Ottavio Serra

Elementi di teoria delle probabilità

a) La probabilità di un evento è una misura normalizzata.

Ciò vuol dire che, fissato un insieme (misurabile) S, che chiameremo spazio degli eventi, e detto "evento" un sottoinsieme E di S, porremo $p \equiv p(E) = \dfrac{m(E)}{m(S)}$, essendo m una misura non negativa.

La misura m può essere un'area, o un volume, o un numero naturale se lo spazio S consta di un numero finito di elementi, nel qual caso assumeremo come m(E) il numero degli elementi che stanno in E. In ogni caso il numero (probabilità) di E è un numero (reale) compreso tra 0 e 1: in questo senso si parla di misura normalizzata.

Esempi:

1) sia S l'insieme dei possibili risultati del lancio di un dado (*simmetrico*, cioè non truccato), E l'evento "esce una faccia con numero minore di 5". Allora p(E)=4/6 = 2/3.

2) p("esce un numero primo e pari") = p("esce 2") =1/6.

3) Se l'evento è: E ="esce un numero primo o pari"= {2,3,4,5,6}, p =5/6. Nota: 1 non è considerato primo.

4) Se l'evento è: E ="lanciando due dadi, la somma dei numeri uscenti è 6", la probabilità di E dipende dalla misura che intendiamo adottare sull'insieme delle coppie di numeri.

Prima misura: distinguiamo due coppie se differiscono per l'ordine o per almeno un elemento. In tal caso lo spazio degli eventi consiste di tutte le coppie ordinate di numeri tra 1 e 6, cioè delle disposizioni con ripetizione di 6 elementi di classe 2 e perciò m(S)=6^2 = 36. Infatti S ={(1,1), 1,2),(2,1), … (6,6)}. E = {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}e quindi **p(E) =5/36**.

Verificare che la probabilità è massima per l'evento: "la somma delle facce è 7".

Seconda misura: si può anche decidere di non tener conto dell'ordine. In tal caso il numero delle coppie di S è il numero delle combinazioni con ripetizione di 6 elementi di classe 2 e perciò m(S) = numero delle combinazioni semplici + numero delle coppie di elementi uguali: m(S) = 15+6 =21.

Si ricordi anche la formula $C^{rip}(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$ che nel nostro caso ci dà

$$C^{rip}(6,2) = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21.$$

Ora E ={(1,5), (2,4), (3,3)}, m(E)= 3 e p(E) =3/21 =1/7. Con questa misura si ottiene la stessa probabilità sia che la somma delle facce dia 6, oppure 7, oppure 8.

NOTA. La scelta della misura nei casi concreti dipende da una teoria sottostante. Per esempio, se gli oggetti sono dadi o altre particelle macroscopiche, e quindi distinguibili, si devono usare le disposizioni con ripetizione, ma se sono "bosoni" come atomi di elio o fotoni, particelle indistinguibili, si devono usare le combinazioni con ripetizione. Ancora diverso è il caso degli elettroni, che, oltre ad essere indistinguibili, sono "*fermioni*" e quindi obbediscono al principio di esclusione di Pauli: si devono usare le combinazioni semplici.

b) Proprietà. Utilizzando un modello insiemistico, sono evidenti le seguenti proposizioni:

1° p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B); Spiegare a livello intuitivo.

2° p(A/B) = $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ La probabilità di A *condizionata* al verificarsi di B è la probabilità della parte di A inclusa in B, diventa il nuovo spazio degli eventi. Per simmetria p(B/A) = $\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$ e quindi

$$p(A\cap B)=p(B).p(A/B)=p(A).p(B/A).$$

Se accade che p(A/B) = p(A), si dice che A è indipendente da B (in senso probabilistico). In tal caso $p(A\cap B)=p(B).p(A)$ e quindi anche B è indipendente da A. A e B si dicono **indipendenti.**

3° Se A_1, A_2, … A_n, … è una successione di eventi incompatibili (cioè a due a due disgiunti), allora

$$p(\bigcup_{k\in N}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}p(A_k)$$ (**additività numerabile**).

