Ottavio Serra

Esame di Stato 2023 Seconda prova Liceo Scientifico Matematica

Soluzione del problema 1.

a) Dalla figura e dai dati riportati al punto a) si ricava subito che f(x) sarà continua anche in x=0 e in x=1 se **a=1/4, b=-1, c=-1.** Le tre funzioni che si raccordano per dare la funzione continua in [-2; 2] sono pertanto

$f_1\ (x) = \frac{1}{4}(x+2)^2\ f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f_3(x) = \sqrt{x^2-1}$. (rispettivamente in [-2;0[, [0;1[, [1;2[).

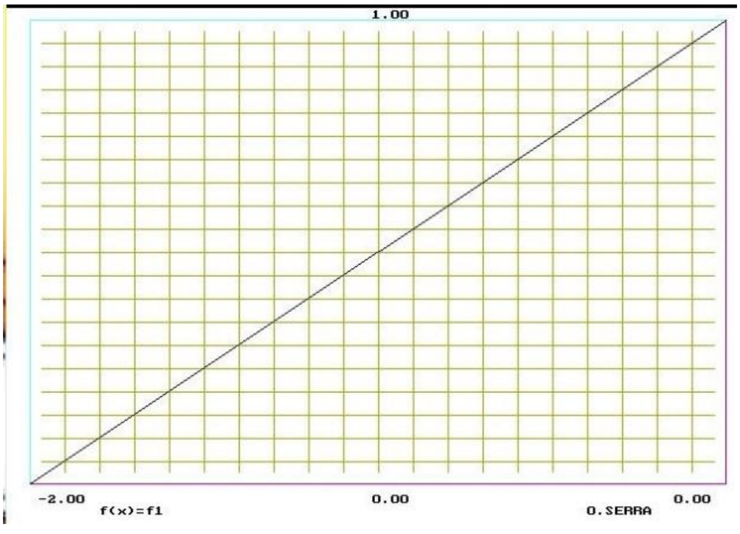
Prima di calcolare la derivata, osserviamo che dal grafico riportato nella traccia si nota quanto segue:

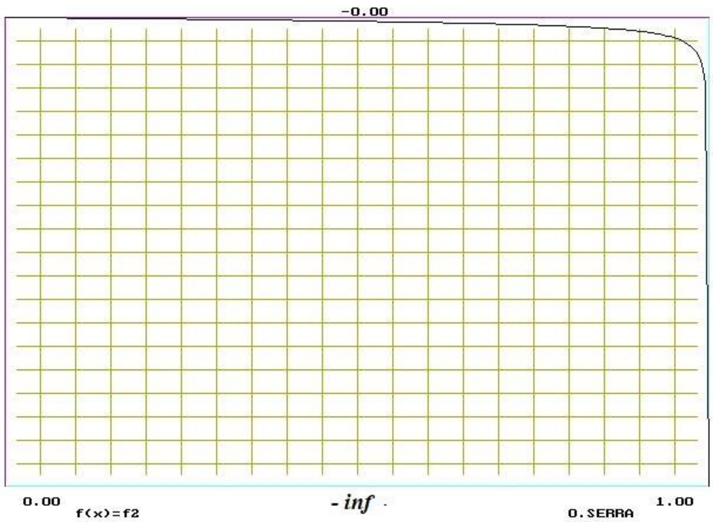
per x== -2 la derivata è zero (perché…); in x= 0 la f(x) non è derivabile, perché la derivata sinistra è positiva mentre la derivata destra è zero; in x=1 la f(x) non è derivabile, perché la derivata sinistra tende a-∞ e la destra tende a +∞ (cerchio, iperbole …); per x= 2 f(x) ha derivata positiva.

