Ottavio Serra

Bicicletta ministeriale a ruote quadrate e generalizzazione.

1. Il problema 1 del compito di matematica al Liceo scientifico. Esame di stato 2017.

PROBLEMA 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (figura 1). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.
In figura 2 è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy: il quadrato di lato $DE = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.

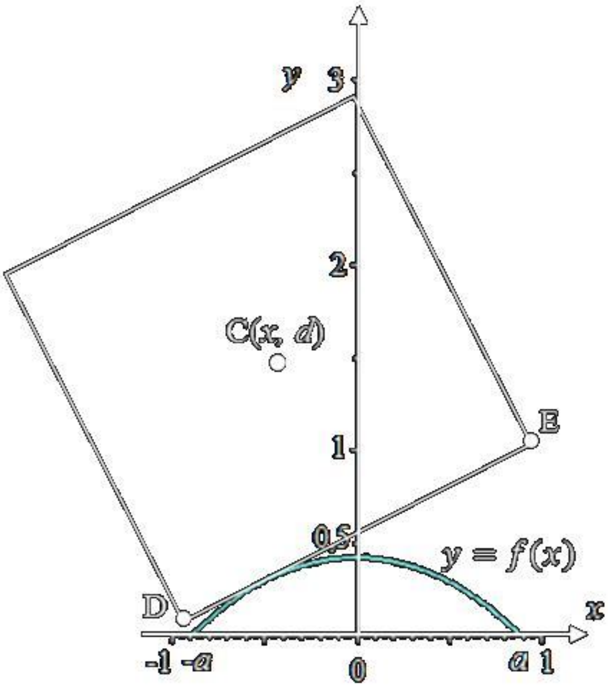

Figura 1 *Figura 2*

1) ***Sulla base delle informazioni*** *ricavabili dal grafico in figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione reale:* $f(x) = \sqrt{2} - \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in [-a; a]$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana; determina inoltre il valore di a e $-a$.
Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico di $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a;\ a]$ (vedi figura 3).

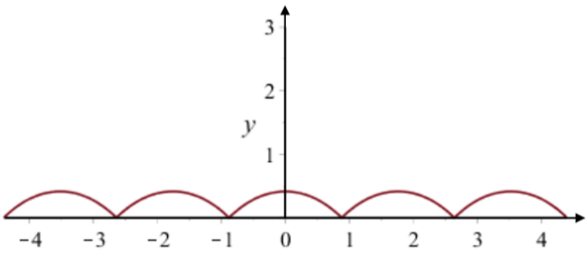

Figura 3 x

*2) **Perché la bicicletta possa procedere agevolmente** sulla pedana è necessario che:*

 a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;

 la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una "gobba", cioè dell'arco di curva di equazione $y = f(x)$ per $x \in [-a; a]$.
Stabilisci se tali condizioni sono verificate[1].
*3) **Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli ACL e ALM in figura 4**, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata d del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.*

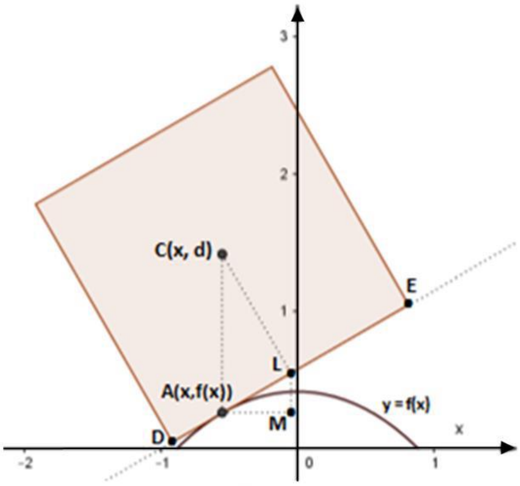

Figura 4

***Anche il grafico della funzione**: $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, per $x \in \left[-\dfrac{ln(3)}{2}; \dfrac{ln(3)}{2}\right]$*

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.
*4) **Individua tale poligono regolare, motivando la risposta**.*
Questo, articolato in quattro punti, è il testo ministeriale.

