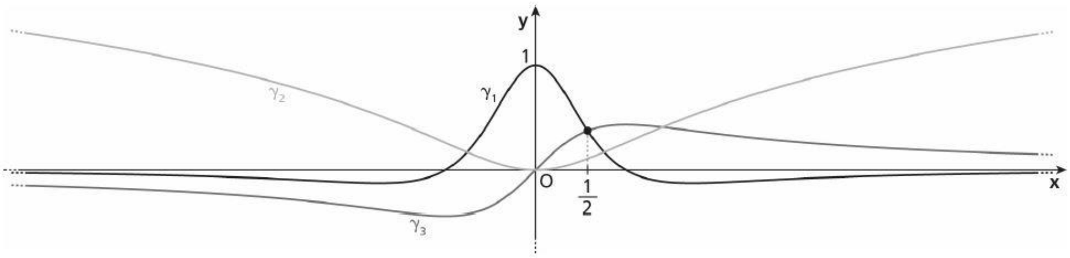
Ottavio Serra

Simulazione prova di Matematica 2023 per il Liceo scientifico
Casa Ed. Zanichelli, Bologna.

Problema 1

Sia data la funzione $f(x)=\dfrac{ax}{4x^2+b}$, con $\boldsymbol{a}$ e **b** parametri reali. Siano inoltre **g(xx)=f ' (x)** (g(x) funzione derivata di f(x)) e $h(x)=\int_0^x f(t)dt$ (h(x) funzione integrale di f(x)). (Vedi fig. 1):



fi. 1

1. Associa ciascuna funzione al rispettivo grafico esplicitando dettagliatamente le motivazioni. Usa i dati in figura per determinare i valori delle costanti $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
2. Nel punto **1** hai verificato che a = 3 e b = 3. Considera le funzioni f(x), g(x) e h(x) per questi valori dei parametri a e b. Ricava esplicitamente le espressioni delle funzioni f(x), g(x) e h(x). Determina i punti di massimo e minimo relativi delle tre funzioni. Inoltre, trova i punti di flesso di f(x) e h(x).
3. Calcola i limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^2},\ \lim_{x\to +\infty}\frac{h(x)}{\ln x}.$$

4. Detti A e C i punti di intersezione della curva γ_1 con l'asse y e con l'asse x, rispettivamente, e B il punto di intersezione delle curve γ_1 e γ_3, siano S_1 la regione piana limitata da OAB, S_2 quella limitata da OBC (vedi fig. 2).
Calcola il rapporto fra l'area di S_1 e quella di S_2.
Esplicita le eventuali considerazioni teoriche relative alle funzioni coinvolte che permettono di semplificare il calcolo.

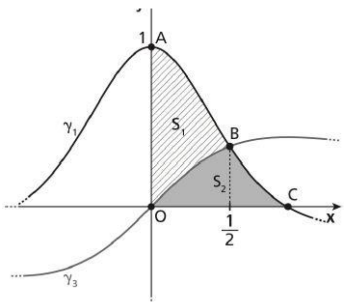


fig. 2

Soluzione del problema 1.

1. La funzione f(x) è dispari, perciò il suo grafico (vedi fig. 1) è γ_3. Siccome non ha asintoti verticali, si capisce che b è positivo. Anche a è positivo, perché il grafico ha ordinate positive per valori di x positivi. Possiamo già notare che f(x) ha punti di massimo e di minimo (assoluti) simmetrici rispetto a O(0,0) e tre flessi, di cui **uno** in O (e gli altri due simmetrici rispetto a O). Inoltre f(x) tende a 0^+ per x $\rightarrow +\infty$ (eccetera, nota che f(x) è una **cubica)**.

La curva γ_1 è il grafico di g(x), derivata di f(x) e siccome g(0)=1, la tangente di flesso a f(x) nell'origine O è y=x.

Ora Calcolo g(x).

$$g(x) = f'(x) = \frac{-4ax^2+ab}{\left(4x^2+b\right)^2}\ .$$

Siccome g(0)=1 (vedi fig. 1), segue a/b =1, pòerciò b=a.

Sfrutto ora l'altra informazione contenuta nella fig. 1:

f(1/2)=g(1/2):

$$\frac{a/2}{1+a} = \frac{-a+a^2}{(1+a)^2} \Leftarrow a(1+a) = -2a+2a^2 \Leftrightarrow a = 3.$$

Dunque, **a=b=3.**

La traccia ci ha voluto dare un **"*aiutino*",** ne caso non fossimo stati capaci di calcolare i parametri a e b, per consentirci di proseguire nello svolgimento.

