calcolo della forza elettrmotrice $\mathcal{E}$. Infatti, $\mathcal{E} = -d\Phi/dt = BS\omega.\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$ e la corrente massima è $i_{max}=BS\omega/R$.

Con i dati forniti si trova $\omega = \frac{i_{\max} R}{BS} = \frac{5.10^{-3} 2.10^{-1}}{1{,}5.10^{-2}.\frac{4}{3}} = \frac{10^{-3}}{2.10^{-2}} = \frac{1}{20} Rad/s = 0{,}05 Rad/s$.