Siccome il quarto punto fa capire che può andar bene anche un tipo di ruota con sagoma di poligono regolare diversa da quella quadrata, conviene affrontare il problema in generale, considerando una ruota poligonale (regolare) con n lati. Quando un problema si affronta in modo generale, la sua soluzione diventa addirittura più semplice; inoltre una visione dall'alto, da un punto di vista superiore, consente di scorgere connessioni che altrimenti potrebbero sfuggire e di evitare eventuali errori di calcolo; per esempio, si vedrà che sia la costante additiva **b** presente nella funzione f(x) che rappresenta il profilo del dosso, sia la larghezza [-a; a] del dosso diminuiscono al crescere del numero n dei lati della ruota. Si capisce così che la ruota del 4° punto ha più lati del quadrato perché la costante $b = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ è minore della costante $b = \sqrt{2}$ relativa al caso della ruota quadrata. Si vedrà anche che, al crescere di n, l'altezza b-1 dei dossi tende a zero, risultato fortemente intuitivo (se n tende all'infinito, la ruota tende alla forma circolare e la pedana tende a spianarsi. Meno intuitivo è che la larghezza dei dossi tenda a zero, ma, come vedremo, la dimostrazione sarà immediata.

---

[1] 1In generale, la lunghezza dell'arco di curva avente equazione $y = \varphi(x)$ compreso tra le ascisse x_1 e x_2 è data da $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx$. (Grazie, Ministro!).

Un'ultima osservazione. Il grafico della f(x) è una catenaria rovesciata, simmetrica rispetto all'asse y; ciò è molto comodo perché la lunghezza di un arco di catenaria si calcola in modo semplicissimo utilizzando la formula integrale gentilmente riportata in nota[1] del testo ministeriale. Potrebbe andar bene anche qualche altro profilo, di lunghezza agevolmente calcolabile, come per esempio un arco di cicloide? Affronterò questa possibilità in appendice, ma la cicloide non va bene.

2. **La ruota a n lati.**
Una volta risolto il problema per la ruota generica, applicherò i risultati al caso particolare della ruota triangolare, di quella quadrata (del testo ministeriale) e della ruota esagonale, che risulterà essere quella richiesta nel quarto punto del problema.
Sia
[1] $f(x) = b - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in [-a; a]$ il profilo del dosso adeguato alla ruota generica ad n lati.
Siccome f(a)=0 (Vedi Figura 2),
[2] $b = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$. Abbiamo capito che l'altezza b-1 del dosso tende a zero se il numero n dei lati della ruota tende all'infinito, perciò b tende a 1 decrescendo e la semi-larghezza "a" del dosso tende a zero (dalla formula [2]); di conseguenza, anche la lunghezza dell'arco di catenaria, uguale al lato del poligono, tende a zero decrescendo; ciò implica che la ruota del 4° punto deve avere più lati del quadrato (ruota pentagonale? esagonale? Vedremo).
Che la lunghezza del lato del poligono sia uguale alla lunghezza del dosso (dell'arco di catenaria) deriva dal fatto che la ruota *"rotola" senza strisciare* e il lato DE della ruota (vedi Figura 2, e Figura 4, a prescindere dal numero dei lati della ruota), si mantiene tangente al profilo del dosso, partendo con D in posizione (-a; 0) e finendo con E in posizione (a; 0).
Determinerò i parametri a e b imponendo che quando un vertice dell'ennagono si incunea tra due dossi consecutivi i lati comprendenti tale vertice risultino tangenti ai dossi stessi (Vedi Figura 5).

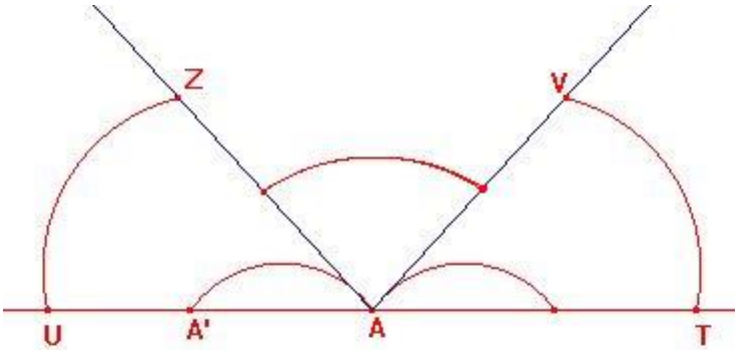

Figura 5

Sia A'A un dosso, A'(-a;0), A(a;0), AZ e AV le tangenti in A al dosso A'A e al dosso successivo.
L'angolo α=ZAV deve essere l'angolo interno dell'ennagono e vale (n-2)π/n; perciò gli angoli adiacenti β=TAV e β'=UAZ, uguali per simmeria, valgono **π/n ciascuno.** Il coefficiente angolare m della tangente AZ è uguale alla derivata di f(x) in a, dunque
$m = -\frac{e^a - e^{-a}}{2}$ e il coefficiente angolare di AV è l'opposto; perciò
[3] $\frac{e^a - e^{-a}}{2} = Tang\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
Siccome i coefficienti angolari a sinistra e a destra di un punto di non derivabilità, come per esempio A(a; 0) sono opposti, ***nel caso del quadrato*** valgono -1 e 1; ma il loro prodotto è, altresì, -1, perciò ***i due archi sono ortogonali*** (prima domanda del 2° punto).

