Ottavio Serra

Isometrie e affinità del piano.

1.) Traslazione. τ: **$\underline{r}'$ =$\underline{r}$ + $\underline{v}$** → { x' = x + x_0, y' = y +y_0,… z' = z+z_0.}.

Se s: ax+by+c=0 è una retta, s': a(x'-x_0)+b(y'-y_0)+c=0 e s' parallela ad s.

Verificare che **τ** è una isometria **O(0,0) → O'(**x_0, y_0) , P(x,y) → P'(x + x_0, y +y_0) e d^2(O'P') = $(x+x_0-x_0)^2+(y+y_0-y_0)^2 = x^2+y^2 = d^2$(OP). Idem in tre dimensioni. Quindi le traslazioni sono **isometrie** (dirette, cioè conservano le distanze e il verso di percorrenza del contorno di una figura).

Le **τ** formano un gruppo abeliano. Con notazione additiva **τ^{-1}** è **-τ** (la traslazione con vettore *opposto* –**v**.

2.) Rotazioni. Rotazione (piana) di un angolo θ intorno a O (0, 0):

x'=xcosθ-ysenθ, y'=xsenθ+ycosθ.

Le rotazioni intorno a C formano un gruppo abeliano;

se *R* =R (O, θ), R^{-1} = -*R* = R (O, - θ), R (O, α)R(O, β) = R(O, β+α), ecc.

Si noti che le rotazioni con *θ multiplo di* α *=2***π/n** costituiscono un sottogruppo di ordine n, la rotazione nulla *(neutra)* è quella di angolo 2π (congruo a 0).

Le rotazioni sono *isometrie dirette.* Intanto il centro O (in generale C, cui si può giungere con una traslazione) è punto fisso e si verifica facilmente che d(OP') = d(OP).

NOTA. Componendo una rotazione con una traslazione, si ottiene una isometria, perché …

3.) Omotetie. Un'omotetia (non degenere) ω di centro C (x_0, y_0) è una corrispondenza biunivoca P → P' tale che: C è fisso, P e P' allineati con C, e per ogni altra coppia Q, Q' di punti corrispondenti, P'Q' è parallela a PQ. **Equazioni**: x'=x_0+k(x-x_0), y=y_0+k(y-y_0). Senza perdere in generalità, si può pensare C=O, per cui x'=kx, y'=ky. (k≠0). Le omotetie di centro O (C) formano un gruppo abeliano ω^{-1}(O, k) = ω(O,1/k). Sono particolari similitudini (dirette) di rapporto k. Composte con isometrie formano il gruppo delle similitudini dirette. **Equazioni (C=O):**

(x',y')=τ°R°ω(x,y) = τ°R(kx,ky)= τ(kxcosθ-kysenθ, kcsenθ+kycosθ)=

(kxcosθ-kysenθ+x_0, kcsenθ+kycosθ+y_0), essendo (x_0, y_0) il vettore di τ.

4.) Simmetrie assiali nel piano.

(Le simmetrie centrali **nel piano sono rotazioni** di un angolo piatto).

Se r è una retta del piano la simmetria (ortogonale) di asse r, σ_r, è così definita: se P' = σ_r,(P), allora il punto medio M(P, P') sta su r è PP' è perpendicolare ad r.

Casi particolari

1: r parallela all'asse x, y=b; allora **x'=x, y'=2b-y.**

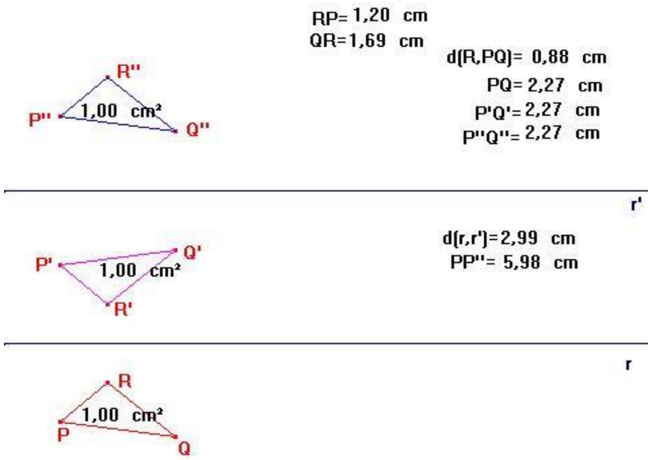
2: r parallela all'asse y, x=a; allora **x'=2a-x, y'=y.**

