Ottavio Serra

Tecniche di integrazione. Applicazioni geometriche.

Integrazione per parti.

$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)dx.$ Si dimostra derivando ambo i membri.

Chiaramente, $\int_a^b u(x).v'(x)dx = \left[u(x).v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)dx$

Integrazione per sostituzione. Se x=φ(t) è una funzione invertibile, a volte l'integrazione si semplifica ponendo

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int f(\varphi)d\varphi = G(t) = G[\varphi^{-1}(x)]$.

Esempio 1: $\int \cos(x)e^{sen(x)}dx$. Posto sen(x) = t, dt =cos(x)dx e perciò

$\int \cos(x)e^{sen(x)}dx = \int e^t dt = e^{sen(x)} + c.$

Esempio 2: J= $\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-sen^2t}\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}[t + \frac{1}{2}sen(2t)]$, quindi

$J = \frac{1}{2}(t + sent\cos t) = \frac{1}{2}(arcsenx + x\sqrt{1-x^2}) + c$.

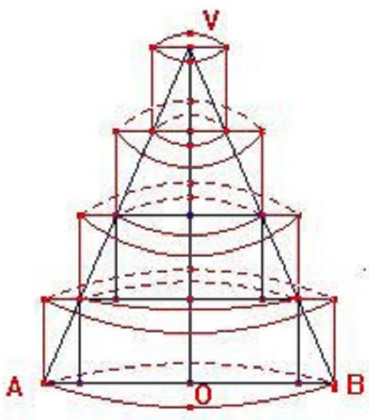
Ovviamente nel caso di integrale definito, se non si vuole tornare alla variabile iniziale, occorre modificare gli estremi di integrazione.

$S = \int_1^2 \frac{\sqrt{\log x}}{x}dx$. Posto t=logx, x=$e^t$ dx=e^tdt, $S = \int_0^{\log 2} \frac{\sqrt{t}}{e^t}e^t dt = \int_0^{\log 2}\sqrt{t}dt = \left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\log 2} = \frac{2}{3}\sqrt{\log^3(2)}$

Non insisto oltre, perché argomenti ben trattati nelle lezioni curriculari.

Applicazioni geometriche.

Volumi



La figura rappresenta un cono con cilindri inscritti e circoscritti. Ammessa la formula del volume di un prisma o di un cilindro, *area di base per altezza*, si ricava il volume del cono (o di una piramide) integrando da 0 ad h (altezza) l'area di una sezione "retta", cioè ortogonale all'altezza.

A distanza z dal vertice l'area della sezione è S(z) =$S_{(base)}z^2/h^2$, perciò

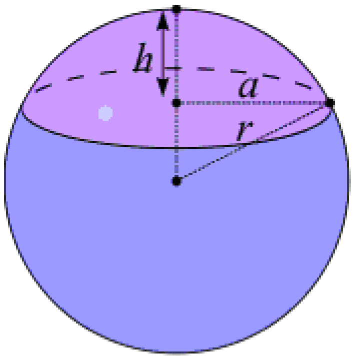
$$V = \int_0^h S(z)dz = \int_0^h S_{(Base)}\frac{z^2}{h^2}dz = \frac{S_{(Base)}}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}S_{(Base)}h \ .$$

Nel caso del cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Il volume di una sfera di raggio r si trova allo stesso modo. Fissato un diametro (come asse x), una sezione retta è un cerchio di raggio r_x tale che $r_x^2 = r^2 - x^2$, perciò

$V = \int_{-r}^{r} \pi (r^2 - x^2) dx = \pi . 2 \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3$ (ho sfruttato la parità della funzione integranda).

Esercizio. Se si affetta la sfera con un piano, si ottengono due solidi detti segmenti sferici ad una base. Ciascuno è il solido compreso tra una calotta e il piano secante. Il diametro perpendicolare al piano secante interseca ciascuna calotta in un punto detto vertice; la distanza tra il vertice e il piano secante è detto altezza della calotta (e del segmento sferico associato). Si calcoli il volume del segmento sferico (ad una base), sapendola sua altezza h e il raggio della sfera. Risp: $\pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$.



Si noti che per h=2r si ottiene il volume della sfera.

Volume dell'ellissoide di semiassi a b c. L'equazione dell'ellissoide è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Assunto l'asse 2c sull'asse z, la sezione retta S(z) è l'ellisse di equazione

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2(1 - \frac{z^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{z^2}{c^2})} = 1$, la cui area è $S(z) = \pi a_z b_z$ ovvero

$S(z) = \pi a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} . b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} = \pi ab (1 - \frac{z^2}{c^2})$. Perciò il volume dell'ellissoide è

$V = \pi ab \int_{-c}^{c} (1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = \pi ab . 2 \left[z - \frac{z^3}{3c^2} \right]_0^c = \frac{4}{3} \pi abc.$

Esercizio 1. Volume del solido che si ottiene facendo ruotare di un angolo giro il segmento parabolico $y=x^2$, $0<x<a$, intorno all'asse delle x.