Dalla [3] poi segue

[4] $e^a = Tang\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sqrt{Tang^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+1}$. Si ricava perciò dalla [2]:

[5] $b = \sqrt{Tang^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+1}$.

Caso della ruota triangolare: b=2.
Caso della ruota quadrata: $b = \sqrt{2}$ =1,414 … (**è il caso del testo ministeriale**).
Caso della ruota pentagonale: b=1,236…
Caso della ruota esagonale: $b = \sqrt{\frac{1}{3}+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ =1,1547… (**è il caso del 4° quesito**).

$\lim_{n\to\infty} b = 1$, come previsto: il poligono tende al cerchio.

La seconda domanda del 2° punto chiede di verificare che il lato del quadrato vale 2. Io calcolerò il lato dell'ennagono regolare, così potrò determinare il lato della generica ruota. Prescindendo dalla forma quadrata riportata in Figura 2, considero DE come lato di un poligono regolare di n lati.
Dalla formula riportata nella nota del testo ministeriale segue:

[6] $l = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+f'^2(x)}dx = 2\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx = \int_0^a (e^x + e^{-x})dx = e^a - e^{-a} = 2Tang\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Caso della ruota triangolare: $l = 2\sqrt{3}$.
Caso della ruota quadrata: l=2 (**come richiesto dalla traccia ministeriale**).
Caso della ruota esagonale: $l = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (è il caso della ruota ***esagonale*** del 4° quesito).
Si noti che l va decrescendo al crescere di n.

Per rispondere al 3° quesito utilizzerò la Figura 4 come se DE fosse il lato di un poligono (regolare) di n lati.
Dalla similitudine dei ***triangoli rettangoli ACL e ALM*** segue:
$\frac{AC}{CL} = \frac{AM}{AL}$, essendo AC=d-f(x), CL apotema della ruota, $\frac{AM}{CL} = \frac{1}{Cos(\varphi)}$. Siccome $\frac{1}{Cos(\varphi)} = \sqrt{1+Tang^2(\varphi)} = \sqrt{1+f'^2(x)} = \sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, e l'apotema della ruota è metà del lato diviso per la tangente di π/n, alla fine ottengo:

$$\frac{d-f(x)}{\left(\frac{l}{2Tang\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \Rightarrow d = f(x) + \frac{l}{2Tang\left(\frac{\pi}{n}\right)}\frac{e^x+e^{-x}}{2} = f(x) + \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

(Ho utilizzato la [6]). In definitiva trovo:

[7] $d = b - \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x+e^{-x}}{2} = b = \sqrt{Tang^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+1}$, costante per ogni dato tipo di ruota, non solo per la ruota quadrata. (vedi la formula [5]).

APPENDICE 1.

Lunghezza di un arco di curva regolare.

Dimostrerò ora la formula riportata nella nota del testo ministeriale, riferendomi in generale a un arco di curva regolare γ dello spazio, di estremi A e B, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), a \le t \le b; x, y, z \text{ continue in [a: b] e derivabili in]a; b[.} \\ z = z(t) \end{cases}$$

Considero un poligonale di n lati inscritta in γ: $A=P_0$, P_1, … P_k … $P_n=B$. (Vedi Figura 6).

