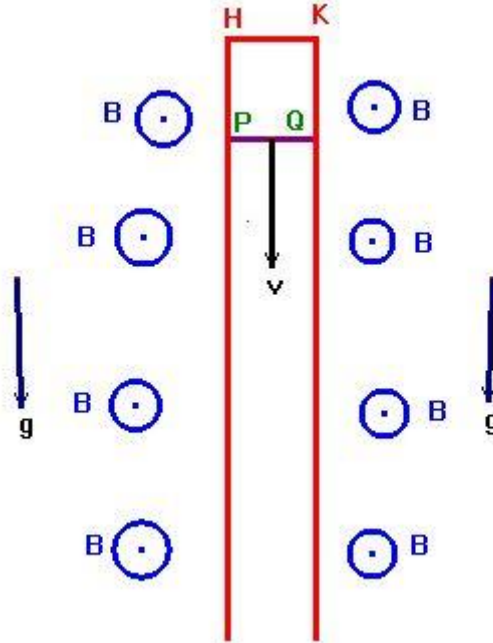


**Ottavio Serra**  
**Simulazione Prova di Matematica e Fisica**  
**Ideata da me (Febbraio 2019)**

**PROBLEMA**

Una guida di rame a forma di una lunga “u” rovesciata, di resistenza elettrica trascurabile, è disposta verticalmente nel campo di gravità terrestre e immersa in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  perpendicolare al piano della guida (Vedi figura).



Una barretta metallica PQ, di massa  $m$ , resistenza elettrica  $R$  e lunghezza  $L=HK$ , inizialmente a riposo in posizione HK, scivola lungo i bordi verticali della guida, sotto l'azione del campo di gravità  $\mathbf{g}$ . Si trascuri l'attrito, la resistenza dell'aria e la spinta di Archimede sulla barretta.

**Punto 1.** Si dica perché il campo magnetico produce sulla barretta una forza che si oppone al suo moto causato dal peso  $m\mathbf{g}$ , qualunque sia il verso di  $\mathbf{B}$ .

**Punto 2.** Dopo aver trovato la formula della f.e.m. indotta ai capi della barretta e della corrente indotta nel circuito PQKH, si calcoli la forza magnetica, (diretta verso l'alto) e si controlli che, pertanto, la forza totale agente sulla barretta è

$$[1] \vec{F} = m\vec{g} - \frac{B^2 L^2}{R} \vec{v}. \quad (\text{Si assuma il verso del moto positivamente verso il basso}).$$

**Punto 3.** Dopo aver verificato che la grandezza

$$[2] \tau = \frac{mR}{B^2 L^2} \text{ ha la dimensione di un tempo, si giustifichi la seguente affermazione:}$$

la velocità  $v$ , partendo dal valore  $v_0=0$ , va crescendo verso il valore limite  $v^*=g\tau$ .

Se la velocità iniziale  $v_0$ , invece che zero, fosse maggiore di  $v^*$ , la velocità limite sarebbe ancora  $v^*$ ? Fa differenza il verso di  $v_0$  (verso l'alto o verso il basso)? Illustrare con un diagramma qualitativo nel piano  $(t,v)$  la velocità in funzione del tempo per diverse scelte della velocità iniziale.

**Punto 4.** Si utilizzi la [1] per calcolare la velocità  $v(t)$  della barretta in funzione del tempo  $t$  e dire dopo quanto tempo dall'istante iniziale la velocità raggiunge il valore limite  $v^*$ . In base al risultato, è appropriato chiamare  $v^*$  **velocità asintotica**? Fare un grafico di  $v(t)$ .

**Punto 5.** Calcolare anche lo spazio  $x(t)$  percorso dalla barretta, rappresentare graficamente  $x(t)$  nel piano  $(t,x)$  e calcolare il suo asintoto obliquo. Era prevedibile l'esistenza di questo asintoto? Qual è il suo significato fisico?

**Punto 6.** Usando i valori numerici  $g=10 \text{ m/s}^2$ ,  $L=HK=10 \text{ cm}$ ,  $m=1 \text{ g}$ ,  $R=0,1 \ \Omega$ , calcolare il valore del campo magnetico  $B$  in modo che la velocità limite  $v^*$  sia di  $10 \text{ m/s}$ .

Calcolare poi, ammesso che la lunghezza della guida di rame lo consenta, lo spazio percorso dalla barretta quando la velocità ha raggiunto la metà di  $v^*$ .

## QUESITI.

**1.** Per determinare la velocità  $v$  di particelle  $\alpha$  (nuclei di elio) emesse da una sorgente di Polonio, si fanno passare le particelle tra un campo elettrico  $E$  e un campo magnetico  $B$  **incrociati**, in modo che il primo devii le particelle verso destra e il secondo verso sinistra.

a) Il tutto deve essere in un contenitore dove è fatto un alto vuoto: **perché?**

b) Come deve essere diretto **B**?

Le particelle entrano nella regione soggetta ai due campi attraverso uno stretto forellino e possono uscire dal condensatore che genera il campo elettrico attraverso un altro forellino di fronte al primo solo se la forza totale agente su di esse è zero; ciò accade solo se le particelle hanno la giusta velocità.

c) Calcolare questa velocità  $v$  in funzione dei due campi.

Cambiando l'intensità dei campi, si selezionano particelle aventi un'altra velocità. Il dispositivo, detto **selettore di velocità**, consente di determinare lo spettro di velocità delle particelle cariche.

d) **Va cambiato** il verso di  $B$ , fermo restando quello di  $E$ , se le particelle in studio hanno carica negativa? Motivare la risposta.