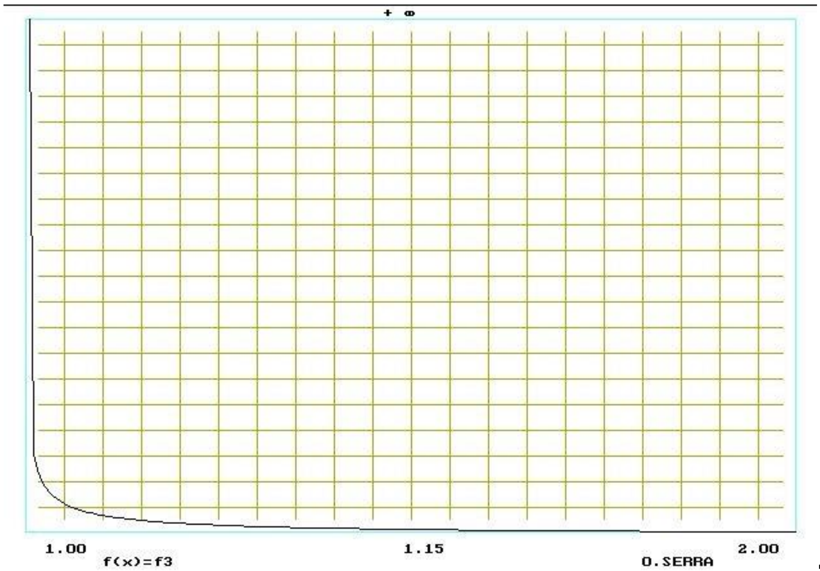
La derivata di f(x), nei tre intervalli, è: $\frac{1}{2}$(x+2), $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Tali formule confermano le previsioni ricavate per via grafica. In particolare, in x=0 la derivata sinistra è 1, la destra è 0: in x=1 si presenta una cuspide, come prevista; in x=2 la derivata è $2/\sqrt{3}$.

b) Il grafico di f'(x), rappresentata da f'_1, f'_2, f'_3 è riportato nelle figure seguenti:







$2/\sqrt{3} \cong 1{,}15$

Da questi grafici si capisce che la funzione integrale F(x) nel primo tratto è convessa, nel secondo è concava e nel terzo è convessa. (la F''(x)=f'(x) è positiva, negativa, positiva. Inoltre la F(x) è monotòna crescente in tutto l'intervallo [-2;2], perché la sua derivata, f(x), è ivi non negativa.

Si ricava, inoltre, che laF(x) nel punto di ascissa x=0 ha un flesso discendente con tangente di flesso y=x+1 e nel punto di ascissa x=1 ha un flesso ascendente con tangente di flesso ***orizzontale.*** **(Di più**

Anche se non richiesta dalla traccia, calcolo ora la funzione integrale per x in [-2;2].

x<0. $F(x) = \int_{-2}^{x} \frac{1}{4}(t+2)^2\,dx = \frac{1}{12}(x+2)^3$. F(0)=2/3, perciò, per

x<1, $F(x) = \frac{2}{3} + \int_{0}^{x} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left[arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2}\right]$. **Usare la sostituzione t=sen(z) eccetera.**

$F(1) = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}$. **Perciò nel terzo intervallo, per**

1<x≤ 2, $F(x)=\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}+\int_1^x\sqrt{t^2-1}dt=\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}-Ln(x+\sqrt{x^2-1}\right]$. **Usa la sostituzione t=cosh(z).**

c) Si tratta della funzione $f_1(x)$, che è monotona crescente nel suo dominio, perciò applica biunivocamente [-2;0] su [0;1]. La sua inversa è, perciò, $y=h(x)=-2+2\sqrt{x}$ (dopo aver scambiato dominio e codominio). $h'(x)=1/\sqrt{x}$. Il grafico è banale.

d) All'inizio del punto c) ho calcolato l'integrale tra -2 e 0 di $f_1(x)$ e ho trovato **2/3.**

Si trova k imponendo che l'integrale da -2 a k sia 1/**3.**

$\int_{-2}^{k}\frac{1}{4}(t+2)^2 d\ x=\frac{1}{12}\left[(t+2)^3\right]_{-2}^{k}==\frac{1}{12}(k+2)^3$. Uguagliato a 1/3, fornisce $k=\sqrt[3]{4}-2\approx$-0,4125989.

Soluzione del problema 2.