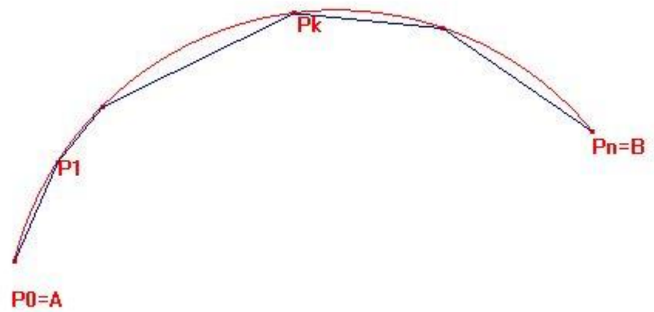

Figura 6

La lunghezza della poligonale è

$L_n = \sum_{k1}^{n} P_{k-1}P_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2 + [z(t_k) - z(t_{k-1})]^2}$. Applico ora il teorema di Lagrange alle differenze in parentesi quadre:

$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x'(\tau_x]^2 + [y'(\tau_y]^2 + [z'(\tau_z]^2}\Delta t_k$, essendo $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ e τ_x, τ_y, τ_z opportuni valori interni all'intervallo $[t_{k-1}; t_k]$. Detto δ il massimo degli intervalli Δt_k e passando al limite per δ→0, si ha

[8] $L(\gamma) = \lim_{\delta \to 0} L_n = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt.$

Prima osservazione. La [8] si estende facilmente a un arco di curva regolare di uno spazio euclideo con un numero arbitrario di dimensioni.

Seconda osservazione. Se γ è una curva piana di equazione y=f(x), basta parametrizzarla ponendo x=t, y=f(t)=f(x) (e, ovviamente, z=0) per ottenere la formula riportata in nota nel testo ministeriale (con $a=x_1$, $b=x_2$).

APPENDICE 2.

Non è possibile utilizzare una pedana con dossi rappresentati da archi di cicloide, perché nei punti di non derivabilità le tangenti a due archi consecutivi sono coincidenti (coefficienti angolari, cioè le **derivate**, tendenti rispettivamente a $-\infty$ e $+\infty$) e perciò non è possibile inserire tra di essi la ruota.

Riporto le equazioni parametriche della cicloide normale (cicloide *retta*):

{x=r(t-sent), y=r(1-cost)}, t in [0; 2π]. (Figura 7).

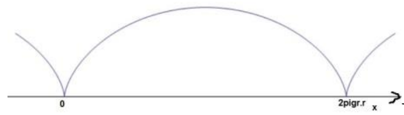

Figura 7

(Sapreste calcolare la derivata di y rispetto a x?).

Proverò con archi di parabola $y=f(x)=b-x^2$, con x in [-a; a] e y(-a) = y(a)=0. (Vedi Figura 8).

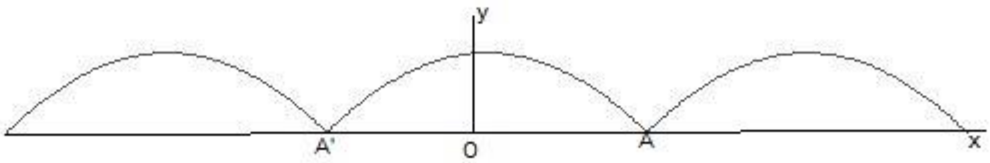

Figura 8

La condizione y(-a) = y(a)=0 implica $b=a^2$. Le derivate in A(a; 0) ai due archi parabolici consecutivi danno -2a e 2a, perciò, se in A o in A' si deve incuneare il vertice di una ruota poligonale regolare di n lati, l'angolo tra la tangente in A e l'asse x sarà π/n, quindi

[9] $2a = Tanga\left(\frac{\pi}{n}\right), a = \frac{1}{2}Tang\left(\frac{\pi}{n}\right);\ b = a^2 = \frac{1}{4}Tang^2\left(\frac{\pi}{n}\right).$

Ruota triangolare: n=3, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, b=3/4;

ruota quadrata: n=4, a=1/2, b=1/4;

ruota esagonale: n=6, $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, b=1/12. Eccetera.

Lunghezza di un dosso.

$l = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+4x^2}dx = 2\int_0^a \sqrt{1+4x^2}dx = \int_0^{2a}\sqrt{1+z^2}dz,$ avendo posto z=2x.

Di solito gli integrali curvilinei sono più laboriosi di quelli normalmente affrontati in un liceo scientifico per la presenza della radice quadrata. Questo si potrebbe calcolare usando le funzioni iperboliche, ma, a beneficio di chi non le conosce, userò un metodo elementare, anche se più lungo.

