Ottavio Serra

Spazi vettoriali e geometria.

Definizione. Uno spazio vettoriale V su R è un insieme non vuoto di elementi detti vettori, sui quali sono definite due operazioni

I) Addizione di vettori: VxV → V che conferisce a V la struttura di gruppo abeliano:

a) (u+v)+w=u+(v+w) proprietà associativa;
b) esiste un elemento *neutro*, vettore nullo o zero, tale che u+o=0+u=u;
c) per ogni u esiste un vettore (opposto) –u tale che u+(-u)= -u+u=0;
d) u+v=v+u proprietà commutativa.

II) prodotto di uno scalare (numero reale) per un vettore: RxV→V tale che (a,b numeri reali)

a) a(u+v)=au+av;
b) a(bv)=(ab)v;
c) (a+b)v=av+bv;
d) 1.v=v.

Modelli di spazi vettoriali sono R, R^2, R^3,…R^n, quando si pongono le definizioni esemplificate per R^3: (x,y,z)+(x',y',z')=(x+x', y+y', z+z'); a(x,y,z)=(ax,ay,az).
R^2 ed R^3 sono modelli per il piano e lo spazio euclidei.

Combinazioni lineari di vettori: $w = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$. Se accade che w=0 solo se tutti gli scalari a_i sono nulli, i k vettori v_1, v_2, …v_k si dicono linearmente indipendenti o liberi, altrimenti si dicono linearmente dipendenti o legati. Base di R^n è una n-pla di vettori liberi. Per esempio, in R^3 una base è {e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)}. Il vettore (x,y,z) si può pensare come combinazione lineare dei vettori di base e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1) (base canonica).
Verificare che {(1,1,2), (2,-1,5), (4,1,9)} non è una base di R^3.
In R^3 il massimo numero di vettori liberi non può superare 3; perché?
Verificare che {(u=(1,1,2), v=(2,0,1), w=(3,1, 1)} è una base di R^3 ed esprimere il vettore (4,1,7) come combinazione lineare di essi, cioè calcolare i numeri (gli scalari) a,b,c tali che
(4,1,7) =au+bv+cw.

Sottospazi. Un sottoinsieme S di V è un sottospazio se è chiuso rispetto alle operazioni di spazio vettoriale definite in V.
Esempi. In R^2 è un sottospazio l'insieme S dei vettori (x,y) tali che ax+by=0. Una base di S è il vettore (b,-a). Per ogni scelta della coppia di scalari a,b si ha un sottospazio. Nel piano cartesiano sono interpretabili come rette per l'origine.
In R^3 ci sono due tipi di sottospazi non banali S={t.v}={t(a,b,c)}ha v come base ed è un sottospazio di dimensione 1 (si può interpretare come una retta per l'origine); H={αu+βv)} ha una base costituita dai due vettori u,v e ha dimensione 2, sempre che u e v siano linearmente indipendenti (H è interpretabile come piano per l'origine O(0,0,0).

N.B. Ogni spazio vettoriale ha due sottospazi banali: chi sono? Possono coincidere?

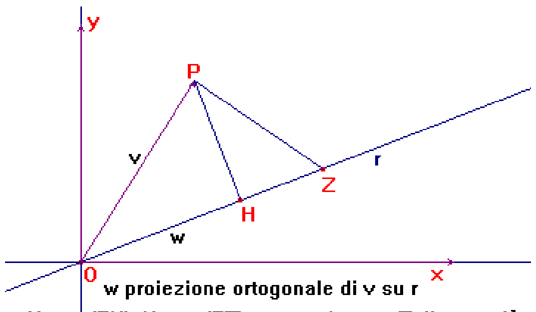
Esercizi.

1) In R^3 è dato il sottospazio H di equazioni cartesiane: {x+y-z=0, 2x+3z=0}. Determinare la dimensione e una base di H.
2) In R^3 una base del sottospazio S é {(1,1,2)}. Scrivere le equazioni cartesiane di S.
3) In R^3 il sottospazio H ha equazione cartesiana 2x+3y-z=0. Determinare dimensione e una base.
4) In R^3 una base del sottospazio S è {(1,1,0), (0,1,2)}. Scrivere l'equazione cartesiana di S.
5) Un R^2 l'insieme dei vettori (x,y) tali che x^2-y=0 non è un sottospazio: perché?
6) Per quali valori del parametro k l'insieme dei vettori (x,y,z) di R^3 tali che 2x+z+k-3=0 è un sottospazio ?
7) I vettori (x,y,z) di R^3 tali che $2^{x+2y-z} = 1$ formano un sottospazio: dare dimensione e una base.
8) I vettori (x,y,z) di R^3 tali che $2^{x+2y-z} = 2$ non formano un sottospazio: perché?
9) I vettori (x,y,z) di R^3 tali che $2^{x+2y-z+1} = 2$ formano un sottospazio? In caso affermativo determinare dimensione e una base.

