Ottavio Serra
Problemi di riepilogo

1.

Secondo quesito del questionario, sessione ordinaria del 2011, corso di ordinamento.

"Si trovi il punto della curva

$$y = \sqrt{x}$$

più vicino al punto di coordinate (4, 0)" .

In questo caso si tratta preliminarmente di costruire la funzione "distanza tra il punto A(4, 0) e il generico punto P(x, y) della curva:

$$h(x) = d^2(x) = (\overline{AP})^2 = (x-4)^2 + (\sqrt{x}-0)^2 = x^2 - 7x + 16$$

(Poiché la distanza è non negativa, essa è minima se e solo se lo è il suo quadrato).

Siccome h(x) è una funzione quadratica, il suo minimo si ha nel vertice della parabola (non c'è bi sogno di scomodare le derivate): si trova x = 7/2. Il punto P è perciò

$$P\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

e la minima distanza da A è

$$d\left(\frac{7}{2}\right) = \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 16} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Un modo alternativo di procedere è il seguente. Se P è il punto della curva di minima distanza da A, la retta AP deve essere perpendicolare alla tangente in P alla curva. Detta a l'ascissa di P, il coefficiente angolare della tangente alla curva in P è $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ e il coefficiente angolare della normale

$-2\sqrt{a}$,

é

perciò l'equazione della normale alla curva in P è

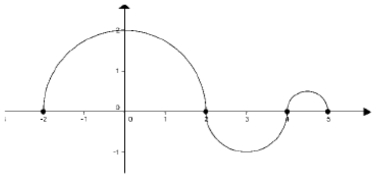
$$y - \sqrt{a} = -2\sqrt{a}(x-a).$$

Imponendo che passi per A(4, 0), si ottiene a=7/2, e si ritrovano i risultati precedenti.

2.

Problema 1 della sessione ordinaria 2010, corso sperimentale (PNI).

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \le x \le 5$ essendo g la derivata di una funzione f. Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in (0, 0), (3, 0), ($\frac{9}{2}$, 0) e raggi rispettivi 2, 1, $\frac{1}{2}$.



a) Si scriva un'espressione analitica di *g(x)*. Vi sono punti in cui *g(x)* non è derivabile? Se sì, quali sono? E perchè?

b) Per quali valori di x, $-2 < x < 5$, la funzione f presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.

c) Se $f(x) = \int_{-2}^{x} g(t)\,dt$, si determini $f(4)$ e $f(1)$.

d) Si determinino i punti in cui la funzione f ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di $f(x)$? Qual è l'andamento qualitativo di $f(x)$?

Si possono sviluppare i 4 punti del problema conoscendo solo i concetti di derivata e integrale, senza bisogno di adoperare le tecniche del calcolo infinitesimale Non è il caso di sparare a cannonate sui passeri! Vediamo ora i quattro punti.

a) Si tratta di raccordare tre semicerchi:

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2\\ -\sqrt{-8+6x-x^2}, 2\le x\le 4\\ \sqrt{-20+9x-x^2}, 4\le x\le 5\end{cases}$$

La funzione g è non derivabile nei punti di ascissa -2, 2, 4, 5 in cui la tangente al grafico è verticale.

b) La funzione f(x) rappresenta un'area con segno, perciò f(x) ha un massimo relativo per x=2, un minima relativo per x=4. [f(2)=2π, f(4)=2π-π/2=3π/2. [Si tratta di sommare aree di semidischi con segno].

La g(x) è zero anche nei punti estremi x=-2 e x=5, perciò anche in tali punti f(x) ha tangente orizzontale. Si noti che f(x) ha il minimo assoluto per x=-2: f(-2)=0, il massimo assoluto è invece il massimo relativo f(2)= 2π, perché f(5)= 3π/2+π/8=13π/8.

c) f(4) è l'area del primo semidisco (positivo) meno il secondo semidisco (negativo perché al di sotto dell'asse x), perciò f(4)= 3π/2. Per calcolare f(1) non c'è bisogno di integrali (vedi fig. sottostante).