Pongo $1+z^2=(z+t)^2=z^2+t^2+2zt$, da cui $z = \frac{1-t^2}{2t}$, $dz = \frac{-(1+t)^2}{2t^2}dt$, $\sqrt{1+z^2} = z+t = \frac{1+t^2}{2t}$. Segue

$l = \int_1^{\sqrt{1+4a^2}-2a} \frac{1+t^2}{2t}.\frac{-(1+t^2)}{2t^2}dt = -\int_1^{\sqrt{1+4a^2}-2a}\left[\frac{(1+t^2)^2}{4t3}\right]dt = -\frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2t^2} + 2Ln(t)\right]_1^{\sqrt{1+4a^2}-2a}$ e quindi

[10] $l = \frac{1}{2}\left[2a\sqrt{1+4a^2} + Ln\left(2a+\sqrt{1+4a^2}\right)\right]$, essendo $a = \frac{1}{2}Tang\left(\frac{\pi}{n}\right)$, (Vedi la formula [9].

Casi particolari:

n=3, ruota triangolare: $l = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{3} + Ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right] \approx 2,39;$

n=4, ruota quadrata: $l = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + Ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \approx 1,48;$

n=6, ruota esagonale: $l = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{2}{\sqrt{3}} + Ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} + Ln\left(\sqrt{3}\right)\right] \approx 0,61;$ eccetera.

Resta da esaminare il 3° punto: la bicicletta camminerà senza scosse anche con dossi parabolici? Adattando al nuovo profilo i calcoli svolti per il 3° punto della traccia ministeriale, ottengo

$$\frac{d-f(x)}{\left(\dfrac{l/2}{Tang\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}\right)}=\frac{1}{\cos\varphi}=\sqrt{1+Tang^2(\varphi)}=\sqrt{1+f'^2(x)}=\sqrt{1+4x^2}$$, perciò (Vedi la [9] e la 10])

$$d-f(x)=\frac{l}{4a}\sqrt{1+4x^2}\Rightarrow d=a^2-x^2+\frac{1}{8a}\left[2a\sqrt{1+4a^2}+Ln\left(2a+\sqrt{1+4a^2}\right)\right].\sqrt{1+4x^2}\ .$$

Come si nota, l'ordinata **d** del centro della ruota dipendendo da x, non si mantiene costante rispetto al fondo stradale, pur essendo la parabola molto simile alla catenaria, tanto è vero che la forma quasi uguale aveva indotto Galilei a pensare che la catenaria fosse una parabola. (L'errore di Galilei fu poi corretto dai Bernouilli e da Eulero).

Nota. Si osservi che se il numero dei lati della ruota tende all'infinito, cioè se la ruota tende alla forma circolare, a→ 0 e

$$d\rightarrow -x^2+\frac{1}{8a}\left[2a.1+Ln(2a+\sqrt{1+4a^2})\right].(1+2x^2)=-x^2+\frac{1}{8a}\left[2a+Ln(2a+1+2a^2\right].(1+2x^2)$$

e, trascurando infinitesimi di ordine superiore, si ottiene

$$d\rightarrow -x^2+\frac{1}{8a}\left[2a+2a\right](1+2x^2)=-x^2+\frac{1}{2}(1+2x^2)=\frac{1}{2}$$, costante come deve essere.

(Ho usato queste formule: $\sqrt{1+z}=1+\frac{z}{2}+o(z); Ln(1+z)=z+o(z)$. Per giustificare la prima basta elevare ambo i membri al quadrato senza portarsi appresso o(z), *l'o piccolo*; per la seconda si usi il teorema di de l'Hôpital).

In opportune unità di misura $\frac{1}{2}$ è il raggio della ruota circolare limite delle ruote poligonali ed è, ovviamente, il limite dell'apotema dell'ennagono per $n\rightarrow\infty$ *o, equivalentemente, per* a $\rightarrow 0$.
L'apotema è il semi-lato dell'ennagono diviso per Tang(π/n):

$$Apotema=\frac{l/2}{Tang(\pi/n}=\frac{1}{4}.\frac{2a\sqrt{1+4a^2}+Ln\left(2a+\sqrt{1+4a^2}\right)}{2a}$$. (Tenere presente la [9] e la [10]).

Verificare che $\lim_{a\rightarrow 0}Apotema=\frac{1}{2}$. (Usare le approssimazioni da me usate poco sopra).

Nota. La catenaria dà i risultati attraenti del tema ministeriale perché è definita mediante la funzione esponenziale che gode di una proprietà eccezionale: coincide con la propria derivata (e con la propria primitiva). La parabola, che da un punto di vista grafico le assomiglia tanto, da un punto di vista analitico è molto differente (è una curva algebrica, mentre la catenaria è trascendente). La parabola tiene il passo con la catenaria fino a quando non si pretende di pedalare senza il fastidio del "sali-scendi". Esiste qualche altra curva "buona" come la catenaria? Pare proprio di no, come cercherò di dimostrare nella prossima appendice.

