**Ottavio Serra**

# L'esame di stato 2021 al Liceo Scientifico

***(al tempo del corona virus)***

**Presenterò** alcuni esempi di studio di funzioni estrapolati da tracce di elaborati di matematica e fisica assegnati per l'esame di stato 2020/2021.

In questa sede prescinderò da giudizi e commenti sulla parte fisica e mi concentrò sulla parte matematica, per mostrare come, a mio parere, andrebbe condotto lo studio di una funzione, come già dalle prime proprietà si abbiano indizi sull'andamento del grafico, come un primo abbozzo del grafico ci possa far prevedere l'esistenza o meno di punti stazionari e di flessi, prima di calcolare derivate prime e seconde, a volte laboriose e che conducono ad equazioni non sempre semplici da risolvere. Il vantaggio di un grafico qualitativo ***preliminare*** ci guida nel trovare eventuali errori di calcolo, nel caso di conflitto con l'evidenza geometrica e corrobora (***non garantisce***) l'esattezza dei risultati nel caso che la previsione sia soddisfatta (***II falsificazionismo di Popper vale anche in matematica!***).
**La cosa più importante** è di non imporre schemi rigidi, precostituiti, per lo studio di una funzione, ma lasciare spazio alla libera inventiva degli studenti nel trovare vie risolutive a volte inaspettate e intelligenti.
**Vorrei ricordare** che la matematica è *l'arte dii non fare calcoli* (**almeno**, **di ridurli al minimo**) e di prevedere, magari solo qualitativamente, i risultati.
**Passo subito agli esempi**.

**Primo esempio: studio delle funzioni y=g(t) e di f(t) = -g'(t).** La funzione g(t) è la seguente:

[1]$g(t)=\frac{t}{t^2+1}$.

Indipendentemente dal problema fisico studierò la funzione nel suo dominio D (C.E.) più ampio.
Il denominatore è $\neq 0 \forall t$, perciò D è tutto l'asse reale:

[2] D= ***R***.

**Siccome** g(t) è una funzione razionale fratta definita in tutto ***R***, essa è continua e derivabile su tutto D e lo stesso dicasi per le sue derivate, di qualunque ordine.
[3] Si nota che la funzione y=g(t= è **dispari,** perciò il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani

[4] Asintoti. C'è solo l'asintoto "*orizzontale*" y=0 (l'asse t), perché $\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t^2+1}=0^+$. (Immediato).

Dato che g(t) è dispari, il limite per t → -∞ è $0^-$.
[5] Intersezione con gli assi. Per t=0 y=0 e y=0 solo se t=0. Il grafico interseca gli assi solo nell'origine: g(0)=0. La funzione g(t) è negativa per t<0 e per t→ -∞ tende a $0^-$, è positivo per t>0 e tende a $0^+$; perciò si prevede l'esistenza di un minimo negativo per un certo t negativo da **determinare**, e simmetricamente un massimo positivo per un t opposto al precedente. Si è, perciò, già in grado di disegnare **qualitativamente** il grafico e di vedere le sue caratteristiche (fig.1):

