Ottavio Serra

Problema delle "*aree*" e calcolo integrale.

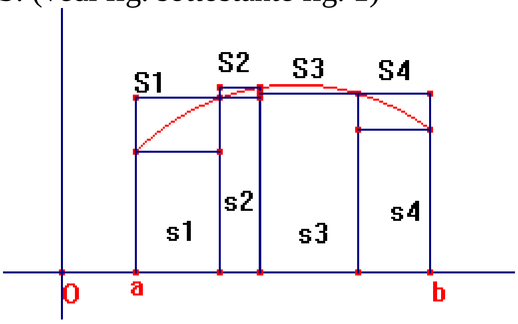
Area di una figura piana.

Sia S la porzione di piano cartesiano compresa tra l'asse delle x e il grafico di una funzione f(x) continua e (per il momento) positiva nell'intervallo [a,b] dell'asse x. Postuliamo che l'area di un rettangolo R di base [a,b] e altezza h sia A(S) = (b-a).h.

Dividiamo ora [a,b] in n intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ per i che va da 1 ad n, $x_0 = a$, $x_n = b$ e poniamo:

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, m_i e M_i rispettivamente il minimo e il massimo (assoluti) in $[x_{i-1}, x_i]$, certamente esistenti per il teorema di Weierestrass.

Le somme $s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ rappresentano le aree di due pluri-rettangoli, uno inscritto e uno circoscritto ad S. (vedi fig. sottostante fig. 1)



Risulta $A(s_n) < A(S) < A(S_n)$.

Se ora facciamo tendere a zero la massima ampiezza δ degli intervalli Δx_i, (per conseguenza il loro numero $n \to \infty$), la differenza $A(S_n) - A(s_n)$ tende a zero (è la somma delle aree dei rettangolini differenza $S_i - s_i$); ciò è reso intuitivo dalla figura, ma andrebbe dimostrato: noi accettiamo questo risultato. Segue perciò:

$$A(S) = \lim_{\delta \to 0} S_n = \lim_{\delta \to 0} s_n$$

Preso ora in ciascun intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ un punto ξ_i, si costruisca la somma $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Risulta

$s_n < \sigma_n < S_n$, perciò avremo anche $A(S) = \lim_{\delta \to 0} \sigma_n = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Data l'importanza di questo concetto, al precedente limite è stato dato un nome speciale:

Integrale di f(x) da a a b . In simboli:

(0) $$\int_a^b f(x).dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i \, .$$

Il concetto di integrale, al quale siamo arrivati con un modello geometrica, ha innumerevoli interpretazioni: volume, lavoro, lunghezza, a seconda del significato che diamo agli assi cartesiani; perciò l'integrale può anche assumere valori negativi.

Proprietà

(1) $$\int_b^a f(x).dx = -\int_a^b f(x).dx$$

(2) $\forall c \in D_f, \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx = \int_a^b f(x).dx$

(3) $\int_a^b [f(x)+g(x)].dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$ e $\int_a^b [kf(x)].dx = k\int_a^b f(x).dx$.

La (3) ci dice che l'integrazione è un operatore lineare nello spazio delle funzioni continue in [a,b].

(4) $\int_a^a f(x)dx = 0$ (L'area di un rettangolo di base zero è nulla).

Accettiamo queste proprietà senza dimostrazione, sulla base della loro evidenza geometrica.
M.B. L'integrale di f(x) in [a,b] dipende da f (ovviamente) e dagli estremi dell'intervallo di integrazione a e b, ma non da x, che denota soltanto la variabile che può essere indicata con un qualsiasi altro simbolo, se dovesse sorgere ambiguità. Perciò x si chiama *variabile muta*.
Teorema del valore medio. Dalla fig. 1 è evidente che m(b-a) ≤ A(S) ≤ M(b-a). Perciò, per la continuità del campo reale, esiste un valore reale k compreso tra m ed M per cui A(S) = $\int_a^b f(x).dx =$ k.(b-a). Tale k si chiama valore medio di f in [a,b]:

(5) $$\overline{f} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Siccome f è continua, esiste almeno un punto c tra a e b in cui f(c)=k = $\overline{f}$.
Funzione integrale: Sia x un punto interno all'intervallo [a,b]; funzione integrale di f è la funzione

(6) F(x)= $\int_a^x f(t).dt$.