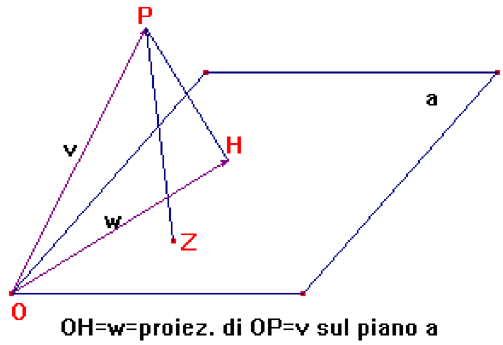
Prodotto scalare e spazi metrici.
Nello spazio vettoriale V sul campo degli scalari reali R si definisce prodottko scalare una funzione di VxV → R tale che per tutti i vettori **u, v, w** e per ogni scalare a si abbia;

a) **u.v = v.u**;
b) **u.(v+w) = u.v+u.w**;
c) **u**.(a**v**) = a(**u.v**);
d) se **u** $\neq$ **0** , **u.u** >0. (N.B. **0** è il vettore nullo, 0 è il numero zero).

Norma o modulo di un vettore è $|v| = \sqrt{v^2} = \sqrt{v.v}$ (la radice quadrata del suo quadrato scalare, si noti l'analogia col valore assoluto di un numero reale).
Si verifica che in R^n il prodotto scalare è la somma sei prodotti delle coordinate omologhe. Per esempio, se **u**=(1,2,3) e **v**=(4,-3,-2) , **u.v**= 1.4+2(-3)+3(-2) = -8; |**u**| = $\sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$ **.**
Due vettori si dicono ortogonali, se il loro prodotto scalare è zero. Per Esempio,in in R^2 sono ortogonali (2,3) e (3,-2); in R^3 sono ortogonali (a,b,c) e (c,c, -a-b), (1,3,4) e (6,2,-3), eccetera.
Proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio. Sia **v** un vettore di V, S un sottospazio. La proiezione ortogonale di **v** su S è il vettore **w** di S tale che **h** = **v – w** risulti ortogonale a tutti i vettori di S. Naturalmente basta controllare che **h** sia ortogonale ai vettori di base di S: infatti, se {$\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, … $\mathbf{s}_k$}è una base di S, ogni vettore **u** di S è loro combinazione lineare: **u** = $c_1\mathbf{s}_1+c_2\mathbf{s}_2+\ldots+c_k\mathbf{s}_k$ e quindi **h.u** = **h**.$(c_1\mathbf{s}_1+c_2\mathbf{s}_2+\ldots+c_k\mathbf{s}_k) = c_1(\mathbf{h}.\,\mathbf{s}_1)+\ldots+c_k(\mathbf{h}.\,\mathbf{s}_k) = c_1.0+\ldots+c_k.0 = 0$.



w proiezione ortogonale di v su r
Norma(PH)<Norma(PZ) per ogni punto Z di r, perciò per definizione Norma(PH)= distanza(P,r).



OH=w=proiez. di OP=v sul piano a
PH=v-w è ortogonale ad a e quindi a tutti i vettori di a. Per ogni punto Z del piano a il vettore PZ ha norma maggiore di PH. Norma(PH) è per definizione la distanza di P da a.

Esempio. Trovare la proiezione ortogonale di **v** =(3,1,-1) di R3 su S di equazione x+y+z = 0.
Una base di S è {(1,-1,0), (1,0,-1)}. Il generico vettore **w** di S è **w** = (a+b, -a, -b) e perciò **v – w** = (3-a-b, 1+a, -1+b). Impongo che **v – w** sia ortogonale a (1,-1,0) e (1,0,-1):

$$\begin{cases}(3-a-b,1+a,-1+b).(1,-1,0)=0\\(3-a-b,1+a,-1+b).(1,0,-1)=0\end{cases} \text{ da cui } \begin{cases}3-a-b-1-a=0\\3-a-b+1-b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b=2\\a+2b=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0\\b=2\end{cases} \text{ e quindi}$$

w = (a+b, -a, -b) = (2,0,-2).
Varietà lineari. Una varietà lineare L è l'insieme dei vettori che si ottengono sommando un vettore fissato **u** con tutti i vettori di un dato sottospazio S : L = **u** + S. S si chiama sottospazio direttore (direzione) di L. Due varietà lineari L ed L' si dicono parallele se la direzione di L è inclusa nella direzione di L' o viceversa. In R^2 le uniche varietà non banali sono quelle aventi come direzione i sottospazi di dimensione 1 : sono interpretabili come rette del piano. Due rette del piano sono parallele se hanno la stessa direzione. In R^3 abbiamo rette (di dimensione 1) e piani (di dimensione 2).
Per un piano di R^3, di equazione ax+by+cz+q=0, il vettore **n**=(a,b,c) è ortogonale al sottospazio direttore ax+by+cz=0 del piano. (E' evidente). Il vettore **n** si chiama **vettore normale** (al piano).
Due rette si dicono perpendicolari se i loro vettori direttori sono ortogonali.
Due piani si dicono perpendicolari se i loro vettori normali sono ortogonali.