La probabilità dell'unione numerabile di insiemi disgiunti (cioè di eventi incompatibili) è la somma della serie delle singole probabilità. E' chiaro che la serie deve convergere a un numero (*non negativo e non maggiore di 1*).

4° Se due eventi A e B sono incompatibili, cioè se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro, e inoltre sono complementari (uno dei due si deve verificare), allora p(A)+p(B)=1.

[p+q=1]

Esempio1. In un'urna ci siano 7 gettoni bianchi e 3 neri. Se riteniamo che ogni gettone ha la stessa probabilità di essere estratto, (distribuzione *uniforme*) allora p=p(bianco)=7/10 e a q=p(nero)=3/10.

p+q=1. Se però nell'urna ci sono anche 8 gettono rossi, p+q= 7/18+3/18 = 10/18 <1.

Esempio2. Un tiratore ha probabilità p=0,7 di colpir il bersaglio: che probabilità ha di colpire almeno una volta in 3 tiri? Si supponga che gli eventi "colpisce al 1° tiro", "colpisce al secondo", eccetera siano indipendenti.

I Metodo: detta q la probabilità di non colpire (p+q=1 → q= 1-0,7 = 0.3), si ha

P(almeno una volta su 3) = (pqq+qpq+qqp)+(ppq+pqp+qpp)+(ppp) = $3(pq^2)+3(p^2q)+p^3$ =0,973

II Metodo: P(almeno una volta su 3) = 1 – P(nessuna volta) = 1- $(0,3)^3$ = 0,973.

(Meglio il secondo metodo!).

Quanti tiri occorrono perché la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta superi il 90%?

Esempio2 bis. Il tiratore spara al bersaglio finché lo colpisce. La probabilità che ciò accada all'n° tentativo è $P_n=p+qp+q^2p+\ldots+q^{n-1}p=p(1-q^n)/(1-q)=1-q^n$. Se tira a oltranza, P →1 (intuitivo).

Esempio3. Lanciando due dadi i risultati vanno da 2 (=1+1) a 12 (=6+6). La somma 7 è la più probabile: come mai? Il primo a dare una giustificazione fu Galilei. (Si intende, dadi non truccati).

Nel gioco della "Zara" (ricordato da Dante nel VI° canto del Purgatorio) si lanciano tre dadi: quali sono le somme più probabili?

Esempio4. Due amici ugualmente bravi a briscola (o scopa) puntano somme uguali con l'accordo che vince l'intera posta chi per primo arriva a 5 vittorie. Le mogli però li interrompono quando il primo ha vinto 4 partite e il secondo 3. Come devono dividersi la posta? (Problema proposto dal cavaliere de Mèray a Pascal). Suggerimento: il primo vince il torneo se impedisce al secondo di vincere due partite consecutive: P(primo) = p+qp, P(secondo) = qq. Siccome p=q=1/2,

P(primo) =3/4 e P(secondo) = ¼, perciò la posta va divisa nella proporzione di 3 ad 1.

Esempio5. Qual' è la probabilità di fare ambo alla ruota di Napoli? I numeri sono 90 e se ne estraggono 5 perciò lo spazio degli eventi è $C_{90,5}=\binom{90}{5}=\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}$. I casi favorevoli sono dati da quelle cinquine che contengono i numeri puntati, tolti i quali gli altri 3 possono essere qualunque, dunque i casi favorevoli sono $C_{88,3}=\binom{88}{3}=\frac{88.87.86}{1.2.3}$ e

P(ambo)= $\frac{88.87.86}{1.2.3}.\frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86}=\frac{4.5}{90.89}=\frac{2}{9.89}=\frac{2}{801}$.

Esercizio. Calcolare le probabilità P(terno), P(quaterna), P(cinquina).

Esempio6. Totocalcio. Supponendo di trascurare il fattore campo e la forza delle squadre, siccome ogni partita ha 3 risultati : 1, x, 2, la probabilità di azzeccare un risultato è p=1/3 e di sbagliarlo è perciò q= 2/3. La probabilità di imbroccare k risultati su 13 sarà P(k su 13)= $\binom{13}{k}(1/3)^k(2/3)^{13-k}$.

Verificare che $\sum_{k=0}^{13}\binom{13}{k}(1/3)^k(2/3)^{13-k}=1$.