APPENDICE 3 (per i docenti).

Considero dossi aventi il profilo rappresentato dalla seguente funzione:
f(x)=b-g(x), con f(x) funzione pari ≥ 0 nell'intervallo [-a; a] e f(-a) =f(a)=0; perciò b=g(a).
Siccome i dossi devono essere "*rialzati*", f deve essere concava e perciò g convessa.
Con riferimento alla figura 8 si ha: f'(-a) = -g'(-a) =Tang(π/n) e quindi g'(a)=Tang(π/n).
(Si noti che g'(x) è dispari, perché g(x) è pari).
La lunghezza l(γ) del dosso è, come prima, uguale al lato l del poligono regolare (la ruota):

$l(\gamma) = l = 2\int_0^a \sqrt{1+g'^2(x)}dx$ e l'apotema CL del poligono è l/(2Tang(π/n)). Essendo $\frac{AC}{CL} = \frac{AM}{AL}$, (fare rifermento alla figura 4).

Segue $\frac{d - f(x)}{CL} = \frac{1}{\cos(\varphi)} = \sqrt{1+Tang^2(\varphi)} = \sqrt{1+f'^2(x)} = \sqrt{1+g'^2(x)}$. Perciò

$d - b + g(x) = \frac{l}{2Tang\left(\frac{\pi}{n}\right)}\sqrt{1+g'^2(x)}$, da cui segue

[11] $d = b - g(x) + \frac{\int_0^a \sqrt{1+g'^2(x)}dx}{g'(a)}\sqrt{1+g'^2(x)}$.

Si noti che nella [11] i termini a destra di b dipendono da x e la frazione $\frac{\int_0^a \sqrt{1+g'^2(x)}dx}{g'(a)}$ è una funzione della sola a, perciò d è costante (e uguale a b) **<u>solo se</u>** si verificano le due condizioni

12] $\begin{cases} g(x) = \sqrt{1+g'^2(x)} \\ \int_0^a \sqrt{1+g'^2(x)}dx = g'(a) \end{cases}$

La prima delle **[12]** è un'equazione differenziale che si scinde nelle $g'(x) = \pm\sqrt{g^2(x)-1}$.
Separando le variabili, si ottiene:

$\frac{dg}{\sqrt{g^2(x)-1}} = \pm dx$. Posto g=Cosh(z), si ricava z=$\pm x + c$. Siccome Cosh(z)=(e^z+e^{-z})/2, segue

$e^z = g \pm \sqrt{g^2-1} \Rightarrow g \pm \sqrt{g^2-1} = e^{\pm x+c} = Ae^{\pm x}$. Perciò $g^2 - 1 = A^2e^{\pm 2x} + g^2 - 2Ae^{\pm x}g$ e quindi

$g(x) = \frac{A^2e^{\pm 2x}+1}{2Ae^{\pm x}} = \frac{1}{2}\left(Ae^{\pm x} + \frac{1}{A}e^{\mp x}\right)$. **Si badi che A>0, perché A=e^c.**

I segni inferiori danno luogo alla stessa soluzione, stante l'arbitrarietà della costante A (basta scambiare A con 1/A), perciò la soluzione è

$g(x) = \frac{1}{2}\left(Ae^x + \frac{1}{A}e^{-x}\right)$.

Con questa espressione di g(x) dimostro che la seconda delle **[12]** è soddisfatta se si pone A=1.

$$\int_0^a \sqrt{1+g'^2(x)}\ dx = \int_0^a \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\mathrm{A}e^x - \frac{e^{-x}}{A}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^a \left(Ae^x + \frac{e^{-x}}{A}\right)dx = \frac{1}{2}\left[Ae^x - \frac{e^{-x}}{A}\right]_0^a = \frac{1}{2}\left(Ae^a - \frac{e^{-a}}{A} - A + \frac{1}{A}\right).$$

La derivata $g'(a) = \frac{1}{2}\left(Ae^a - \frac{e^{-a}}{A}\right)$, perciò la seconda delle [12] è soddisfatta solo se A=1/A e dunque se A=1 oppure se A=-1. Ma A deve essere positiva; perciò l'unica soluzione è A=1 e la funzione f(x) è necessariamente coincidente con quella proposta dal Ministero, **<u>l'unica</u>** che consente al mozzo della ruota di mantenere **quota costante rispetto al fondo stradale**.