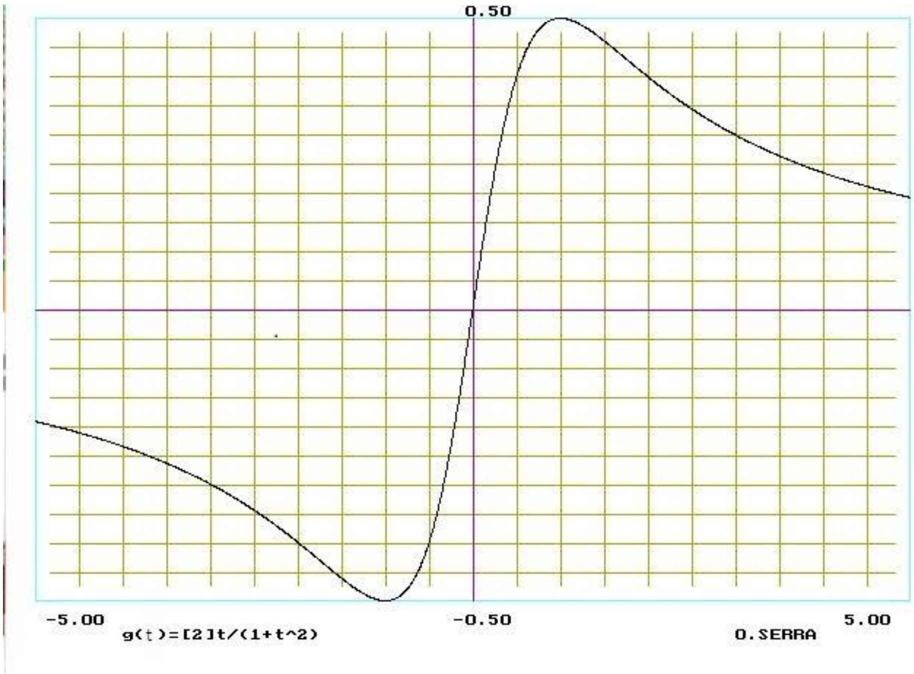


fig.1

Il grafico mostra che la funzione y=g(t) è conca da - ∞ $all'ascissa$ -a (**da determinare** con la **derivata seconda**) del flesso di sinistra, convessa da t=-a a t=0, concava da 0 a +a, convessa da +a a +∞. Il cambiamento di convessità avviene nei punti t=-a, t=0, t=+a. Data la continuità di g(t) e di tutte le sue derivate, si capisce che il grafico deve avere tre flessi nei punti in cui cambia la convessità. Inoltre si riconosce che il minimo e il massimo relativi sono assoluti (Un'occhiata alla fig.1).

Per determinare i punti stazionari (minimo e massimo relativi) e i flessi occorre calcolare le derivate

**Derivata prima g'(t):**

$[6] g'(t) = \frac{1.(t^2+1)-2t^2}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$. Come era da aspettarsi, g'(t) è pari, dato che g(t) è dispari.

La g'(t) è positiva per -1<t<1, negativa all'esterno e si annulla per t=- 1 e per t=1, perciò la g(t) decresce da - $\infty\ a-1, cresce\ da-1\ a\ 1\ e\ ritorna\ a\ decrescere\ da\ 1\ a+\infty$ . Per t=-1 si ha il minimo (y= -1/2), per t=1 il massimo (y= 1/2).

**Per determinare i tre flessi**, si calcola la derivata seconda

$[7] g''(t) = \frac{-2t\left(1+t^2\right)^2-(1-t^2)2(\left(1+t^2\right)2t}{\left(1+t^2\right)^4} = \frac{-6t+2t^3}{\left(1+t^2\right)^3} = 2\frac{(t^3-3t)}{\left(1+t^2\right)^3}$, quindi g'(t)=0 ↔ $t^3$-3t=0;

g''(t) <0 per t<-$\sqrt{3}$, g''(t)>0 per $-\sqrt{3} < t < 0,\ g''(t) < 0\ per\ 0 < t < \sqrt{3}$, g''(t) > per t>$\sqrt{3}$.
Da ciò segue che:
g(t) è concava per t<-$\sqrt{3},\ convessa\ tra-\sqrt{3}\ e\ 0,\ concava\ \ tra\ 0\ e\sqrt{3},\ convessa$ per t > $\sqrt{3}$.
**Si conclude che i tre flessi hanno ascissa - $\sqrt{3}$, 0 e $\sqrt{3}$,** L'ordinata del flesso di destra è y=$\sqrt{3}$/4.

**Ora studio la funzione f(t) che è** la derivata di g(t) **cambiata di segno**: f(t)= -g'(t). perciò

$[8]\, f(t) = -\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$ **.** Si vede che f(t) è definita su tutto l'asse reale, è una funzione pari e f(0)=-1.