Qual è la probabilità di fare almeno un punto sulla schedina? E di fare meno di 3 punti?

E' più probabile fare 0 punti o 13 punti?

Esempio7. Lanciando una moneta 10 volte (è lo stesso che 10 monete in una volta), qual' è la probabilità di ottenere esattamente 3 teste? E quella di ottenere almeno 3 Teste?.

E' più probabile ottenere 10 Teste su 10 lanci, oppure 5 Teste seguite da 5 Croci?

Qual è la probabilità di ottenere 5 Teste e 5 Croci, se si prescinde dall'ordine?

Esempio8. Si estraggono successivamente da un sacchetto contenente a palline azzurre ed r palline rosse due palline. La pallina estratta **non viene** rimessa nel sacchetto.

Si considerano gli eventi 1^aA=Prima estratta è azzurra, 2^aA=Seconda estratta è azzurra, e così via. Le varie probabilità sono:

$P(1^a A)=\frac{a}{a+r}$,

$P(1^a A\cap 2^a A)=P(2^a A/1^a A).P(1^a A)=\frac{a}{a+r}.\frac{a-1}{a+r-1}$,

$P(1^a A\cap 2^a R)=P(2^a R/1^a A).P(1^a A)=\frac{a}{a+r}.\frac{r-1}{a+r-1}$,

$P(2^a A)=P(2^a A/1^a A).P(1^a A)+P(2^a A/1^a R)=\frac{a}{a+r}.\frac{a-1}{a+r-1}+\frac{r}{a+r}.\frac{a-1}{a+r-1}=\frac{a-1}{a+r-1}$.

risultato a cui si poteva arrivare direttamente.

Il calcolo delle probabilità è nato dai giochi d'azzardo, ma ha applicazioni *serie* in statistica, economia, analisi matematica, fisica. Di un'applicazione in analisi matematica, al calcolo di un integrale (di un'"*area*"), parleremo più avanti (Metodi *Monte Carlo*); qui darò un assaggio delle applicazioni alla meccanica statistica. Supponiamo di avere due particelle: molecole, fotoni, elettroni, e tre celle (stati quantici) in cui si possono disporre. Se le particelle sono *distinguibili*, come molecole a b (marcabili con un nucleo radioattivo), ho 9 possibili distribuzioni: *le disposizioni con ripetizione* di 3 elementi (le celle) a 2 a 2 (le particelle); ciò conduce alla statistica che impiegarono Boltzmann e Maxwell per interpretare la termodinamica in termini statistici (2° principio, entropia, ecc.). Se però le particelle sono indistinguibili in linea di principio, come fotoni o nuclei di elio, (b=a), le distribuzioni sono solo 6: le *combinazioni con ripetizione*; questa statistica, ideata dall'indiano Bose, fu applicata da Einstein per ritrovare la legge di Plank. Se infine le particelle sono indistinguibili e in più obbediscono al principio di Pauli (in una cella può stare una sola particella), le distribuzioni si riducono a 3: le *combinazioni semplici di 3 oggetti a 2 a 2*. Questa statistica fu ideata da Fermi e da lui applicata per studiare le proprietà del legame metallico. Dirac trovò poi il legame tra *spin* e statistica (i *bosoni* hanno spin intero, i *fermioni* spin semi-intero).

c) Misure "continue". Se S è l'intervallo [a,b] dell'asse reale, ed E l'intervallo $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, la probabilità che un numero *scelto a caso* in S cada in E è $p(E) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$ (distribuzione uniforme di probabilità). Stiamo assumendo come misura la lunghezza dei segmenti. Si noti che se β=α, m(E)=0 e quindi p(E)=0. L'evento E si riduce a un punto, dunque non è vuoto, perciò non è impossibile, tuttavia la sua probabilità è zero. Analogamente se E=]a,b[, intervallo aperto, la sua misura è b-a e p(E)=1, tuttavia l'evento E non è certo, infatti potrebbe capitare che il numero scelto a caso sia un estremo dell'intervallo [a,b].

Ciò può accadere se la misura è un numero reale.