3: l'asse è y=x; allora **x'=y, y'=x.**

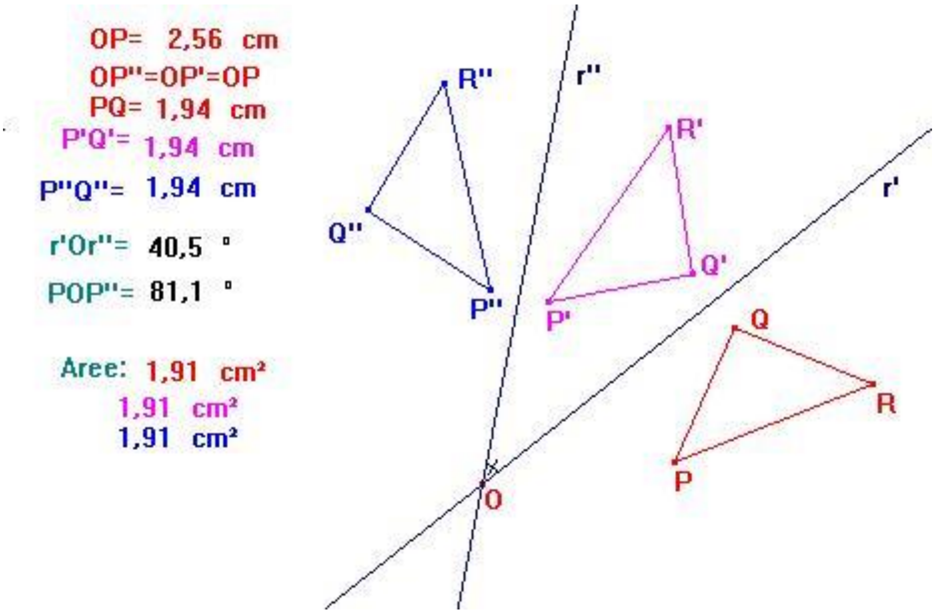
4: l'asse è y=-x; allora **x'=-y, y'=-x. Verificare.**

Le simmetrie assiali *non formano gruppo*. Sono isometrie indirette (scambiano il verso di circo-circolazione sul bordo). Sono ***involutorie*** σ^{-1}= σ. La composizione di due simmetrie assiali ad assi paralleli è una traslazione, ad assi incidenti è una rotazione. Vedi figure seguenti.

Dimostrarlo per via geometrica.



La composta $\sigma_{r'} \circ \sigma_r = \tau_{\mathbf{v}}$, essendo **v** il vettore ortogonale ad r, di modulo 2d, distanza tra r ed r', diretto verso r'. Infatti, detta a la distanza di P da r, b quella di P' da r', PP'=2a, P'P''=2b e PP''=2(a+b)=2d.



La rotazione composta ha centro O e angolo di rotazione θ=2*angolo tra r' ed r''.
Si noti che componendo due simmetrie assiali, isometrie indirette, si ottiene una isometria diretta;
In generale, componendo un numero pari di simmetrie assiali si ha una isometria diretta, componendone un numero dispari si ottiene una isometria indiretta.
NOTA. Le rotazioni e le omotetie di centro O, le simmetrie assiali con asse passante per O, sono un casi particolare di trasformazioni lineari del piano in sé che conservano il parallelismo di coppie di rette parallele e lasciano fisso O, le simmetrie hanno inoltre l'asse come luogo di punti fissi. Esse perciò sono rappresentabili con matrici (2x2) le cui colonne rappresentano i corrispondenti dei vettori di base **i** = (1, 0) e **j** =(0,1).

Matrice della rotazione: $\begin{pmatrix} \cos\theta, -sen\theta \\ sen\theta, \cos\theta \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta, -sen\theta \\ sen\theta, \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, [righe x colonne, ovvio.].

