**Ottavio Serra**

**Problemi significativi di calcolo delle probabilità**

**1)** Quante volte devo lanciare due dadi perché la probabilità di ottenere un doppio "6" superi p?
$P_n=1-(35/36)^n > p \rightarrow (35/36)^n <1-p \rightarrow (36/35)^n >1/(1-p) \rightarrow n > -\log(1-p)/\log(36/35)$. Se per es., vogliamo $P_n >0.5$, n deve essere maggiore di $-\log(0.5)/\log(36/35)=24.6$, dunque si richiedono almeno 25 lanci. Per avere $P_n > 0.9$, $n > -\log(0,1)/\log(36/35) = 1/0.01223 = 81.7$, quindi almeno 82 lanci.

**2)** Probabilità che in una riunione di n persone almeno due abbiano lo stesso compleanno.
La probabilità che due persone **non** abbiano lo stesso compleanno è 364/365; che una terza persona non abbia il compleanno in comune con la $1^a$ o la $2^a$ persona è 363/365; perciò la probabilità che le tre persone abbiano compleanni diversi, nella ragionevole ipotesi di indipendenza stocastica, è (364/365).(363/365). Così continuando, la probabilità che n persone, n>2, abbiano compleanni diversi è (364/365).(363/365)….((366-n)/365). Segue che la probabilità di almeno una coincidenza è $P_n$ = 1 - (364/365).(363/365)….((366-n)/365).
Per esempio, con 23 persone la probabilità di almeno una coincidenza supera il 50%; per superare il 90% occorrono 41 persone, ecc.

**3)** Si abbiano n gettoni numerati da 1 ad n. Si chiede la probabilità di avere almeno una **concordanza,** cioè alla $k^{ma}$ estrazione esca il gettone numero k. Risulta, dalla teoria della probabilità dell'unione di eventi che $P_n = \sum_i p_i - \sum_{i,j} p_{i,j} + \sum_{i,j,k} p_{i,j,k} - \dots$ .
Ora, $p_i$ è data dalle permutazioni in cui c'è i all'$i^{mo}$ posto e quindi $p_i = (n-1)!/n! = 1/n$; $p_{i,j}$ si calcola dalle permutazioni in cui c'è i all'$i^{mo}$ posto e j al $j^{mo}$, perciò $p_{i,j} = (n-2)!/n! = 1/(n(n-1))$; eccetera.
Quindi $P_n = n\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{(n-1)n} + \binom{n}{3}\frac{1}{(n-2)(n-1)n} - \dots \binom{n}{n}\frac{(-1)^{n-1}}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ .
Segue che, se $n \rightarrow \infty$, $P_n \rightarrow 1-1/e$.

**4)** Problema dell'arresto di un gioco d'azzardo
**Con un celebre scambio di lettere tra Pascal e Fermat nasce il calcolo delle probabilità come scienza**[1]**.** Il problema è il seguente:
Al giocatore A mancano a partite per aggiudicarsi il torneo e la posta in gioco, al giocatore B ne mancano b; a questo punto decidono di arrestare il gioco. Come va ripartita la posta tra i due?
Sia p la probabilità costante di A di vincere una partita del torneo, q=1-p quella di B.
**Caso particolare:** supponiamo che le probabilità p di A e q=1-p di B siano uguali: p=q=1/2.
Si tratta di calcolare le probabilità $P_A$ e $P_B$ che avrebbero i due giocatori di aggiudicarsi il torneo, se avessero continuato il gioco.

[1] $P_A = (\frac{1}{2})^a + \binom{a}{1}(\frac{1}{2})^{a+1} + \binom{a+1}{2}(\frac{1}{2})^{a+2} + \dots + \binom{a+b-2}{b-1}(\frac{1}{2})^{a+b-1}$;

$P_B$ si ricava da $P_A$ scambiando a con b.
Questo è il metodo combinatorio adottato da Fermat. Pascal usa invece un approccio ricorsivo:
[2] $P_A(a,b)= 1/2P_A(a-1,b)+1/2P_A(a,b-1)$.

**Caso generale.**

[3] $P_A = p^a + \binom{a}{1}p^a q + \binom{a+1}{2}p^a q^2 + \dots + \binom{a+b-2}{b-1}p^a q^{b-1}$. La formula ricorsiva è

[4] $P_A=p.P_A(a-1,b)+q.P_A(a,b-1)$.
Esempio. Se a=1 e b=2, (p=q=1/2), $P_A=1/2+(1/2)^2$ = ¾; $P_B=(1/2)^2=1/4$ (come è ovvio) e la posta va ripartita nel rapporto di 3 ad 1.

**5) La rovina del giocatore**. Se un giocatore A con capitale iniziale a affronta un giocatore B (Casinò o Banco) che dispone di un capitale molto grande b, prima o poi perde l'intero capitale: vediamo.

[1] Keith Devlin: "La lettera di Pascal, Rizzoli 2008.

Sia p la probabilità costante che A vinca una mano, q=1-p quella di B, indichiamo con P(a) la probabilità di rovina di A, cioè che il suo capitale scenda a zero. Detto x il capitale corrente di A, l'espressione ricorsiva di P(x) è:

[1] $P(x)=p.P(x+1)+q.(P(x-1)$.

Questa è un'equazione alle differenze che si risolve cercando soluzioni del tipo $P(x)=\lambda^x$. Sostituendo in [1] si ricava: $p.\lambda^2-\lambda+q = 0$, che ammette le soluzioni particolari $\lambda=1$ e $\lambda=q/p$.

