Ottavio Serra

Principio di induzione . Coefficienti binomiali. Serie geometrica.

a) Principio di induzione infinito-numerabile o principio di Peano. “Se la proprietà P è vera per k $\in$ ***N*** e se, essendo vera per n, è vera per n+1, allora P è vera per ogni n>k. (k può essere zero). **[P(k) $\wedge$ P(n)$\Rightarrow$P(n+1)] $\Rightarrow$[($\forall$ n>k) P(n)].**

Esempi.

1) Dimostrare che 1+2+…n $=\dfrac{n(n+1)}{2}$ **.**

2) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$.

4) *Ragionamento del tacchino*. Sembra che se al prodotto dei primi n numeri primi si sommi 1, si ottenga ancora un numero primo. Verificare che ciò è vero per n=1, n=2, n=3, n=4:

Per n=1, 2+1=3: primo;

per n=2, 2.3+1=6+1=7: primo;

per n=3, 2.3.5+1=30+1=31: primo;

per n=4, 2.3.5.7+1=210+1=211: primo.

Ce la sentiremmo di concludere che la proprietà è vera per ogni n? Il tacchino direbbe di sì; e voi? Se per n=4 fossimo giunti a una conclusione falsa, la proprietà sarebbe falsa, ma ora come facciamo? Non credo che qui si possa applicare il principio di Peano.(La proposizione predente è falsa: verificare che 2.3.5.7.11.13+1 è composto).

Del resto, ci sono proposizioni aritmetiche molto semplici da enunciare, che, a tutt’oggi, sono indecise (e forse indecidibili): (a) ogni numero pari è somma di due numeri primi?, (b) esistono infinite coppie di numeri primi *gemelli?* (numeri primi la cui differenza è 2, come 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19), esistono o non esistono numeri *perfetti* dispari? (un numero si dice perfetto se è somma di tutti i suoi divisori, 1 incluso, come 6, 28,…),....

Alcune proposizioni aritmetiche, altrettanto semplici da enunciare, sono state dimostrate con mezzi matematici elevati. (a) ogni numero naturale è somma, al più, di quattro quadrati (Poincaré, fine del XIX° secolo), (b) l’equazione *pitagorica* $x^n+y^n=z^n$ non ammette soluzione co terne x,y,z di numeri naturali, se n>2.

5) Il principio di induzione di Peano serve a confermare (o a rigettare) una proprietà ipotizzata, ma non ci dice nulla sul modo di arrivare a quella proprietà. Una via per arrivare alla **1)** è la seguente:

S=1+ 2+ 3+… +(n-2)+(n-1)+n ; per la proprietà commutativa si può scrivere:

S=n+ (n-1)+ (n-2)+…+ 3+ 2+ 1 , per cui, sommando, 2S=(1+n).n , donde la tesi.

Verificare che la **2)** si ricava sommando i cubi di (0+1), (1+1), (2+1), (n+1) e utilizzando la **1).**

Analogamente la **3)** si ricava sommando le quarte potenze e utilizzando la **2)** e la **1)**.

6) Verificare o rigettare la seguente formula: $1^4+2^4+\ldots+n^4 = n^4.(n-1)+1$.

7) Calcolare i seguenti limiti per n$\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}.$$

N.B. Applicare le formule precedenti e poi il ***Teorema di Paperone*** : Se n $\to\infty$, gli **Infiniti** di grado minore sono trascurabili rispetto a quelli di grado maggiore (es. $\lim_{n\to\infty}(9n^2+151n^3-n^4)=-\infty$), che a sua volta discende dal ***teorema di Paperino*** : $\lim_{n\to\infty}\dfrac{8miliardi}{n}=0$.

8) Per n $\to\infty$ i limiti dei quozienti sono facili. Calcolare ora i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+\sqrt{n^2-8n+1}\right),\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+16}\right),\ \lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+3n+16}\right),\ \lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^4-13n^3-16n}\right).$$

b) Calcolo combinatorio e coefficienti binomiali.