La funzione proposta è una funzione razionale del 3° ordine, salvo i casi di a=0 **(funzione $y=x^2$)** e di a=1 **(funzione iperbolica y=x/(x+1)).**

a) Se a<0, il dominio è tutto ***R*** e l'unico asintoto è y=1, che interseca il grafico di f_a in (1;1).

Se a>0, oltre all'asintoto precedente, cii sono i due asintoti verticali $x=-\sqrt{a}$ e $x=\sqrt{a}$. L'intersezione con l'asintoto orizzontale è sempre (1;).

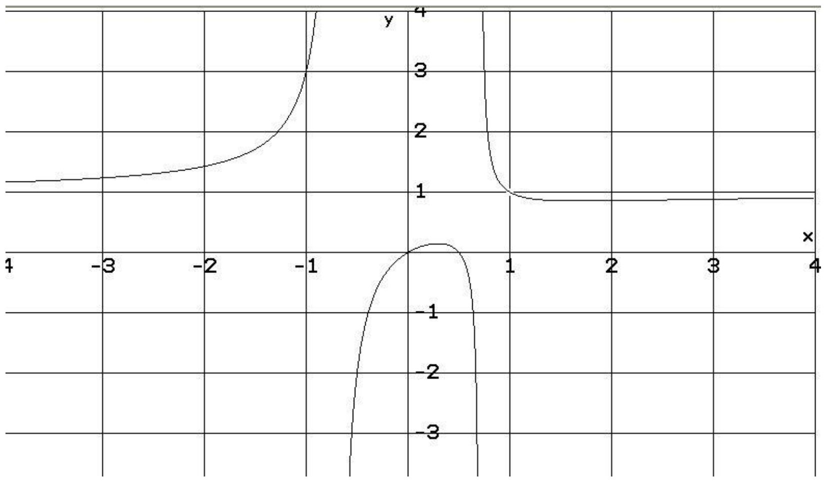
b) Si noti che il passaggio per (1;1) vale banalmente anche nel caso di a=0, mentre nel caso di a=1 l'iperbole ha ancora y=1 come asintoto orizzontale (l'altro asintoto è x=-1: iperbole equilatera), ma il suo grafico **non passa** per (1;1).

c) La derivata di f è $f'(x)=\frac{(2x-a)(x^2-a)-2x(x^2-ax)}{(x^2-a)^2}=\frac{2x^3-2ax-ax^2+a^2-2x^3+2ax^2}{(x^2-a)^2}$. Semplificando

$$f'(x)=\frac{2x^3-2ax-ax^2+a^2-2x^3+2ax^2}{(x^2-a)^2}=a\frac{x^2-2x+a}{(x^2-a)^2}$$

Gli zeri di f' sono $x=1\pm\sqrt{1-a}$. Per a>>1 la f(x) è crescente nel suo dominio (la derivata non ha zeri reali). Se 0<a<1, la derivata è >0 all'esterno dei due zeri, <0 all'interno, perciò la funzione cresce fino a $x=1-\sqrt{1-a}$, dove ha un massimo relativo, decresce fino a $x=1+\sqrt{1-a}$, dove ha un minimo relativo e pi cresce (asintoticamente) fino a 1. Siccome il grafico di f(x) interseca l'asse x in x=0 e in x=a, il massimo relativo ha ordinata positiva (ma <1) e ascissa positiva $<a<\sqrt{a}$.

Il minimo relativo ha ascissa >1 e ordinata compresa tra 0 e 1. Si noti infine che l'ordinata di questo minimo relativo è **maggiore** dell'ordinata del massimo relativo, perché altrimenti un'opportuna retta (orizzontale) intersecherebbe il grafico in 4 punti, **impossibile**, perché si tratta di una curva del 3° ordine. Riporto il grafico per a=1/2.