Si badi che la distribuzione uniforme non è applicabile se lo spazio degli eventi è infinito; in tal caso si usa una misura come quella gaussiana, che assegna misura finita allo spazio.

In due dimensioni, sia S un rettangolo [a,b]x[m,M] del piano cartesiano. La misura sia un'area. Se E è una figura contenuta in S, p(E) = area(E)/area(S). Analogamente si procede per i volumi.

d) Valore medio e varianza.

Una grandezza X si chiama variabile aleatoria, v. a. , se può assumere i valori X_1, X_2, … Xn con le probabilità p_1, p_2, … p_n. E' chiaro che deve essere $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Se la variabile aleatoria X può assumere un'infinità numerabile di valori, la somma delle probabilità si trasforma in un serie che deve convergere a 1.

Si chiama valore medio di X il numero $E(X) \equiv \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} p_i X_i$

Esempio9. Una v. a. X assuma i valori 1, 7, 25 con probabilità uniforma 1/3. E(X)=33/3=11.

Una seconda v. a. assuma i valori 10, 11, 12 con probabilità uniforme 1/3. Anche E(Y)=11.

Le due v. a. hanno lo stesso valore medio, però presentano una *dispersione* diversa. Se si tratta di misure di una grandezza fisica, il valore 11 trovato con la seconda serie di misure mi dà più *affidamento*.

Quantifichiamo questa idea di affidabilità mediante il concetto di *varianza*. La varianza di X, Var(X), è definita come valore medio dei quadrati degli "*scarti*" di X dal suo valore medio: $Var(X) = E[(X - \bar{X})^2] = \sum_{i=1}^{n} p_i (X_i - \bar{X})^2$.

Si verifichi che $Var(X) = E(X^2) - \bar{X}^2$ (valor medio del quadrato meno quadrato del valor medio.

Si chiama poi *Scarto quadratico medio di X la radice quadrata(positiva) di Var(X):* $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.

σ_X (Standard deviation in inglese) misura lo sparpagliamento dei dati; più è piccolo, più i dati si ritengono affidabili. Si dimostrano le seguenti proprietà:

1) E(λX) = λ.E(X); E(X+Y) = E(X)+E(Y);

2) Var(λX)=λ^2Var(X); se X e Y sono v. a. indipendenti, Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y).

Esempio10. Lanciando un dado si vince un euro se esce l'"1", … 6 euro se esce il "6". Il valore medio della vincita è (1+2+ … +6)/6=7/2=3,5;

la varianza è $1/6[(1-7/2)^2+(2-7/2)^2+(3-7/2)^2].2=1/3[25/4+9/4+1/4]=35/12$ e σ=1,71.

Ho usato una distribuzione uniforme di probabilità (p=1/6 ad ogni lancio). Ciò è possibile perché l'insieme S dei casi possibili è finito. Se S contiene n elementi, la distribuzione uniforme implica p=1/n.

Esercizio. Generalizzare l'esempio10 immaginando un dado con 2n facce.

e) La legge dei grandi numeri.

Sia X una v. a. con valor medio $\bar{X}$ e varianza $\sigma^2 = E](X-\bar{X})^2] = \sum_i (X_i - \bar{X})^2 . p_i$.

Considero ora solo i valori X_k che distano dal valor medio più di un prefissato ε>0; si avrà $\sum_{|X_k-\bar{X}|>\varepsilon} (X_k - \bar{X})^2 . p_k \geq \varepsilon^2 . \sum_{|X_k-\bar{X}|>\varepsilon} p_k \geq \varepsilon^2 . P(|X-\bar{X}|>\varepsilon);$ d'altra parte $\sum_{|X_k-\bar{X}|>\varepsilon} |X_k - \bar{X}^2| p_k = Var(X) = \sigma^2$. Confrontando, avremo

$$P\left(|X-\bar{X}|>\varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \text{ o anche } P\left(|X-\bar{X}|\leq\varepsilon\right) \geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Le disuguaglianze precedenti sono dovute a Cebicev (1821 – 1894).