Teorema fondamentale. F(x) è derivabile e F'(x) = f(x).
Dimostrazione. Considerato un incremento Δx tale che x+ Δx sia in [a,b], consideriamo l'incremento di F:

$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$. Per le proprietà precedenti segue:

$\Delta F = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ e per il teorema del valore medio

$\Delta F = \Delta x. f(\xi), \xi \in]x, x+\Delta x[$. Perciò la derivata di F è

$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x f(\xi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$ (per la continuità di f(x) in [a,b].

Primitive. Una funzione come la funzione integrale F(x) la cui derivata è f(x) si chiama una primitiva di f(x), *una* perché se ce n'è una ce ne sono infinite, tutte differenti tra loro per una costante. Perciò la generica primitiva di una funzione continua in [a,b] f(x) è G(x)=F(x)+C.

$G(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. Determiniamo ora C ponendo x = a e ottenendo C=G(a).

$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$ e in particolare

(7) $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \equiv \left[G(x)\right]_a^b$. (Quest'ultima notazione è molto comoda).

Questo importante teorema è dovuto a Newton e a Leibnitz. Pertanto per calcolare l'integrale di una funzione continua f(x) in [a,b] si determini, se ci si riesce, una primitiva G(x) di f(x) e poi si applichi la (7).

Area della porzione di piano compresa tra due curve continue.
Siano y=f(x) e y=g(x) due funzioni continue in [a,b]. Se f(x)>g(x), l'area compresa tra i loro grafici è

$$A(S)=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx .$$

Se l'integrale non denota un'area, può essere negativo o nullo. In tal caso può non essere richiesto che sia f(x) > g(x).

Esercizi.

1) Calcolare l'area compresa tra il grafico di y = sen(x) e l'asse delle x in [0,π].

$$A=\int_0^\pi sen(x)dx=\left[-\cos(x)\right]_0^\pi=-\cos(\pi)-(-\cos(0))=2 .$$

Idem, calcolare l'area compresa tra il grafico di y = sen(x) e l'asse delle x in [0,2π].
L'integrale di sen(x) in [0,2π] è zero, perché… Se voglio l'area in senso geometrico devo calcolare $\int_0^\pi [sen(x)-0]dx+\int_\pi^{2\pi}[0-sen(x)]dx=...=4$ (Infatti nella 2^a metà dell'intervallo l'asse delle x è al di sopra della sinusoide).

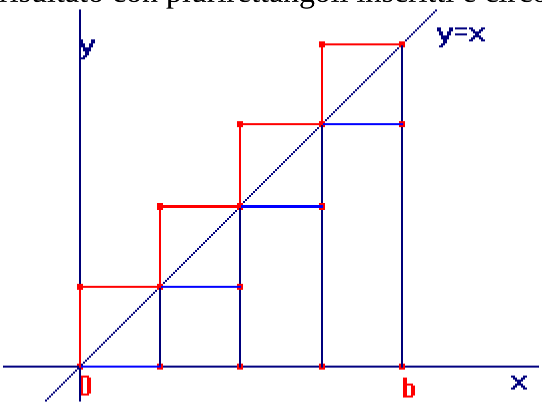
2) Calcolare il lavoro W compiuto da una mole di gas perfetto che passa isotermicamente a temperatura T_0 dal volume V_1 al volumeV_2.

$W=\int_{V_1}^{V_2}\frac{RT_0 dV}{V}=RT_0\left[\log V\right]_{V_1}^{V_2}=RT_0\log\frac{V_2}{V_1}$ e può essere negativo, se $V_2<V_1$ (compressione).

3) L'integrale di y=x in [0,b] è l'area del triangolo rettangolo di base b e altezza b: $A=b^2/2$.

Con un integrale si ha $A=\int_0^b xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^b=\frac{b^2}{2}$ (come deve essere).