1) Disposizioni (semplici) di n oggetti di classe k (a *k* a *k*): sono le sequenze ordinate di k oggetti distinti scelti da un insieme di n oggetti. Il loro numero è $D_{n,k}$ = n(n-1).(n-2). … .(n-k+1), **k≤n.**

Disposizioni con ripetizione (un oggetto può essere ripetuto). Il loro numero è $D^r_{n,k} = n^k$. **Questa volta k può superare n.**

Esempi: $D_{3,2}$ =3.2=6; infatti sia {a,b,c} l'insieme di 3 oggetti e prendiamoli a 2 a 2 : (a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b). Invece le disposizioni con ripetizione sono 3^2=9, perché, oltre alle precedenti, ci sono le disposizioni *ripetute* (a,a), (b,b), (c,c).

In generale, due disposizioni si considerano diverse se differiscono per l'ordine o per almeno un elemento.

Se k = n, le disposizioni semplici sono $D_{n,n}$ = n.(n-1). … 2.1 =n! (Permutazioni Pn di n oggetti).

2) Combinazioni semplici di n oggetti di classe k sono i sottoinsiemi di k oggetti ciascuno da un insieme di n oggetti. (l'ordine non conta). Permutando in ciascun sottoinsieme i k oggetti, si ottengono le disposizioni, perciò k!.$C_{n,k}$= $D_{n,k}$ da cui

[1] $C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{k!} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$. Si osservi la proprietà di simmetria $C_{n,k} = C_{n,n-k}$.

Siccome $C_{n,n}$ =1, volendo che la [1] sia sempre valida, occorre porre $C_{n,0}$ =1 e di conseguenza 0! =1.

I coefficienti $C_{n,k}$ si indicano anche con $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ e si chiamano coefficienti binomiali.

Combinazioni con ripetizione $C^r{}_{n,k} = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$. (Dimostrarlo è complicato).

Esercizio, Dimostrare la relazione $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}$ (Formula di Tartaglia).

Applicazione allo sviluppo del binomio:

$(a+b)^n=(a+b).(a+b)….(a+b) = a^n+na^{n-1}b+n(n-1)/2.a^{n-2}b^2+… +nab^{n-1}+b^n$.

I coefficienti numerici delle potenze di a e di b sono i coefficienti binomiali e perciò

[2] $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k}$.

Nota. Si pone 0! = 1; sapreste dire perché? Questa fa il paio con a^0 =1.

c) Progressione e serie geometrica.

Sia data la successione di numeri reali $a_1, a_2, \ldots a_k, a_{k+1}, \ldots a_n$, con $a_{k+1} = q.a_k$. Segue che

[1] $\mathbf{a_n=a_1.q^{n-1}}$.

1) Verificare che, se q≠1, posto $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (***sommatoria***), risulta

[2], $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$. (Fare $S_n - q.S_n$ e utilizzare la [1]. Somma di una progressione geometrica).

In particolare, se $|q|<1$,

[3] $\lim_{n\to\infty} S_n = S = a_1 \dfrac{1}{1-q}$.

Per esempio, per q=1/2 (e a_1=1), $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$, per q=1/3, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{3}{2}$.

La [3] si può giustificare per via cinematica (si pensi ad Achille e alla tartaruga).

2) Si dimostra che, se α>1, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ è convergente, cioè il suo limite è finito. (Si può dimostrare per confronto con un integrale improprio o in altri modi). Verifichiamo ora in modo elementare che, se α=1, la serie (detta armonica) diverge positivamente (tende a +∞).
Infatti, 1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8+…=1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+1/8)+…poi si associno 8 addendi, poi 16, poi 32 e così via e si osservi che in ogni parentesi la somma degli addendi supera ½; perciò la somma della serie armonica supera la somma di infiniti addendi uguali a ½ ed è perciò infinita. A maggior ragione, se α < 1, la serie diverge positivamente.

3) Verificare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ è convergente. (Confrontare con una serie geometrica opportuna).

4) Verificare che la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Log_2(n)}$ diverge (a +∞). (Logaritmi in base 2)

5) Che fa la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Log_{\frac{1}{2}}(n)}$? (logaritmi in base ½).