La parità di f ci dice che il punto (0; -1) è un minimo relativo o un massimo relativo. Ma non può essere un massimo relativo, perché, per ogni t, $t^2$-1> -$(t^2+1)^2$ in quanto $t^2+(t^2+1)^2>1$.
Il suo grafico interseca l'asse delle ascisse nei punti -1 e 1 (punti stazionar di g) e $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0^+$. Tutto questo ci dice che: l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale; devono esistere due massimi relativi (che sono anche assoluti) simmetrici rispetto all'asse delle ordinate e le cui ascisse sono t=-$\sqrt{3}$, e t= $\sqrt{3}$ ; $(0;\ -1)$è minimo assoluto. Le ascisse dei tre punti stazionari di f(t) sono quelle in cui g(t) ha i flessi.

**Pertanto,** $f_{\max} = f\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{1-3}{(1+3)^2} = \frac{1}{8}$**,** $f_{\min} = f(0) = -1.$

Sono così in grado di disegnare il grafico **qualitativo** di f(t) e, notando che il minimo, **in valore assoluto è 8 volte il massimo**, tale grafico è all'incirca il seguente (fig.2):

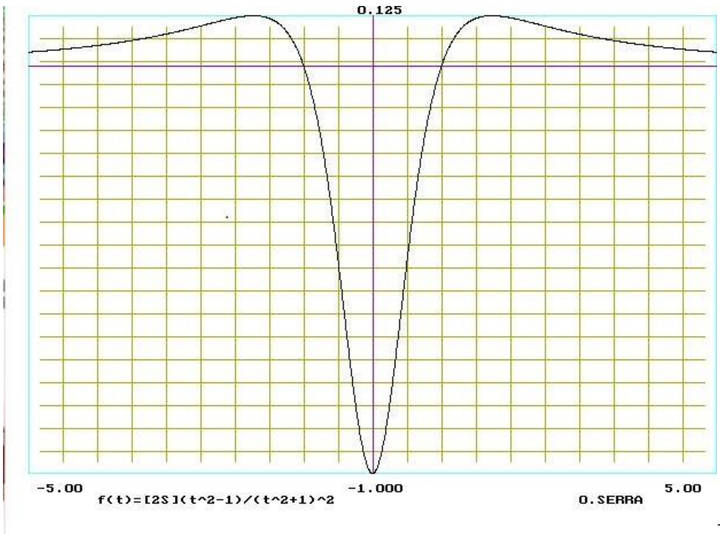



fig.2

Dal grafico si vede che ci **devono essere quattro flessi**, simmetrici a coppie rispetto all'asse y.

Ciò implica che, uguagliando a zero f''(t), l'equazione che si ottiene deve essere di 4° grado, biquadratica con discriminante positivo e deve presentare due variazioni (sì da ottenere 4 radici reali).
Inoltre, mi aspetto che l'ascissa del flesso più a destra sia maggiore di $\sqrt{3}$ (ascissa del massimo) e che il flesso interno (di ascissa positiva) abbia ascissa minore di 1.
**Calcolo, perciò, la derivata seconds di f, derivando la [9]:**