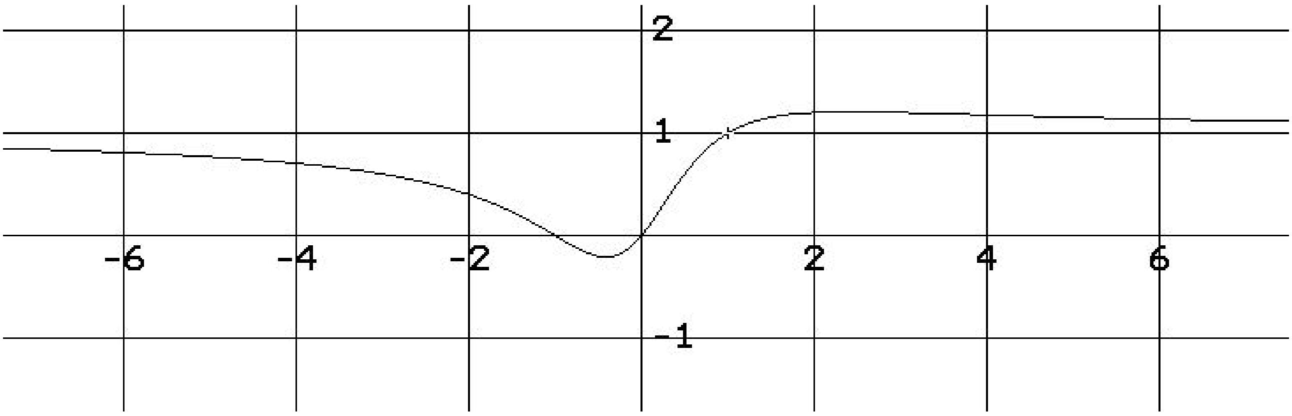


Nota. Una funzione razionale è continua con tutte le derivate nel suo dominio, perciò la derivata seconda, essendo >0 nell'intorno del minimo relativo e <0 da un certo punto in poi per avvicinarsi all'asintoto y=1, deve annullarsi e ivi il grafico ha un flesso.

Resta da esaminare il caso d a<0.

In questo caso non ci sono asintoti verticali e la derivata f' è>0 all'interno degli zeri trovati, <0 all'esterno. La funzione decresce fino al primo zero, dove ha un minimo relativo (e assoluto), cresce fino al secondo zero, dove ha un massimo relativo (e assoluto)) e poi decresce verso y=1.

Nel caso di a= -1, la funzione è $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+1}$, interseca l'asse x in (-1;0) e (0;0). Il minimo ha ascissa x=1-$\sqrt{2}$ e ordinata <0, il massimo ha ascissa x=1+$\sqrt{2}$ e ordinata >1. La continuità della derivata seconda e il fatto geometricamente evidente che il grafico passa da concavo a convesso a concavo, fanno prevedere l'esistenza di tre flessi. Riporto il grafico di f_{-1}



Derivata prima $f'(x)=-\dfrac{x^2-2x-1}{\left(x^2+1\right)^2}$. Uguaglia a zero tale **derivata seconda** e ottieni l'equazione

x^3-3x^2-3x+1=0. Siamo fortunati: è un'equazione reciproca. Si trova facilmente che i tre flessi hanno ascisse **x= -1, x=2-$\sqrt{3}$ e x=2+$\sqrt{3}$.**

d) La tangente nell'0rigine è y=x, perciò

$$S == \int_0^{\sqrt{3}} (x - \tfrac{x^2+x}{x^2+1)})dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x - \tfrac{x^2+1-1+x}{x^2+1)})dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + + \arctan(x) - \tfrac{1}{2} Ln(x^2+1) \right]_0^{3/} = \frac{3}{2} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - Ln(2).$$

Circa **0,122.01-**

Quesiti.