2. Le tre funzioni sono perciò

$$[1]\, f(x) = \frac{3x}{4x^2+3}$$

$$[2]\, g(x) = \frac{-12x^2+9}{\left(4x^2+3\right)^2}$$

$$[3] h(x)=\int_0^x \frac{3t}{4t^2+3}dt=\frac{3}{8}\int_0^x \frac{d(4t^2+3)}{4t^2+3}=\frac{3}{8}\left(Ln(4x^2+3)-Ln(3)\right)$$

Comincio a studiare la funzione **h(x)**, perché ho già pronte le sue derivate, h' e h''. Dominio tutto ***R,*** è una funzione **pari,** tende a +∞ con andamento logaritmo, cioè lentamente e siccome è convessa nell'intorno del suo punto di **minimo O(0,0)** e poi diventa concava per la crescita logaritmica per x→ +∞ (e per x → −∞), deve avere due flessi nei punti in cui h''(x)= g(x)=0, cioè per $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.$ L'ordinata è $\frac{3}{8}Ln(2)$ (Vedi la [3]]). Non ha massimo, perché il suo **Sup** è +∞.

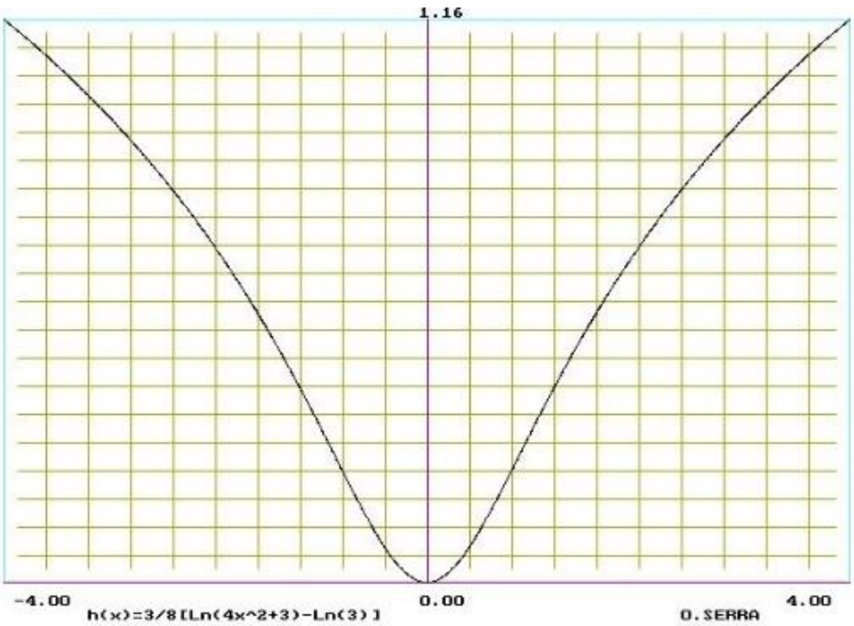


fig. 3

Studio ora la funzione g(x). Domino tutto ***R*** e, ovviamente, è **pari.**

Intersezione con l'asse x in $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Come si vede dalla fig. 1, il suo massimo (assoluto) è in (0, 1). Devo però calcolare g'(x) per determinare i minimi (che sono due, per motivi di simmetria).

$$g'(x)=\frac{-24x\left(4x^2+3\right)^2+\left(12x^2-9\right)16x\left(4x^2+3\right)}{\left(4x^2+3\right)^4}.$$

Semplificando il fattore **4x²+3)**, segue che g'(x)=0 se

$-96x^3-72x+192x^3-144x=0$, da cui $96x^3-3(72x)=0$ e infine $4x^3-9x=0$, che ha le tre soluzioni x=0 (già noto: Massimo) e $x=\pm\frac{3}{2}$ (ascisse dei due punti di minimo di g; $y_{min}=-\frac{1}{8}$.

(I punti stazionari di g(x) sono tre e corrispondono ai tre flessi di f).
N.B. Asintoto orizzontale y=0. Il limite, per $x\rightarrow\pm\infty$ è 0^-
Dall'andamento del grafico si evince che g(x) ha 4 punti di flesso.

Il testo non ne prevede il calcolo, percchè è laborioso.