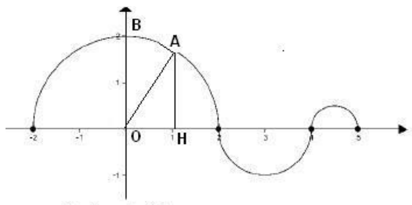
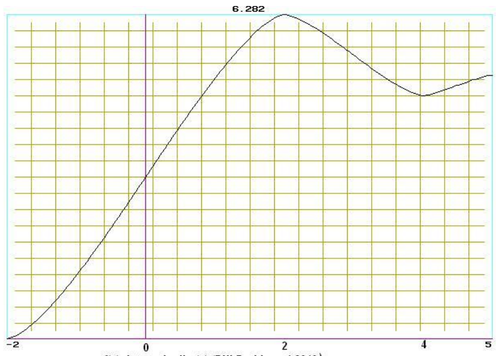


Grafico di g(x)

f(1) è somma del quadrante di sinistra del primo semidisco (di raggio 2) più il trapezoide OHAB. Quest'ultimo è somma del settore circolare OAB il cui angolo al centro é di 30° (perché?) e perciò ha area 4π/12=π/3 e del triangolo OHA la cui area è $\frac{\sqrt{3}}{2}$. In definitiva

$$f(1)=\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

d) I punti in cui f(x) ha derivata seconda zero sono quelli di massimo o minimo per g(x), cioè x=0, x=3, x=9/2. (Punti di flesso per f). Il segno di f(x) è positivo in tutto l'intervallo [-2,5], perché il semidisco negativo (il secondo) è minore del primo in valore assoluto. L'andamento di f(x) è il seguente:



f(x)=Integrale di g(x) (PNI Problema1 2010)

3.

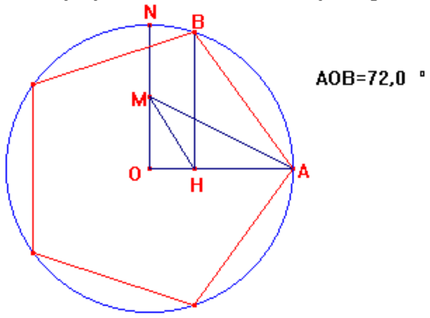
Propongo ora un bel quesito di geometria:

"*Costruire (con riga e compasso) il lato del pentagono regolare inscritto in un cerchio*", seguendo un interessante procedimento proposto da Piergiorgio Odifreddi su "Le Scienze", marzo 2012.

Dato un cerchio di centro O e raggio OA (che si può assumere uguale a uno: perché?), si costruisce il raggio ON perpendicolare a OA, si prende il punto medio M di ON, si traccia la bisettrice dell'angolo AMO che interseca OA in H, si traccia la perpendicolare a OA in H che interseca il cerchio in B. Dico che AB è il lato del pentagono inscritto nel cerchio.

Come si dovrebbe sapere, tutte le costruzioni indicate si possono effettuare con riga e compasso. Ora si tratta di procedere alla dimostrazione. E' chiaro che se AB è il lato del pentagono regolare, esso deve essere visto da O sotto un angolo di 1/5 di giro, cioè di 72° (Vedi figura sottostante).

Costruzione del pentagono regolare
ON perpend. ad OA, M punto medio di ON, MH bisettrice
di AMO, HB perpend. ad OA. AB lato del pentagono.



Nota: BN é il lato dell'icosagono regolare.

Ottavio Serra

Per dimostrare che AB è il lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio in figura, occorre procedere secondo i seguenti passi:

1° Calcolare OH e HA; **prerequisito**: il teorema della bisettrice *La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali ai rimanenti lati*. Sapreste dimostrarlo?

2° Calcolare HB dal triangolo rettangolo OHB; (assunto uguale a 1 il raggio del cerchio, OB=1).

3° Calcolare AB.

4° Verificare che l'angolo AOB è 1/5 di angolo giro, calcolandone il coseno col teorema di Carnot applicato al triangolo AOB; prerequisito: in un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 36°, la base è la sezione aurea del lato obliquo; da qui ricavare il seno di 18° che è uguale al coseno di 72°=1/5 di giro.

Si sarebbe potuto procedere diversamente? Certamente, costruita la sezione aurea del raggio, con il noto metodo seguito da Euclide negli *Elementi*, essa è il lato del decagono regolare; basta poi congiungere alternativamente i vertici del decagono per ottenere il pentagono.