Distinguiamo i due casi:

**I° )** p=q=1/2 e quindi $\lambda=1$ con molteplicità algebrica 2. Segue $P(x)=c_1+c_2.x$. Le costanti si determinano imponendo le condizioni *iniziali* P(0)=1 (rovina certa), P(a+b)=0 (A sbanca il Casinò). Perciò $c_1=1$, $c_2=-1/(a+b)$ e $P(x) = 1-x/(a+b)$. Si noti che se b è immensamente grande, come è di norma il capitale di un casinò rispetto a quello di un giocatore, P(x) si avvicina arbitrariamente ad 1: $\lim_{b\to\infty} P(x)=1$, la rovina del giocatore è certa.

**II°)** $p\neq q$. $P(x)=c_1+c_2(q/p)^x$. Con le solite condizioni iniziali,

$$\begin{cases} 1=c_1+c_2 \\ 0=c_1+c_2\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} c_2=\dfrac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} \\ c_1=\dfrac{-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} \end{cases} \text{. Segue}$$

$$P(x)=\frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}+\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x}-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

Vediamo ora la sorte di A se il banco B è infinitamente ricco.

Se q>p (di solito questo è il caso, (mai visto un biscazziere che gioca con probabilità minore del cliente da spennare),

$$\lim_{b\to\infty} P(x)=\lim_{b\to\infty}\frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}+\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x}-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}=1$$ (il giocatore è rovinato);

se invece è p>q, (**caso non realistico**), si avrà

$$\lim_{b\to\infty} P(x)=\lim_{b\to\infty}\frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}+\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x}-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}=\left(\frac{q}{p}\right)^{x}=\left(\frac{q}{p}\right)^{a},$$

se x=a. **In tal caso la rovina non è certa, ma quando mai si è vista p>q?**

**6.** Una moneta e un dado vengono lanciati ripetutamente insieme. Qual è la probabilità che "Testa" esca prima di una prefissata faccia del dado, per esempio la faccia "4" ?

**La legge di Poisson (1781-1840).**

Vogliamo completare lo studio del calcolo delle probabilità introducendo la legge di Poisson. Pariamo da un esempio tratto dal testo "Metodi matematici e statistici" di Giovanni Prodi (Vedi bibliografia nella lezione 2. Calcolo delle probabilità e statistica).

Supponiamo che un liquido di coltura contenete m batteri venga diviso in n gocce (uguali e molto numerose); si chiede: qual è la probabilità che in una goccia capitino k batteri? (k=0,1,..m). Fissata una goccia, la probabilità che un determinato batterio vi finisca è p=1/n, perciò la probabilità che in quella goccia finiscano k batteri è data dalla legge binomiale di Bernoulli:

$P_k = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-k}$. Siccome il calcolo diretto laborioso e praticamente intrattabile quando n ed m sono molto grandi, facciamo tendere m ed n all'infinito, supponendo però costante il rapporto a = m/n, che rappresenta il numero medio di batteri per goccia. Si avrà:

$$P_k = \frac{m.(m-1)....(m-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{m}{n}\right).\left(\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\right)...\left(\frac{m}{n}-\frac{k-1}{n}\right).\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k}$$

$$= \frac{1}{k!}a.\left(a-\frac{1}{n}\right)...\left(a-\frac{k-1}{n}\right).\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k}.$$

Facciamo ora tendere n all'infinito.

Siccome $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k}=1$, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}=e^{-a}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k!}a.\left(a-\frac{1}{n}\right)...\left(a-\frac{k-1}{n}\right)=\frac{a^k}{k!}$, si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty} P_k = \frac{a^k}{k!}e^{-a}.$$

Calcolo ora il valore medio di k: $\bar{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{k!}e^{-a} = ae^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = ae^{-a}e^{a} = a$, come era intuitivo.

La Var(k)=mpq=m(1/n)(1-1/n)=a(1-1/n) che, per n→∞, tende ad a.

Se una variabile aleatoria segue la legge di Poisson di parametro a, valore medio e varianza sono uguali ad a. Una variabile aleatoria segue la legge di Poisson se la probabilità di successo p è molto piccola, minore di 0,1 o di 0,01. (Ricordiamo che nell'esempio introduttivi p=1/n ed n tende all'infinito.

**Altro esempio.** In una clinica nascono in media 3 bambini al giorno. Il direttore afferma che in certi giorni dell'anno ne nascono anche 8. E' verosimile questa affermazione?. Siccome in un anno nascono oltre 1000 bambini (numero abbastanza grande), possiamo pensare a una legge di Poisson di parametro a=3. $P_8 = \frac{3^8}{8!}e^{-3} = \frac{6561}{40320}0,049787 =\approx 0,0081$. Siccome l'inverso è circa123, è plausibile che in media 3 volte all'anno ci sia questo accumulo di nascite.

**Esercizi.**

**1.** In un libro di 200 ci sono 400 errori di stampa. E' più probabile che vi sia un errore per pagina o che ve siano 2? Qual è il numero di errori per pagina che ha maggiore probabilità?

**2.** In una rete telefonica la probabilità di un collegamento sbagliato è 1/1000. In un giorno in cui si verificano 4000 chiamate (indipendenti) qual è la probabilità di 4 collegamenti sbagliati?

**Ci sarebbero tante altre cose da dire, ma qui ci fermiamo.**