$$[9]\, f'(t) = -g''(t) = -2\frac{(t^3-3t)}{\left(1+t^2\right)^3},$$

[10] $f''(t) = -2\dfrac{(3t^2-3)\left(t^2+1\right)^3-(t^3-3t).6t.\left(t^2+1\right)^2}{\left(t^2+1\right)^6} = -2\dfrac{(3t^2-3)(t^2+1)-(t^3-3t).6t}{\left(t^2+1\right)^4}$. Uguagliando a 0, si ottiene l'equazione di 4° grado $3t^4+3t^2-3t^2-3-6t^4+18t^2=0$ e, semplificando, $3t^4-18t^2+3=0$, da cui infine si ricava $t^4-6t^2+1=0$, equazione biquadratica, come previsto per motivi di simmetria. Le radici dell'equazione risolvente di 2° grado sono $t^2 = 3\pm\sqrt{8}$ e quindi le quattro soluzioni, le ascisse dei quattro flessi sono, in ordine crescente: $t_1 = -\sqrt{3+\sqrt{8}}, t_2 = -\sqrt{3-\sqrt{8}}, t_3 = \sqrt{3-\sqrt{8}}, t_4 = \sqrt{3+\sqrt{8}}$.
Questi valori sono coerenti con quanto previsto mediante considerazioni di simmetria.

**Secondo esempio. Studiare la seguente funzione:**

[11] $y = \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2-x} \equiv \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-2}$.

La [11] è di estrema semplicità, se la si lascia così com'è e non la si riduca a un'unica frazione, come pare abbia preteso l'estensore della traccia.
Si tratta di una funzione (razionale) dispari, del 3° ordine (**Chiaro?**). Il dominio è l'asse reale privato dei punti x=0, x=2 (asintoti "***verticali***"), l'asse delle ascisse è asintoto "***orizzontale***"; unica intersezione con gli assi il punto (4/3; 0). Limiti:

$\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-2}\right)=0^+$, $\lim_{x\to0^+}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-2}\right)=+\infty$, $\lim_{x\to2^+}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-2}\right)=+\infty$. Siccome la funzione è dispari, i limiti a sinistra sono gli opposti. Tutto ciò ci permette già di disegnare il grafico (**decrescente**):

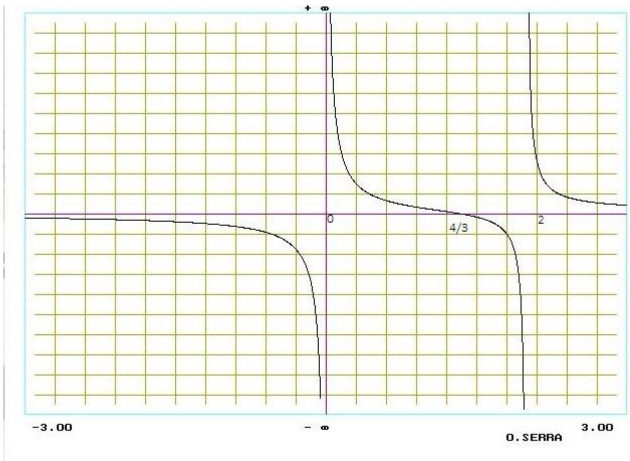


fig.3

Il grafico suggerisce l'assenza di punti stazionari e l'esistenza di un (**solo**) flesso, di ascissa prossimo a 4/3.
Calcolo, **solo ora**, le derivate

[12] $y' = \dfrac{-2}{x^2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}$, (negativa in tutto il dominio, coerentemente col grafico già abbozzato) e

[13] $y'' = \dfrac{4}{x^3}+\dfrac{2}{(x-2)^3}$. Uguagliando a zero, si ottiene l'equazione (di 3° grado)

[14] $x^3= 2(2-x)^3$. Siccome siamo interessati alla sua (unica) radice reale, si ottiene subito

[15] $x = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}$ (chiaramente compresa tra 1 e 2). Vedo se è minore o maggiore di 4/3.

$\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1} > \frac{4}{3} \Rightarrow 3\sqrt[3]{2} > 2\sqrt[3]{2}+2 \Rightarrow \sqrt[3]{2} > 2$ **Falso**, dunque l'ascissa del flesso è (lievemente) a sinistra di 4/3.

L'ordinata del flesso vale

$$y_F = 2\frac{\sqrt[3]{2}+1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}-2} = \frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}+1}{2} = \frac{2+\sqrt[3]{4}}{2} - \frac{\sqrt[3]{2}+1}{2} = \frac{1+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Quest'ordinata è positiva, come deve essere per i punti del grafico con x compresa tra 1 e 4/3.