1. Assunto A come origine di un riferimento cartesiano ortogonale, AB come semiasse positivo delle x, AC come semiasse positivo delle y, le coordinate di B siano (b;0) e di C (0;c). Per la scelta fatta, b e c sono numeri (reali) positivi. Siccome il coefficiente angolare di BC è -c/b, quello di BE è b/c e l'equazione della retta BE è y=(b/c)(x-b). Il punto O lo calcolerò come punto medio della diagonale CE del quadrato. Mi mancano le coordinate di E, che calcolerò come intersezione della retta BE e del cerchio di centro B e raggio BC: $(x-b)^2+y^2=b^2+c^2$. Il sistema delle due equazioni fornisce

$(x-b)^2 + \frac{b^2}{c^2}(x-b)^2 = b^2 + c^2$ da cui segue $\left(\frac{x-b}{c}\right)^2 = 1. \Rightarrow x - b = \pm c.$ L'ascissa di E è b+c, perché il punto E cade a destra di B (l'altra ascissa, b-c, individua l'altro estremo del diametro passante per E).

L'ordinata di E è y=(b/c)(b+c-b)=b. Infine, l'ascissa di O è $x_O=(1/2)(x_C+x_E)=\frac{b+c}{2}$ e l'ordinata è $y_O=(1/2)(y_C+y_E)=\frac{c+b}{2}$. Siccome $y_O=x_O$, O sta sulla bisettrice dell'angol (retto) BAC ed equidista dai lati.

2. Immediato. Nota bene: **un numero naturale è primo, se è >1 e non ha divisori propri.**

(Perchè 1 è stato escluso dalla famiglia dei numeri primi?).

3. Un vettore direzionale della retta AB è (l, m, n), dove l, m, n sono le differenze delle coordinate di B e di A: l=1, m=5, n=-. Un punto generico della retta AB è P(x, y, z), con x=1+t, y=-2+5t, z=-t, al variare el parametro t. Il punto H di contatto è quel punto P della retta avente minima distanza dal centro della sfera. Detto q il quadrato della distanza di C da P, calcolo q in funzione di t e impongo che sia minimo, annullandone la derivata rispetto alla variabile t:

$q=(1+t-1)^2+(-2+5t+6)^2+(-t-7)^2$. dq/dt = 2t+10(5t+4)+2(t+7)=0; 54t+54=0; t= -1.

Sostituendo t con -1 nelle coordinate di P, trovo H(0; -7; 1). $CH^2=r^2=1+1+36=38$. L'equazione della sera è $(x-1)^2+(y+6)^2+(z-7)^2=38$, $x^2+y^2+z^2-2x+12y-14z+48=0$.

4. $\mathbf{V=x^2y}$. $S=2x^2+4x.V/x^2 = 2(x^2+2V/x)$. Derivando, $2x-2V/x^2 =0$, S(minima) per $\mathbf{x=\sqrt[3]{V}}$ = y, cioè nel caso del cubo. Detto q il quadrato della diagonale, $q=2x^2+y^2 =2x^2+V^2/x^4$. Derivando ho

$4x-4V^2/x^5 =0$, cioè $x^6=V^2$ e quindi $\mathbf{x=\sqrt[3]{V}}$ **, come prima: la tesi sostenuta è vera.**

5. Si tratta di una semicirconferenza di centro O(0;0) e raggio 5. Se il punto ha ascissa 3, l'ordinata è 4 e il raggio OP ha coefficiente angolare 4/3, perciò la tangente in P ha coefficiente angolare -3/4.

L'equazione della tangente è y-4=(-3/4)(x-3), ovvero 3x+4y-25=0.

6. b=1 ed a= -7(6. (Applicare il T. di de L'Osptal).