Una retta e un piano si dicono perpendicolari se la direzione della retta è ortogonale a tutti i vettori del sottospazio direttore del piano e quindi se la direzione della retta è parallela alla normale al piano.
I vettori in tale contesto si chiamano anche **punti.**
Uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare diventa uno spazio metrico, quando si assuma come **distanza** di due punti P e Q la norma del vettore *differenza* Q-P, cioè del vettore che ha per componenti le differenze delle coordinate di Q e di P.
Esempi. ***Trovare*** la retta r per P(2,-1,0) parallela alla retta s di equazioni {x+y-7=0, x+y+2z=0}.
La direzione di s si ottiene da x+y=0, x+y+2z=0; S={t(1,-1,0)}, quindi r: x=2+t, y=-1-t, z=0 (equaz. Param.). Eliminando t ho le equazioni cartesiane di r: y = -1-x+2, z=0, ovvero x+y-1=0, z=0.
Determinare il piano β per P(3,1,-4) parallele al piano α: 2x+3y-5z+12356=0.
Equazione di β: 2(x-3)+3(y-1)-5(z+4)=0 → 2x+3y-5z -29=0.
Trovare le rette s per P(4,-2,-4) parallele al piano π: (x,y,z)=(5,7,4)+a(1,1,2)+b(2,-1,3).
Il sottospazio direttore H di π ha eq. param. x=a+2b, y=a-b, z=2a+3b. Eliminando i due parametri a e b ho b=a-y, x=a+2a-2y → a=(x+2y)/3, b=(x-y)/3, per cui H: z=(2x+4y)/3+x-y → 3z=5x+y ovvero H: 5x+y-3z=0. Le rette s richieste hanno eq. param. x=4+lt, y=-2+mt, z=-4+nt e il vettore direttore di s: (l,m,n) deve appartenere ad H: 5l+m-3n=0 → m=3n-5l. Equazioni parametriche delle rette s:
$\begin{cases} x = 4 + lt \\ y = -2 + (3n - 5l)t \\ z = -4 + nt \end{cases}$. Al variare della coppia *omogenea* di parametri (l,n) si hanno ∞^1 rette s (le rette s dipendono da un **solo parametro essenziale** perché l ed n non possono essere entrambi nulli).
Le rette s costituiscono un *fascio* di rette per P giacenti nel piano π' per P parallelo a π.
π': 5(x-4)+(y+2)-3(z+4)=0 → 5x+y-3z-30=0. (Verificarlo).
Determinare il piano passante per P(1,1,-3) e contenente la retta r : x+y+z+2=0, 2x-y-3z+5=0.
Suggerimento: fascio di piani di asse r : a(x+y+z+2)+b(2x-y-3z+5)=0, imporre il passaggio per P; si trova un'equazione da cui si ricava il rapporto a/b (o b/a).
Determinare i piani paralleli alla retta r : x+y+37=0, 2y-z=0 e passanti per il punto P(1,2,3). Verificare che formano un fascio di asse la retta s per P parallela ad r.
Calcolare la distanza del punto P(3,2,-1) dal piano π : x+2y-3z+4=0.
Posto in generale P(x_0, y_0, z_0) e π : ax+by+cz+q=0, verificare che la distanza che avete calcolato si può trovare anche con la formula $d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
Calcolare la distanza del punto P(4,1,0) dalla retta r: x+2y-4=0, 2x+y-z-1=0.
Suggerimento: ricavare le equazioni parametriche di r che esprimono le coordinate del generico punto H di r; imporre che il vettore PH sia ortogonale alla direzione di r; si determina così il vettore PH ortogonale alla retta e la sua norma è la distanza richiesta.
Determinare la retta r passante per P(1,1,), incidente e perpendicolare alla retta s di equazioni parametriche: x=t, y=3-2t, z=2+3t. (Vedi esercizio precedente).
Determinare la retta h incidente e perpendicolare alle rette r: x=a, y=2+3a, z=-1+2a ed s: x=y=z.
Suggerimento: prendere il generico punto R su r, S su s, imporre che il vettore RS sia ortogonale ad r e ad s, eccetera. Calcolate anche la norma di RS: che cosa rappresenta tale norma?