Un caso importante. Sia X la v. a. che registra il successo con probabilità p. Per esempio, se esce un numero primo lanciando un dado.

$$X = \begin{cases} 1, \textit{ probabilità } p \\ 0, \textit{ probabilità } q = 1-p \end{cases}$$

$$\bar{X} = 1.p + 0.q = p \text{ , } Var(X) = E[(X-p)^2] = (1-p)^2.p + (0-p)^2.q = q^2 p + p^2 q = pq.$$

Sia ora Y la v. a. $X_1+X_2+ \dots +X_n$ dove le X_i hanno tutte la stessa legge di probabilità di X e sono indipendenti. Y conta quante volte si ha successo in n prove: E(Y)=np, Var(Y)=σ^2=npq.

La v. a. Z = Y/n misura la frequenza relativa ν_n (la percentuale) dei successi in n prove e si ha:

$E(\nu_n) = p$, $\sigma^2 = npq/n^2 = pq/n$ e infine $\sigma = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$. Applicando la disuguaglianza di Cebicev, si ottiene la legge dei grandi numeri: $\lim_{n\to\infty} P\left(|\nu_n - p|\leq\varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}\right) = 1.$

Ciò significa che, comunque si fissi un numero positivo ε, la probabilità che la frequenza relativa disti dalla probabilità dell'evento meno di ε si avvicina arbitrariamente ad 1, al crescere del numero delle prove. Ciò non significa che al divergere di n la frequenza relativa tenda alla probabilità, ma che è sempre meno probabile uno scarto maggiore di ε tra ν_n e p, per quanto piccolo si fissi tale ε.

Esempio11. Lanciando una moneta un gran numero di volte, ci aspettiamo che la *distanza* tra la frequenza relativa e il valore medio p=1/2 sia piccola, nel senso preciso del teorema di Cebicev:

$$P\left(|\nu_n - p|\leq\varepsilon\right) \geq 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Se lancio la moneta 100 volte ed ε=0,05 ho P≥1–1=0; Cebicev non è d'aiuto.

Se, con lo stesso ε=0,05, lancio la moneta 200 volte, P≥0,5.

Se vogliamo che la frequenza relativa soddisfi la disuguaglianza $P(0{,}45\leq\nu_n\leq 0{,}55)\geq 90\%$ (ho preso ε=0,05), quante volte devo lanciare la moneta? Deve essere

$$1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}\geq 0,9 \Leftrightarrow 1-\frac{10000}{4\times 25n}\geq 0,9 \Rightarrow \frac{100}{n}\leq 1-0,9=0,1 \Rightarrow n\geq 1000.$$ (Almeno 1000 lanci).

Ci sono metodi più stringenti per garantire risultati come questo, cioè metodi che richiedono un valore di n minore del precedente, a parità di ε. Questi metodi richiedono il calcolo integrale e la distribuzione normale *di Gauss*, ma non tratteremo tale argomento.

f) Metodi Monte Carlo. Il calcolo delle probabilità e in particolare la legge dei grandi numeri, può essere applicato per valutare l'*area* di una figura del piano cartesiano, in particolare di un trapezoide (Integrale definito), che come è noto può essere interpretata come un'area, un volume, una lunghezza, un lavoro eccetera. Il metodo "*Monte Carlo*" più semplice, detto "*Hit or miss"* (colpito o mancato) consiste nel circoscrivere al trapezoide un rettangolo avente come base l'intervallo [a,b] del trapezoide e altezza pari alla differenza tra il massimo e il minimo della funzione f(x) in [a,b]. Quindi si generano due sequenze "*random*" (pseudo casuali) di numeri reali: $\{x_n\}$ tra a e b e $\{y_n\}$ tra min e max di f(x); se $y_n< f(x_n)$ una variabile intera k, inizializzata con 0, si incrementa di 1 (successo). Per n abbastanza (?) grande si può accettare con un certo grado di affidabilità che l'area del trapezoide sia uguale a (k/n).(b-a).Max-min). Lo scarto quadratico medio σ dà un'indicazione della bontà del risultato.

g) La formula di Bayes.

Imparare dall'esperienza. Nella logica formale si applica lo schema inferenziale di deduzione, detto *Modus ponens*: [A, A→B]: B. (A è vera e vale A implica B: allora B è vera). Si applica anche lo schema di "*Reduzio*" o *modus tollens*, dimostrazione per assurdo e logicamente equivalente al modus ponens: [A→B, -B]: -A. (Vale A implica B e B è falsa: allora A è falsa).

