Ottavio Serra

Integrali impropri. Serie. Metodi numerici.

1) Integrali impropri. Esistono due tipi di integrali impropri, che chiamerò di I^a e di II^a specie.
I^a specie: intervallo di integrazione infinito.
$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$ La funzione f(x) si intende continua nell'intervallo di integrazione. Discuterò il primo caso, gli si riducono ad esso in modo ovvio.
Si definisce $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$ se questo limite esiste. Se il limite è finito, l'integrale si dice convergente, altrimenti divergente.

Esempio. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = 1.$

Criterio di convergenza. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge se per x→+∞ f(x) tende a 0 come $\frac{1}{x^\alpha}, \alpha > 1$, cioè f(x) per x→+∞ deve essere un infinitesimo di ordine α maggiore di 1.

Pertanto $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx, \int_2^{+\infty} \frac{1}{\log x}dx, \int_2^{+\infty} \frac{1}{x.\log x}dx$ sono divergenti.

$\int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\log x}dx$ è convergente, anche se non lo so calcolare in forma esatta; ma ciò mi garantisce che vale la pena di tentare un calcolo approssimato.
II^a specie: la funzione integranda è infinita nell'estremo sinistro, o destro o in un punto interno all'intervallo di integrazione [a, b].

Esempio: $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to+0}\int_a^4 x^{-1/2}dx = \lim_{a\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_a^4 = 2\sqrt{4} = 4.$

Criterio di convergenza. Un integrale improprio di II^a specie è convergente se f(x) nel punto in oggetto è un infinito di ordine $\alpha < 1$.

Pertanto $\int_0^2 \frac{1}{x}dx, \int_1^2 \frac{1}{x\log x}dx, \int_1^2 \frac{e^{-x}}{\log x}dx$ sono divergenti.

L'integrale $\int_0^1 \frac{e^x sen(x)}{\sqrt{x}}dx$ è convergente e, anche se non so calcolarlo in forma esatta, ciò mi conforta nel tentare un calcolo approssimato.

2) Serie. E' un simbolo del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, k numero naturale, a_k numero reale.

Somma parziale $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$. La serie si dice convergente, se $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ è finito.
Se il limite è infinito la serie si dice divergente, se il limite non esiste la serie si dice indeterminata.

Esempio. La serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2$ converge, anzi abbiamo trovato addirittura la sua somma.(E' la serie geometrica di "ragione" ½).
Definizione. Una serie di termine generico a_n si dice assolutamente convergente se converge la serie dei valori assoluti $|a_n|$.
Una serie con tutti i termini positivi, se converge, converge assolutamente.

Criteri di convergenza per le serie a termini positivi. Da essi si ricavano altrettanti criteri di convergenza assoluta.

(a) **Criterio del confronto**. Siano $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ due serie con $0<a_n \leq b_n$. Se la seconda converge, converge anche la prima; se la prima diverge, diverge anche la seconda.

Esempio. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sen^2 k}{3^k}$ converge perché è maggiorata dalla serie armonica di $1/3^k$.

La serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log(k)}$ diverge perché $1/\log(k) > 1/k$ e la serie (armonica) di termine $1/k$ diverge come abbiamo visto in una delle prime lezioni.

(b) **Criterio del rapporto.** Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$, la serie converge; se $l > 1$, la serie diverge. Nulla si può dire se $l = 1$.

Esempio. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ converge perché $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$

(c)**Criterio della radice.** Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$, la serie converge, se $l > 1$, la serie diverge; nulla si può dire se $l=1$.

Esempio. $\sum_{n=1}^{n} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$

è convergente, perché $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$.

(d) **Criterio del confronto con un integrale improprio.** Sia data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se si sostituisce n con la variabile reale x si ottiene la funzione a(x). Risulta:

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n < \int_1^{+\infty} a(x)dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se l'integrale è convergente, anche la serie alla sua sinistra converge e quindi anche la serie a destra, perché differisce da quella a sinistra per l'unico addendo a_1; se l'integrale diverge, anche la serie diverge. In altri termini, la serie converge se a_n per $n\to\infty$ è un infinitesimo di ordine $\alpha > 1$.