7. Per x==0 ,-1+arctan(x)=-1, ax+b=b; la continuità impone **b= -1.**

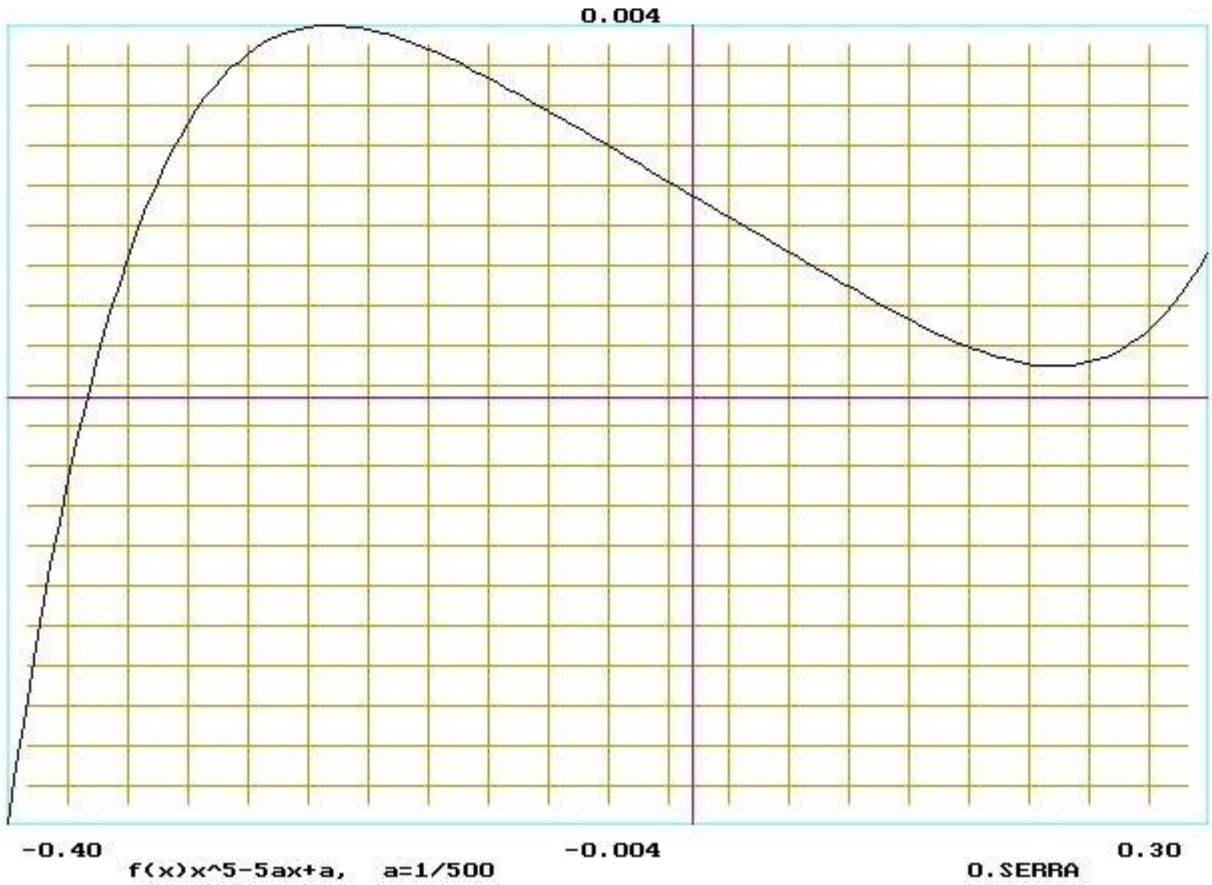
La derivata sinistra è **$1/(1+x^2)$,** la derivata destra è **a.** La derivabilità per x=0 impone **a=1.**

8. La funzione è una polinomiale, continua con derivate continue di ogni ordine su tutto ***R***.

Siccome è di grado dispari (e il primo coefficiente è positivo), il suo grafico si estende da $-\infty$ a $+\infty$ e perciò deve avere ameno uno zero. Per averne tre, il suo massimo deve essere positivo e il minimo negativo. La a sua derivata è $5x^4$-5a. Uguagliando a 0, ho $x=-\sqrt[4]{a}$ e $x=\sqrt[4]{a}$. Alla sinistra di $x=-\sqrt[4]{a}$ (ascissa del massimo) c'è il rimo zero. Per avere altri due zeri, occorre che l'ordinata del minimo, f($\sqrt[4]{a}$) sia negativo. Impongo tale condizione: $a\sqrt[4]{a}-5a\sqrt[4]{a}+a\leq 0$. Dividendo per il numero positivo a, ho $4\sqrt[4]{a}\geq 1$e infine $a\geq \frac{1}{256}$. Se a è maggiore di 1/256, i tre zeri sono distinti (uno negativo e due positivi), se a=1/256, si ha lo zero positivo doppio (l'asse x è tangente al grafico).