Ma siccome il grafico è decrescente, deve essere $y_F < y(1) = 1$. Infatti $\sqrt[3]{4}-\sqrt[2]{2}<1$.

**Voglio provare a vedere, ora, quali complicazioni di calcolo si incontrano compattando la [11].**

$[16] y = \frac{3x-4}{x^2-2x}$. Calcolo la derivata prima:

$$[17] y' = \frac{3x^2-6x-(3x-4)(2x-2)}{\left(x^2-2x\right)^2} = \frac{3x^2-6x-6x^2+6x+8x-8}{\left(x^2-2x\right)^2} = \frac{-3x^2+8x-8}{\left(x^2-2x\right)^2}$$

**(Ce l'ho fatta! Ed è chiaramente <0 in tutto il dominio, come mi aspettavo, dato che ho già disegnato il grafico e quindi so che la funzione è decrescente).**

**Ora, però,** mi aspetta la derivata seconda:

$$[18] y'' = \frac{(-6x+8)(x^2-2x)^2+(3x^2-8x+8)2(x^2-2x)(2x-2)}{\left(x^2-2x\right)^4} = \frac{(-6x+8)(x^2-2x)+(3x^2-8x+8)(4x-4)}{(x^2-2x)^3} =$$

$$= \frac{-6x^3+12x^2+8x^2-16x+12x^3-12x^2-32x^2+32x+32x-32}{(x^2-2x)^3} = \frac{6x^3-24x^2+48x-32}{(x^2-2x)^3}$$

Uguagliando a zero il numeratore e semplificando, si ottiene l'equazione di 3° grado

**[19] $3x^3-12x^2+24x-16=0$.**

**Uffa, che fatica! Speriamo, almeno, che sia giusta! Ma ora, chi la risolve?**

Fortunatamente, io ho già risolto il problema col metodo della ***leggerezza matematica***, cara a Italo Calvino, un'equazione di 3° grado ariosa e leggera, la [14]: **$x^3+2(x-2)^3=0$, che ci ha permesso di trovare immediatamente la soluzione, perché non siamo caduti nella pesantezza di svolgere il cubo del binomio. Ma ora è necessario farlo per controllare la [19]:**

**$x^3+2(x-2)^3 = x^3+2(x^3-6x^2+12x-8) = 3x^3-12x^2+24x-16$. Deo gratias, la [19] è corretta!**

**Però, che tortura, che mal di pancia!**

Poi ci lamentiamo che molti studenti, a sentir nominare la matematica, avvertono conati di vomito!

**Nota.** Per l'integrazione di una funzione razionale fratta è necessario ricorrere alla scomposizione in frazioni semplici e ora, se dovessimo integrare la [11], che dovremmo fare? Prima la compattiamo e poi la scomponiamo? Ma se è già data come somma di frazioni semplici, perché non ne approfittiamo, **anche per derivarla, come ho mostrato prima?**

**Terzo esempio (inventato da me). Studiare la funzione**

$[20] y = \frac{x+1}{x^3-2x^2}$**.** D=***R- {0; 2}***. Unica intersezione con gli assi il punto (-1; 0). La funzione è **negativa nell'aperto** $]-1;0[\cup]0;2[$, **positiva all'esterno**. Tenendo conto, inoltre, che **x=0 e x=2 sono asintoti** "*verticali*" e **y=0 è asintoto** "*orizzontale*", si può già **disegnare il grafico**:

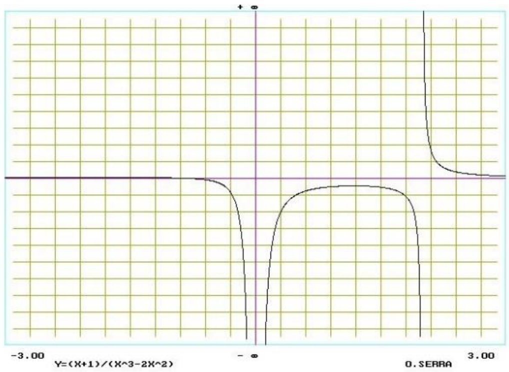


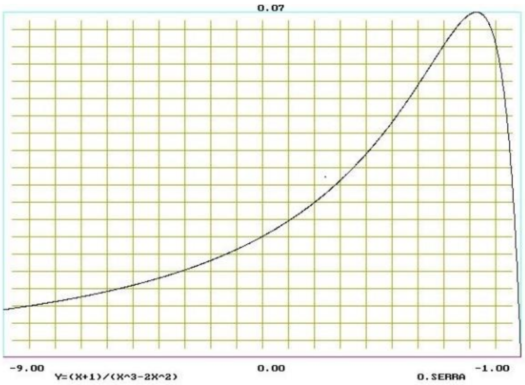
fig.4


fig.5

Fig.4 (panoramica). In fig.5 ho eseguito uno "zoom" per evidenziare il massimo di sinistra.

"***Vediamo***" crescenza e decrescenza, vediamo l'esistenza di due massimi relativi, vediamo convessità e concavità e l'esistenza di un (**solo**) flesso di ascissa < -1. A questo punto calcoliamo le **derivate** con maggiore tranquillità, perché abbiamo **indizi precisi** di ciò che *ci aspettiamo trovare*.
(Stiamo usando la tecnica di un bravo detective).
Prima decompongo la [20] in somma di frazioni semplici, anche in vista di un eventuale integrale.
Pongo $\frac{x+1}{x^3-2x^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-2}$ e calcolo i valori di a, b, c imponendo l'identità dei polinomi:
$x+1=a(x^2-2x)+b(x-2)+cx^2$, da cui segue a+c=0, -2a+b=1, -2b=1. Pertanto b= -1/2, a= -3/4, c=3/4.
Segue $y=\frac{x+1}{x^3-2x^2}\equiv-\frac{3}{4x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{4(x-2)}$ e quindi

$$y'=+\frac{3}{4x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{4(x-2)^2}=\frac{3x(x-2)^2+4(x-2)^2-3x^3}{4x^3(x-2)^2}=\frac{-8x^2-4x+16}{4x^3(x-2)^2}=\frac{-(2x^2+x-4)}{x^3(x-2)^2}.$$

Il numeratore si annulla per $x=x_1=\frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ e per $x=x_2=\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ ed è positivo per valori interni, mentre il denominatore è positivo per x>0, perciò $x_1$ e $x_2$ sono entrambi punti di massimo relativo.
Il primo massimo, $y(x_1)$ è molto evidente in fig.5 e vale circa 0.065; il secondo massimo è poco evidente dal grafico globale, andrebbe fatto uno "***zoom***"; verificare che $y(x_2)$ = -1.91 circa.
**Calcolo ora** la derivata seconda.

$$y''=-\frac{3}{2x^3}-\frac{3}{x^4}+\frac{3}{2(x-2)^3}=3\frac{-x(x-2)^3-2(x-2)^3+x^4}{2x^4(x-2)^3}=3\frac{6x^3-12x^2+8x-2x^3+12x^2-24x+16}{2x^4(x-2)}$$ e quindi

$y''=6.\frac{x^3-4x+4}{x^4(x-2)^3}$. Del denominatore interessa solo sapere che è >0 per x>2.