$V = \int_0^a S(x) dx = \int_0^a \pi y^2 dx = \pi \int_0^a x^4 dx = \pi \frac{a^5}{5}$

Esercizio 2. Volume del solido che si ottiene facendo ruotare di un angolo giro il segmento parabolico $y=x^2$, $0<x<a$ intorno all'asse delle y.

$V = \int_0^{a^2} S(y) dy = \int_0^{a^2} \pi x^2 dy = \pi \int_0^{a^2} y dy = \pi \frac{a^4}{2}$.

Lunghezza di un arco di curva regolare.

Sia γ un arco di curva regolare di equazioni parametriche x=x(t), y=y(t), z=z(t): per le curve piane manca la 3ª equazione. Il parametro t vari in un intervallo [a,b]. Si introduce una poligonale P(0) P(1),…P(n) dopo aver diviso [a,b] in n parti $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$(magari uguali). La lunghezza della poligonale è $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[(x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [(y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [(z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}$ .Per il teorema di Lagrange

$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left[(x'(\tau_i^x)\Delta t_i)\right]^2+\left[(y'(\tau_i^y)\Delta t_i)\right]^2+\left[(z'(\tau_i^z)\Delta t_i)\right]^2}$, essendo τ_i^x, τ_i^y, τ_i^z convenienti punti interni a $[t_{i-1}, t_i]$. Passando al limite per $\text{Max}\{\Delta t_i\}\to 0$, si ottiene $L(\gamma)=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'(t)}dt$.

Esempi. Lunghezza della circonferenza di raggio r . x=rcost, y=rsent, 0<t<2π

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-rsent)^2+(rcost)^2}dt=2\pi r.$$

Lunghezza di un arco di spirale equiangola x=tcost, y=tsent, 0<t<α.

$$L=\int_0^{\alpha}\sqrt{(-tsent)^2+(tcost)^2}dt=\int_0^{\alpha}t.dt=\frac{\alpha^2}{2}.$$

Lunghezza dell'arco di cicloide x=r(t-sent, y=r(1-cost) , 0<t<2π.

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{[r(1-\cos t)]^2+[r.sent]^2}dt=r\int_0^{2\pi}\sqrt{(2-2\cos t}.dt=2r\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}dt=2r\int_0^{2\pi}sen\frac{t}{2}dt=8r.$$

Lunghezza dell'arco di parabola $y=x^2$ in [0,1]. Equazioni parametriche: x=t, $y=t^2$.

$L=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx=...=\frac{1}{4}[2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5})]$ (E' difficile, ma esprimibile con funzioni elementari).

Lunghezza dell'ellisse. Equazioni parametriche: x=acost, y=bsent, t in [0,2π]. Per la simmetria rispetto agli assi si ha:

$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2sen^2(t)+b^2\cos^2(t)}dt$. (**Non esprimibile con funzioni elementari!!!**).

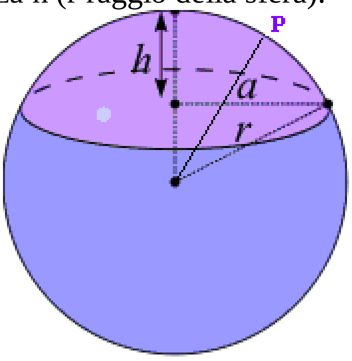
Aree di superfici dello spazio.

Il problema è ancor più difficile che per le lunghezze. Ci limitiamo a casi molto semplici, postulando che l'area laterale di un prisma retto sia perimetro di base per altezza, e quindi l'area laterale di un cilindro circolare retto è 2πr.h.

Area laterale del cono (raggio di base r, apotema a). Considerata una circonferenza sezione parallela alla base, a distanza x dal vertice <u>lungo l'apotema</u>, la sua lunghezza sarà L(x)=2πr.x/a e l'area di una fascia di lunghezza dx lungo l'apotema, che a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto a dx si può assimilare a un cilindro, sarà dS=(2πr.x/a)dx e integrando da 0 ad a si ottiene

$$S_{laterale}=\pi ra.$$

Area di una calotta sferica di altezza h (r raggio della sfera).



Verificare che si trova **S = 2πrh.** (suggerimento *non obbligato*: considerare l'arco s misurato sul "meridiano" a partire dal vertice fino al punto generico P e il corrispondente angolo φ che varia da zero a φ_0 (quando P arriva al bordo della calotta).

Verificare che la stessa formula vale per la zona sferica di altezza h (differenza di due calotte…).