Esempio. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge per ogni $\alpha > 1$. (E' notevole che Eulero con mezzi elementari trovò che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Un modo alternativo per dimostrare che la serie armonica diverge (a $+\infty$):

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} [\log x]_1^b = +\infty$$

Criterio di Leibnitz per le serie a segno alterno. Se $a_n > 0$ per ogni n, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ converge qualora a_n (per $n\to\infty$) tenda a zero in modo monotòno (decrescendo). La convergenza non è detto che sia assoluta.

Esempio. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge per il criterio di Leibnitz, ma non assolutamente, infatti la serie dei valori assoluti è la serie armonica, che è divergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge, ma non assolutamente. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \log(1+n)}$ converge.

Esercizi.

(1) Dimostrare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{n!}, \forall \alpha \in R, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^n}.$$

Ricavarne un confronto tra gli ordini di infinito dei numeratori e dei denominatori.

3) Metodi numerici.

(A) Zero di una funzione f(x) continua.

[1°] Metodo di bisezione. Se f(a) ed f(b) sono discordi, allora in [a, b] cade almeno uno zero di f.

Se f è monotona in [a, b], tale zero è unico. **Algoritmo: s:=f(a); repeat x:=(a+b)/2; if S*f(x)>0 then a:=x else b:=x until b-a< precisione assegnata; a valore per difetto, b per eccesso.**

[2°] Metodo di Newton o delle tangenti. Si suppone f derivabile in un intorno dello zero di f, sia x_0 un punto prossimo allo zero x da determinare. La tangente al grafico di y=f(x) nel punto $(x_0, f(x_0))$ è $y-f(x_0)=f'(x_0).(x-x_0)$, perciò, posto y=0, si ottiene un'approssimazione migliore di x : $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$. Va scritta perciò una funzione per calcolare la derivata. **Algoritmo** ….

```
{Introdurre un x d'innesco}…
Function f(x:reale):reale; begin f:={per esempio} x-cos(x) end;
    Function Derivata(x:reale):reale; Const h=1e-4;{per esempio}
      begin Derivata:=(f(x+h)-f(x-h))/(2*h)
      end;
  Function ZeroDiF(x:reale):reale;  var T:reale;
    begin repeat T:=f(x)/Derivata(x); x:=x-T until abs(T)< precisione
   assegnata;
           ZeroDiF:=x
    end;…
    BEGIN… Leggi(x); Stampa(ZeroDiF(x));…
    END.
```

(B) Integrale definito col metodo dei trapezi.

[1°] Formula chiusa {utilizza gli estremi a, b}. **Algoritmo**: Leggi (a, b, n); h:=(b-a)/n;
S:=(f(a)+f(b))/2; x:=a; For k:=1 to n-1 do begin x:=x+h; S:=S+f(x) end;
Integrale1 {formula chiusa}=S*h;…

[2°] Formula aperta {non utilizza gli estremi a, b}. **Algoritmo**: Leggi (a,b,n); h:=(b-a)/n;
x:=a-h/2; S:=0; For k:=1 to n do begin x:=x+h;S:=S+f(x) end;
Integrale2 {formula aperta}=S*h;…

N.B. L'interpolazione [2*Integrale2+Integrale1]/3 dà un'approssimazione ottima (equivalente alla formula di Simpson).

(C) a) Supponendo di sapere che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ rappresenta il log(1+x) per $-1 < x \leq 1$, calcolare il logaritmo naturale di 2 (x=1) per difetto e per eccesso con tre decimali esatti (Si noti che per x=1 la serie è la serie "armonica a segni alterni" e quindi la convergenza non è assoluta), Scrivere un opportuno algoritmo.

b) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ **.** Si scriva un algoritmo per calcolare $\sqrt{e}$.

c) $senx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \cos = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ **.** Calcolare sen($0{,}1^{rad}$) e cos($0{,}1^{rad}$) e verificare che la somma dei quadrati è 1. (N.B. In b) e in c) la convergenza è assoluta per ogni x reale).