Nelle scienze sperimentali invece pare che non si possa fare a meno del ragionamento induttivo, logicamente non valido, rappresentato dallo schema [A→B, B]: A.

Consideriamo il seguente esempio: Supponiamo di accettare l'implicazione "Se c'è fuoco allora c'è calore"; in tal caso sono sicuro che quando c'è fuoco sono sicuro che c'è calore; ma quando c'è calore non è certo che ci sia fuoco, è solo probabile (in una tribù di pellerossa sarebbe altamente plausibile. In generale, l'attendibilità della verifica di un'ipotesi scientifica dipende anche dal contesto storico o, come si dice, dal paradigma in quel periodo accettato dalla comunità scientifica).

Abbiamo perciò bisogno del concettosi probabilità condizionata. Supponiamo p(A)>0 e p(B)>0. Allora p(A/B) = $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ e p(B/A)= $\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$, da cui

[1] $p(A/B).p(B)=p(B/A).p(A).(A)=p(A\cap B).$

Sia ora $\{A_1, A_2, \dots An\}$ una partizione dello spazio degli eventi S. Ciò significa che gli A_i sono non vuoti, a due a due disgiunti e la loro unione è S, pertanto la somma delle loro probabilità è 1. Si osservi anche che $B=B\cap S=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_n)$ e dalla [1] segue

[2] $$p\left(A_i/B\right)=\frac{p(B/A_i).p(A_i)}{p(B)}=\frac{p(B/A_i).p(A_i)}{\sum_{k=1}^{n}[p(B/A_k).p(A_k)]}$$

Questa è la famosa formula di Bayes (pubblicata postuma il 1763).

Esempio12. Una ditta ha tre stabilimenti A_1, A_2, A_3 che producono , poniamo, automobili: il primo ne produce il 40%, il secondo il 27% e il terzo il rimanente 33%. La percentuale di macchine difettose che escono da A_1 è il 2%, da A_2 il 3% e da A_3 l'1%. Quale è la probabilità che una macchina provenga da A_1 sapendo che è difettosa? (B è l'evento "macchina difettosa)". Analogamente per gli altri due stabilimenti A_2 e A_3. Si ottengono i seguenti risultati:

$$p(A_1/B)=\frac{\frac{2}{100}\frac{40}{100}}{\frac{2}{100}\frac{40}{100}+\frac{3}{100}\frac{27}{100}+\frac{1}{100}\frac{33}{100}}=\frac{80}{80+81+33}=\frac{80}{194}\cong 0,4124 \text{ (41,24\%).}$$

Analogamente $p(A_2/B)=\frac{81}{80+81+33}=\frac{81}{194}\cong 0,4175$ (41,75%) e infine

$$p(A_3/B)=\frac{33}{80+81+33}=33/194\cong 0,1701 \text{ (17,01\%).}$$

Esempio13. Un medico riscontra in un paziente dei sintomi che gli fanno diagnosticare tre possibili malattie; A_1, A_2, A_3 alle quali assegna le probabilità $p(A_1)$=20%, $p(A_2)$=30%, $p(A_3)$=50%.
Egli propende per la malattia A_3, ma per sicurezza ordina un'analisi che in base ai test scientifici dà risultato positivo B con le seguenti probabilità: $p(B/A_1)$=15%, $p(B/A_2)$=25%, $p(B/A_3)$=80%.
La formula di Bayes fornisce allora

$$p(A_1/B)=\frac{20\times 15}{20\times 15+30\times 25+50\times 80}=\frac{300}{300+750+4000}=\sim 5,94\%$$

$$p(A_2/B)=\frac{30\times 25}{20\times 15+30\times 25+50\times 80}=\frac{750}{300+750+4000}=\sim 14,85\%$$

$$p(A_3/B)=\frac{50\times 80}{20\times 15+30\times 25+50\times 80}=\frac{4000}{300+750+4000}=\sim 79,21\% \quad .$$

Il test clinico conferma la diagnosi, perché la probabilità a priori del 50% stimata dal medico è salita a posteriori quasi all80%.