Matrice dell'omotetia: $\begin{pmatrix} k, 0 \\ 0, k \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k, 0 \\ 0, k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

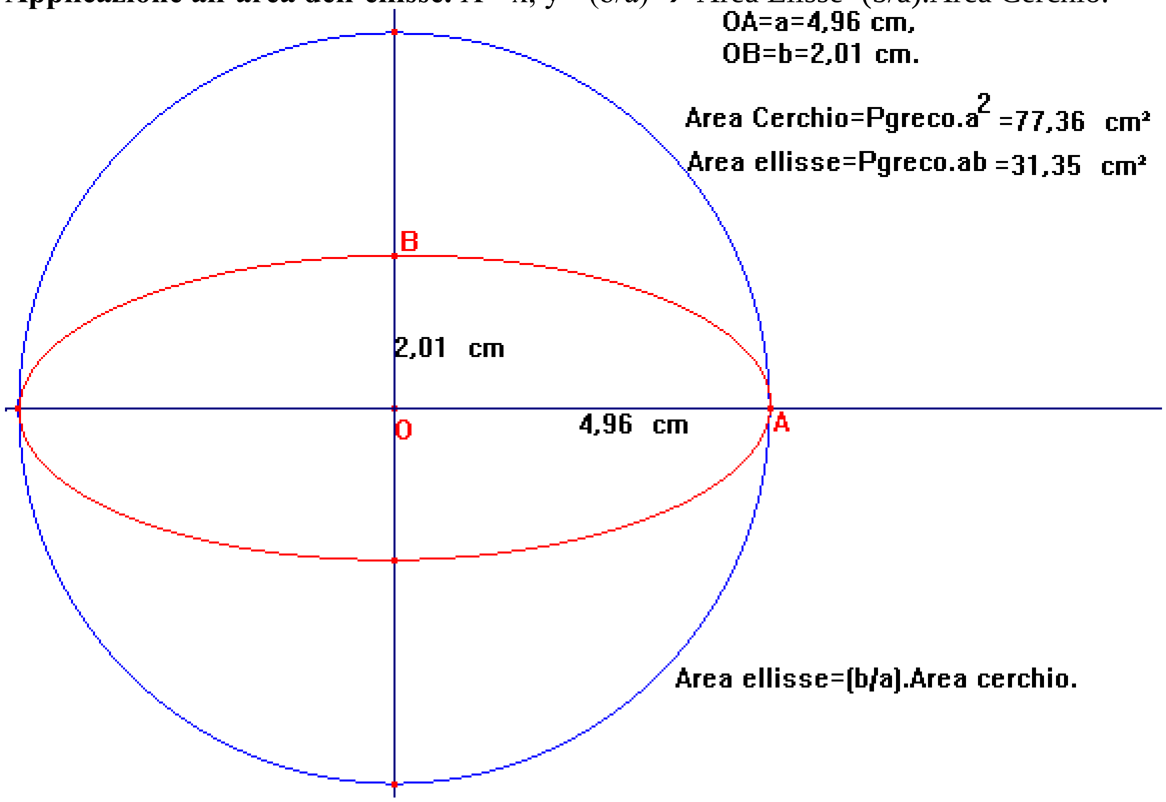
Matrice della simmetria assiale, con asse y=mx: $\begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2}, \frac{m^2-1}{1+m^2} \end{pmatrix}$. Verificare con la definizione.

Dimostrare con le matrici che, componendo due simmetrie assiali con assi incidenti in O, si ottiene una rotazione di centro O e angolo…?

Similitudini. Componendo una isometria con una omotetia si ottiene una similitudine. Se tra i "fattori" c'è una simmetria assiale, la similitudine è indiretta.

Affinità parallela all'asse y: x'=x, y'=hy. Matrice: $\begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,h \end{pmatrix}$. Non è una isometria, né una similitudine, le aree sono moltiplicate per h (verificare con un conveniente triangolo).

Applicazione all'area dell'ellisse. X'=x, y'=(b/a) → Area Elisse=(b/a).Area Cerchio.



Osservazione. Il cerchio è un'ellisse con i semiassi uguali: b=a. Siccome la formula per l'area dell'ellisse generalizza quella del cerchio, si potrebbe i*nferire*, per analogia con L(circonferenza)=π(a+a), che la lunghezza dell'ellisse sia L(ellisse)=π(a+b). Dimostrare in modo elementare, utilizzando un caso limite, che ciò è **falso**.

Trasformazione lineare $T = \begin{pmatrix} a,b \\ c,d \end{pmatrix}$ con ad-bc≠0. Verificare che T trasforma una figura (piana) F in una figura F' con Area(F') = |Det(T)|.Area(F); T è un'equivalenza se |Det(T)|=1, è un'isometria se ab+cd=0 e $a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1$. (Matrice unitaria o ortogonale).