Come si potrebbe ottenere il risultato con plurirettangoli inscritti e circoscritti?



Diviso l'intervallo [0,b] in n parti uguali in modo che ognuno abbia ampiezza costante h=b/n,
il plurirettangolo inscritto (costruito con i minimi $m_1=0$, $m_2=h$, $m_i=ih$, …$m_n=(n-1)h$), ha area $s_n=\sum_{i=0}^{n-1}h.ih=\left(\frac{b}{n}\right)^2.(0+1+2...+(n-1)=\frac{b^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}=\frac{b^2}{2}(1-\frac{1}{n})$, successione crescente il cui limite per n→∞ è il valore atteso.

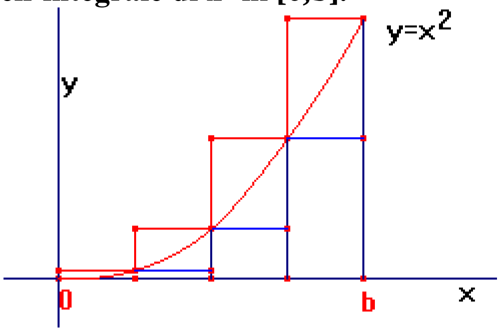
Analogamente si costruisce la somma S_n con i massimi M_i = ih, per i che va da 1 ad n:

$S_n=\sum_{i=1}^{n}h.ih=\frac{b^2}{n^2}.(1+2+...+n)=\frac{b^2}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2}=\frac{b^2}{2}(1+\frac{1}{n})$. Questa è una successione decrescente che converge a $b^2/2$.

L'errore che si commette troncando le successioni è $E_n < S_n - s_n = b^2/n$. L'errore relativo è dell'ordine di 1/n .

Si noti che $\int_0^a xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^a = \frac{a^2}{2}$ e perciò $\int_a^b xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$, d'accordo col teorema fondamentale di Newton e Leibnitz.

4) Più interessante è il caso dell'integrale di x^2 in [0,b].



Col teorema fondamentale si trova $\int_0^b x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^b = \frac{1}{3}b^3$.

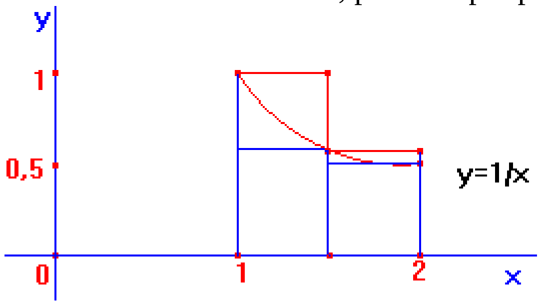
Vediamo come si potrebbe calcolare con i rettangoli inscritti (altezza dell'i^{mo} intervallo =$[(i-1)h]^2$) e con rettangoli circoscritti (altezza dell'i^{mo} intervallo =$(ih)^2$),per i =1..n, h=b/n.

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} h.(ih)^2 = h^3[0^2+1^2+2^2+...+(n-1)^2] = \frac{b^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{3}\left(1-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right).$$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} h.(ih)^2 = ... = \frac{b^3}{3}\left(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)$. I loro limiti sono $b^3/3$, (risultato trovato da Archimede per altra via).

(Ricordare la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali).

Osservazione. Se la funzione è decrescente in [a,b], massimo e minimo si invertono in ciascun intervallino, il minimo è a destra e il massimo a sinistra, per esempio per la funzione y=1/x in [1,2].



Siccome dlog(x)/dx = 1/x, $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\log(x)]_1^2 = \log(2)$

Che succede con i rettangoli? Posto h=(2-1)/n = 1/n, si ottiene

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h.\frac{1}{1+ih} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n+i} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n-1}$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} h.\frac{1}{1+ih} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}.$$

Queste due successioni convergono, la prima decrescendo, la seconda crescendo, a log(2).

5) Siccome dArctang(x)/dx = $1/(1+x^2)$, segue

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [ArcTan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Calcolare le successioni s_n ed S_n che convergono a $\pi/4$.