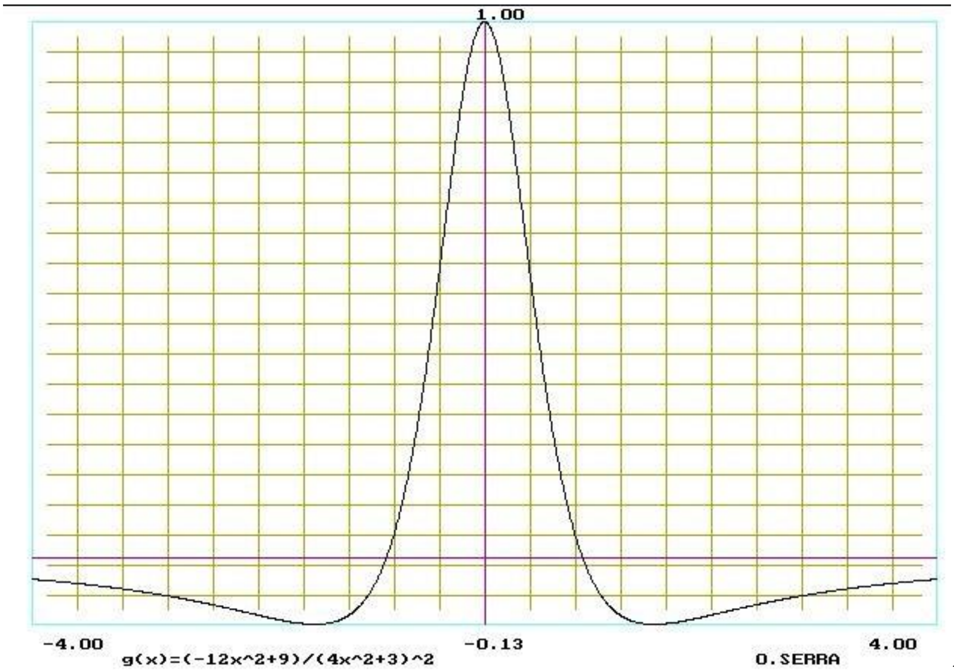


fig. 4

Ora abbiamo tutti gli elementi per lo studio di f(x).
Dominio, tutto ***R***, funzione dispari, asintoto y=0, i suoi due punti stazionari (massimo e minimo relativi e assoluti hanno per ascissa gli zeri di g, $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, le ordinate sono $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$ (circa $\pm 0{,}43$). I tre flessi sono i punti stazionari di g, cioè x=0 e $x=\pm\frac{3}{2}$.
Le ordinate sono, rispettivamente, y=0 (ovvio) e $y=\pm\frac{3}{8}$.
Vedi il **grafico di f(x)** nella prossima **fig. 5.**

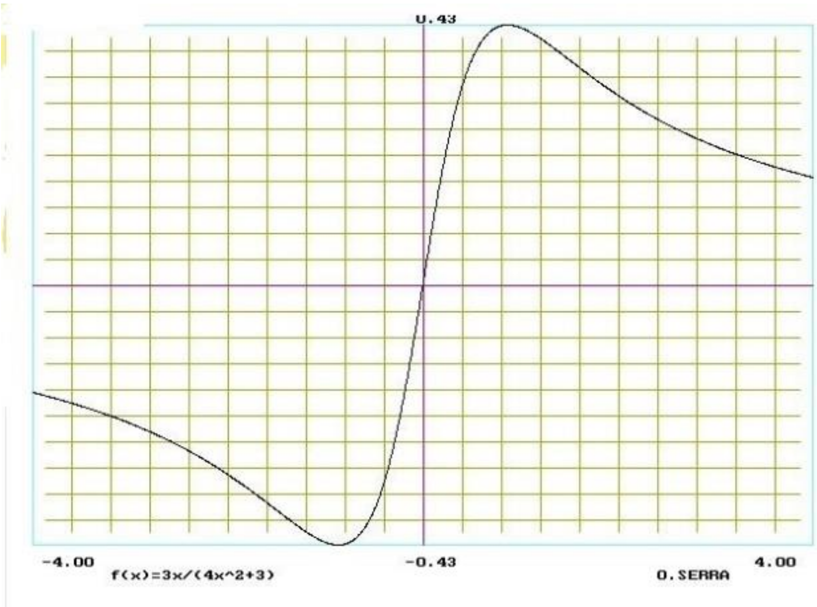


fig. 5

3. La funzione h(x) (vedi [3]) si può scrivere: $h(x)=\frac{3}{8}Ln\left(\frac{4}{3}x^2+1\right)$, perciò il primo limite

dà $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^2}=\frac{3}{8}\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln\left(\frac{4}{3}x^2+1\right)}{x^2}=\frac{3}{8}\frac{4}{3}=\frac{1}{2}\cdot$ (In un intorno di 0 Ln(1+z) =z+o(z)).

Il secondo limite si calcola ricordando il teorema degli infiniti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{Ln(x)}=\frac{3}{8}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{4}{3}x^2+1\right)}{Ln(x)}=\frac{3}{8}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{4}{3}x^2\right)}{Ln(x)}=\frac{3}{8}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{4}{3}\right)+Ln(x^2)}{Ln(x)}=\frac{3}{8}\lim_{x\to+\infty}\frac{2Ln(x)}{Ln(x)}=\frac{3}{4}.$$

4. Dalla **fig. 2** si nota che S_1+S_2 è l'integrale di g(x) tra la x di O e la x di C, quindi

$$S_1+S_2=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}g(x)dx=\Big[f(x)\Big]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot$$ (Risultato prevedibile, perchè…)

$$S_1=\int_0^{\frac{1}{2}}[g(x)-\mathrm{f(x)}]dx=\Big[f(x)-\mathrm{h(x)}\Big]_0^{\frac{1}{2}}=f\left(\frac{1}{2}\right)-h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}-\frac{3}{8}Ln\left(\frac{4}{3}\right)\approx 0,267119.$$

$$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{8}\big(1-Ln(4/3)\big)\approx 0,165894.$$

S_1/S_2 è circa 1,61 (**prossimo al numero aureo**).

Osservazione. Ho calcolato S_2 come **differenza** di due aree; provare a calcolarla come **somma** di due aree (da 0 a ½ e da ½ a $\sqrt{3}$ /2, vedi fig. 2).