Il numeratore va da -∞ a +∞, si annulla per un certo $x_f$ compreso tra -3 e -2, in cui cambia segno, ha un massimo relativo per $x=-\sqrt{\frac{4}{3}}$ e un minimo relativo per $x=\sqrt{\frac{4}{3}}$; ma questo minimo è positivo, infatti $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}-4\sqrt{\frac{4}{3}}+4=4-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{4(3\sqrt{3}-4)}{3\sqrt{3}}>0$, perciò l'unica radice reale è $x_f$, ascissa del flesso.
Anche se non sapete calcolare $x_f$ con due o tre cifre decimali, sapreste dimostrare che $x_f$ è minore di $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}$, ascissa del massimo di sinistra? (che il flesso debba stare alla sinistra del massimo di sinistra si evince dal grafico).
**Voglio mostrare, ora, alcuni esempi di integrali (impropri).**

$\int_3^{+\infty} \frac{x+1}{x^3-2x^2}dx \equiv \int_3^{+\infty} -\frac{3}{4x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{4(x-2)}dx$ , convergente perché la funzione integranda è un infinitesimo di ordine 2 (>1). La decomposizione ci fornisce

$$\int_3^{+\infty} \frac{x+1}{x^3-2x^2}dx \equiv \int_3^{+\infty} -\frac{3}{4x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{4(x-2)}dx = \left[\frac{1}{2x}+\frac{3}{4}\log\left|\frac{x-2}{x}\right|\right]_3^{+\infty} = 0-\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\log\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{4}log(3)-\frac{1}{6},$$

(**positivo,** come deve essere per il suo significato **geometrico**).

N. B. La stessa funzione, integrata tra 0 e 1, (o tra 1 e 2, o tra 0 e 2), dà luogo a integrali divergenti. (Perché?).

$\int_1^{+\infty} \frac{x^3e^{-x}}{\log(x+1)^3}dx$ . La funzione integranda, per x→ +∞ , è un infinitesimo di ordine maggiore di 3 (anzi, di ordine maggiore di ogni numero reale positivo prefissato: basta applicare un numero opportuno dii volte il teorema di de L'Hspital alla funzione $x^n/e^x$), perciò l'integrale è convergente. La funzione integranda non ammette, però, una primitiva elementare; ma sapendo che l'integrale converge, se proprio è necessario vale la pena di spendere un po' di tempo (o di danaro) per ottenerne un valore approssimato.

$\int_1^{+\infty} \frac{x^3\log(x)}{x^4+x^2+1}dx$ . La funzione integranda **non ammette** una primitiva elementare; ma osservando che è asintoticamente equivalente a log(x)/x il cui integrale diverge, concludo che l'integrale [3] diverge a +∞.

**Una dimostrazione rigorosa** della divergenza di questo integrale si ottiene dalla doppia disuguaglianza

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3\log(x)}{x^4+x^4+x}dx < \int_1^{+\infty} \frac{x^3\log(x)}{x^4+x^2+1}dx < \int_1^{+\infty} \frac{x^3\log(x)}{x^4}dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x}dx < \int_1^{+\infty} \frac{x^3\log(x)}{x^4+x^2+1}dx < \int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x}dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\left[\log^2(x)\right]_1^{+\infty} < \int_1^{+\infty} \frac{x^3\log(x)}{x^4+x^2+1}dx < \frac{1}{2}\left[\log^2(x)\right]_1^{+\infty}.$$

**Infine,** calcolo l'**area** della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione $[8]\, f(t) = -\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$ e l'asse delle ascisse, al di sotto di tale asse:

$\int_{-1}^{1} \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt$ **. Il cambiamento di segno è dovuto al fatto che l'area deve essere positiva, mentre la funzione, nell'intervallo [-1; 1] è negativa (vedi fig.2). Questo integrale non sarebbe agevole da calcolar, se non ricordassimo che la [8] è la derivata (cambiata di segno) della funzione [1], perciò**

$\int_{-1}^{1} \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt = \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_{-1}^{1} = 1.$ Questa porzione di piano rassomiglia al triangolo isoscele di altezza 1 e base 2 (lunghezza dell'intervallo [-1; 1]), la cui area è esattamente 1. Come si giustifica qualitativamente tale uguaglianza?