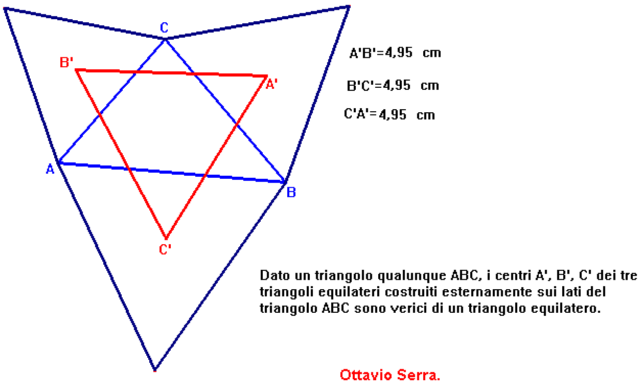
Nota: Sapreste costruire (sempre con riga e compasso) il poligono regolare di 15 lati? (non propongo quello di 8 o di 12 o di 16 lati, perché si procede banalmente per bisezione; né quello di 7, 9, 11 o 14 lati, dopo che Gauss e Wantzel hanno dimostrato che ciò è impossibile).

(Che cosa hanno dimostrato Gauss e Wantzel ?).

4.

Un altro bel problema di geometria è quello che va sotto il nome di "Teorema di Napoleone":

Dato un triangolo qualunque ABC, si dimostri che i centri dei tre triangoli equilateri costruiti esternamente sui lati di ABC sono vertici di un triangolo equilatero. (Vedi figura seguente).



Si proceda così: detti A', B', C' i centri dei triangoli costruiti rispettivamente su BC, CA, AB, si calcoli A'B' in funzione dei lati a, b, c del triangolo ABC e si faccia vedere che A'B' è espresso in modo *simmetrico* rispetto ai lati a, b, c. (Applicare il teorema del coseno al triangolo A'CB'). Detto γ l'angolo ACB, quanto vale l'angolo A'CB'?

5.

Per non parlare solo di geometria, propongo ora alcuni quesiti aritmetici assegnati alcuni anni fa all'esame di ammissione alla "*Normale*" di Pisa.

5a. *Si immagini la successione dei numeri naturali colorati nel modo seguente: 1 Rosso, 2 Verde, 3 e 4 Rossi, 5 e 6 Verdi, 7, 8 e 9 Rossi, 10, 11 e 12 Verdi e così via, quattro numeri Rossi e quattro Verdi, cinque Rossi e cinque Verdi, eccetera. Si chiede il colore del numero 1000000 (un milione).*
Se non vedete subito la risposta, continuate la sequenza, cercate qualche regolarità, avanzate una congettura. Provate la congettura sui numeri già scritti (colorati), poi dimostratela, se è corretta, col principio di "*induzione "completa" di Peano"*. Di che colore sarà mille miliardi? Generalizzate il problema: come calcolare il colore del generico numero n? (queste ultime due domande le ho aggiunte io).

5b. *Quali sono le ultime quattro cifre di* 5^{3129}*?*
Non provate a calcolare la potenza, viene un numero gigantesco (di 2188 cifre: controllate). Procedete così: per esponente >0 l'ultima cifra è sempre 5, per esponente >1 le ultime due sono 25, e poi … Come si alternano le ultime tre cifre? Andate avanti. Se avete intuito una regolarità, dite con quale periodicità si ripetono le ultime 4 cifre. Ora siete in grado di rispondere al quesito. (In realtà il quesito proposto alla Normale era più complicato: trovare le ultime 6 cifre).
Risolvete il quesito analogo: determinare le ultime due cifre di 3^{5297}.

6. Un quesito di trigonometria. *Calcolare 10000.sen(36°).sen(72°).sen(108°).sen(144°)*, ovviamente senza usare la calcolatrice. L'unico prerequisito è conoscere il teorema che dice: "La base di un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 36° è la sezione aurea del lato obliquo". Ciò consente di calcolare il sen(18°) e il resto segue facilmente.

7.

Un quesito di trigonometria. *Calcolare 10000.sen(36°).sen(72°).sen(108°).sen(144°)*, ovviamente senza usare la calcolatrice. L'unico prerequisito è conoscere il teorema che dice: "La base di un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 36° è la sezione aurea del lato obliquo". Ciò consente di calcolare il sen(18°) e il resto segue facilmente.

8. Un bel problema è il seguente: Calcolare il **massimo** e il minimo della grandezza
z=105X - 208Y+ 103, sotto il vincolo $X^2+Y^2=1$.
Come dice Polya, **generalizzare per semplificare**. Studio z = aX+bY .
Considerato il fascio di rette parallele aX+bY=k, k sarà il massimo o il minimo di g(X,Y) per le due rette del fascio tangenti al cerchio di equazione $X^2+Y^2=1$. Verificare che il massimo di z è

$$\max = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e il minimo è $-\max$.
Applicare a min e max di 105.Cosx(x) - 208.Sen(x)+103.