**2.**

a) Una particella carica in un campo elettrico uniforme descrive un arco di **parabola**: **spiegare o calcolare la traiettoria**.

b) La stessa in un campo magnetico (uniforme) descrive un arco di **cerchio**. Calcolarne il raggio.

c) La velocità di una particella carica che si muove in un campo magnetico **qualunque** ha modulo **costante** e il campo magnetico **non compie lavoro** sulla carica: giustificare queste affermazioni.

**3.** Un corpo viene lanciato lungo un piano inclinato verso la sommità con velocità iniziale  $v_0$ .

a) Se il piano è liscio, il corpo ridiscende e arriva al punto di partenza con la stessa velocità  $v_0$ , ovviamente con verso opposto. **Giustificare** questa affermazione senza calcoli, utilizzando solo considerazioni energetiche.

b) Se il piano è ruvido, la velocità di ritorno, **ammesso che ci sia ritorno**, è **minore**. Giustificare queste due affermazioni.

c) Introdurre un'opportuna notazione e calcolare la velocità finale del punto b), nonché i tempi di salita e di discesa, che sono **diversi**, a differenza di quanto succede nel punto a).

**4.** Quanta **energia** occorre fornire a un **elettrone** per portarlo al 99 % della velocità della luce? E a un **protone**? (Massa dell'elettrone  $0,91 \cdot 10^{-30} \text{ Kg}$ , massa del protone  $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$ ).

Sapreste esprimere tutti i risultati in MeV (milioni di elettron- Volt) anziché in Kg e in Joule?

**5.** I muoni che arrivano a terra sono prodotti dal decadimento di pioni negli alti strati dell'atmosfera, tipicamente a 15 - 20 Km di quota. Essi hanno una vita media (**a riposo**) di 2 micro secondi, perciò, anche se sfiorassero la velocità della luce, i muoni di un fascio potrebbero percorrere al più 600 metri prima di ridursi al **37 %** del numero iniziale. Siccome in un percorso di 15 – 20 Km il tratto di 600 metri è contenuto **almeno 25** volte, l'intensità del fascio nei rivelatori a terra si dovrebbe ridurre a  $0,37^{25} = 1,6 \cdot 10^{-11}$  del valore iniziale, cioè ai rivelatori terrestri dovrebbero arrivare uno o due muoni ogni 100 miliardi prodotti nella stratosfera, mentre ne arriva circa il **5 %**, come si ricava dal confronto di quelli misurati a terra e di quelli misurati a varie altitudini. Si chiede:

a) da dove spunta fuori quella percentuale del **37 %**? (**perché non il 25 % o il 41 %?**).

b) come si spiega che a terra arrivino **così tanti muoni**?

**6.** Nel questionario del tema di matematica del 2005 (corso di ordinamento) il 10° quesito recita:

“Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione

$$f(x) = \text{Arc Tan } g(x) - \text{Arc Tan } g\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.”

**Risolvere** il quesito e scrivere un breve **commento critico** al test ministeriale.

**7.**

a) Si definisca il concetto di integrale improprio nel caso di

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

b) Calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

e sfruttare il risultato per dimostrare che  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

è convergente (è finito).

c) Il primo che trovò il risultato *esatto*  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

fu il grande matematico svizzero Leonardo Eulero (Basilea 1707, San Pietroburgo 1783).

Utilizzare (al bisogno) il risultato di Eulero per calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

**8.** Si lanciano due dadi; siccome i dadi sono oggetti macroscopici, si possono distinguere, almeno in linea di principio (per esempio, seguendoli con gli occhi o, se non ci si riesce, colorandone uno rosso e l'altro verde). Perciò la somma 3, poniamo, si può ottenere in due modi diversi, come  $1_{\text{rosso}} + 2_{\text{verde}}$  oppure come  $2_{\text{rosso}} + 1_{\text{verde}}$ .

a) Qual è la probabilità di ottenere somma 8? C'è qualche altra somma che ha la stessa probabilità?

b) Qual è la somma più probabile?

c) Si calcolino le probabilità che, lanciando la coppia di dadi sei volte, la somma 7 esca: **esattamente** due volte, **almeno** due volte.

**9.** Se i due dadi del quesito **8** fossero indistinguibili in linea di principio, fossero per esempio due particelle  $\alpha$  (due bosoni) con livelli energetici numerati da 1 a 6, come cambierebbero le probabilità richieste nel quesito **8**?

**10.** La funzione di ripartizione di Gauss

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

rappresenta la probabilità P che una variabile aleatoria X abbia valore minore di x:

$P(X < x) = G(x)$ . La costante che moltiplica l'integrale (detta costante di normalizzazione) è scelta in modo che  $P(X < +\infty) = 1$ . (E' certo che una X abbia valore compreso tra  $-\infty$  e  $+\infty$ ).

Siccome la funzione densità  $e^{-t^2/2}$  (il cui grafico è la famosa curva a campana) non ammette primitiva elementare, la funzione G(x) è stata tabulata da 0 a 4 (o 5) con passo 0,01. Di solito si chiede però la probabilità  $P(|X| < a)$ , con  $a > 0$ . Si dovrebbe fare  $P(|X| < a) = P(-a < X < a) = G(a) - G(-a)$ , ma G(x) è tabulata solo per argomenti positivi.

**Come** si può calcolare la suddetta probabilità? (Suggerimento: si guardi il grafico sottostante).