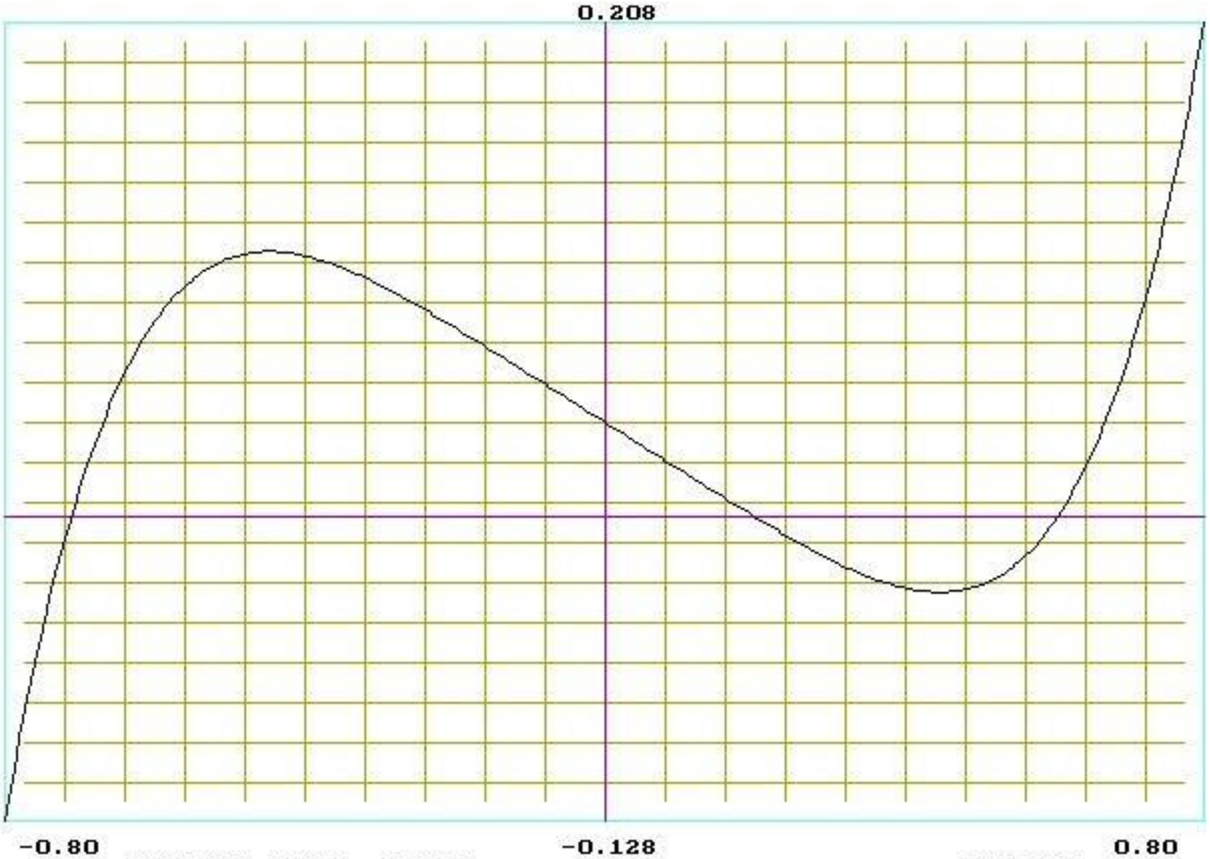
Nota. Perchè un'equazione algebrica a coefficienti reali di grado dispari deve avere un numero dispari di soluzioni reali, **certamente almeno una?**

Riporto qui sotto, a titolo di verifica, dei grafici che confermano i risultati del quesito 8.



Un solo zero, negativo prossimo a -0.35

Uno zero negativo e uno zero positivo doppio (caso limite per avere tre zeri reali)



Parametro **a** maggiore del valore limite 1/**256: Tre zeri reali distinti.**