Ottavio Serra

Quesiti proposti nel 7° incontro.

Dalle funzioni pari e dispari, alla composizione di funzioni, alle funzioni invertibili, alle trasformazioni del piano.

1) Sia f una funzione reale.

Se f è pari e x=0 fa parte del dominio, allora

a) 0 è punto di massimo o di minimo relativo V F

b) 0 è punto di flesso V F

c) in 0 ci può essere un punto cuspidale V F

d) se esiste la derivata destra in 0, esiste anche la sinistra e le due derivate sono uguali V F

Se f è dispari e x=0 fa parte del dominio, allora

a) 0 è punto di massimo o di minimo relativo V F

b) 0 è punto di flesso V F

c) in 0 ci può essere un punto cuspidale V F

d) se esiste la derivata destra in 0, esiste anche la sinistra e le due derivate sono uguali V F

2) Siano f e g funzioni di A in B (eventualmente, A e B sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}$).

Definito il prodotto funzionale (composizione) di f e g come segue: $(g°f)(x)=g(f(x))$,

a) $g°f = f°g$ V F

b) se f è biunivoca, detta f^{-1} l'inversa funzionale di f (cioè se $f(x) = y$, allora $f^{-1}(y) = x$), allora $f^{-1}°f = f°f^{-1}$ V F

c) se f e g sono entrambe invertibili, allora $(g°f)^{-1}=g^{-1}°f^{-1}$ V F

3) Una trasformazione del piano si dice diretta, se conserva il verso di percorrenza del bordo di una figura, cioè, se il bordo di F è percorso in senso antiorario (orario), anche il bordo della figura F' corrispondente di F sarà percorso in senso antiorario (orario). La trasformazione si dice indiretta, se scambia il verso di percorrenza del bordo (scambia la destra con la sinistra). La traslazione, la rotazione sono esempi di trasformazioni (sono isometrie) dirette; la simmetria assiale è una isometria indiretta.

Componendo due simmetrie assiali si ottiene una rotazione o una traslazione V F

Componendo tre simmetrie assiali si ottiene una rotazione o una traslazione V F

Componendo due simmetrie assiali si ottiene una simmetria assiale V F

Componendo tre simmetrie assiali si ottiene una simmetria assiale V F

Generalizzare.

Il prodotto (composizione) di due simmetrie è commutativo V F

4) Una trasformazione affine del piano che lascia fissa l'origine è rappresentata da una matrice 2X2 il cui determinante (diverso da zero: perché?) può essere positivo o negativo. Che cosa ci dice il segno del determinante? Che cosa ci dice il valore assoluto del determinante?

Una omotetia è una trasformazione del piano di equazioni $x'= kx$, $y'=ky$. Essa è dunque una particolare affinità che conserva la direzione, anzi una similitudine (perché?), particolare perché conserva la direzione.

Se k = 2, l'omotetia è diretta o indiretta?

Se k = -2, l'omotetia è diretta o indiretta?

5) La simmetria centrale nello spazio ad n dimensioni $\boldsymbol{R^n}$ (n≥1) è diretta o indiretta a seconda che n è pari o dispari V F

6) La simmetria assiale in $\boldsymbol{R^n}$ (n≥2) è diretta o indiretta a seconda che n è pari o dispari V F

7) Scrivere le equazioni di una simmetria assiale nel piano ($\boldsymbol{R^2}$) rispetto alla retta y=b; lo stesso rispetto alla retta x=a.

8) In $\boldsymbol{R^2}$ le equazioni della simmetria rispetto all'asse x sono x'=x, y'=-y e rispetto all'asse x sono x'=-x, y'=y. Siccome gli assi passano (ovviamente) per l'origine, le due simmetrie assiali sono rappresentate rispettivamente dalle matrici $S_x = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,-1 \end{pmatrix}$ e $S_y = \begin{pmatrix} -1,0 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

Scrivere la matrice S_m della simmetria rispetto alla retta y=mx e verificare che S_x ed Sy si ottengono come casi particolari di S_m , per m rispettivamente … .

9) Un gruppo è un insieme non vuoto di elementi x, y, z, … sui quali è definita un'operazione che gode delle seguenti proprietà:

[1] Associativa : (x.y).z=x.(y.z);

[2] Esistenza del neutro: esiste un elemento *e* tale che per ogni x e.x=x.e=x;

[3] Esistenza del simmetrico (inverso, opposto): per ogni x esiste un x^{-1} tale che $x.x^{-1}=x^{-1}.x=e$.

Se inoltre vale la proprietà **commutativa**, il gruppo si chiama *abeliano* in onore del matematico norvegese Niels Abel (Niels Henrik Abel , 1802 – 1829).

9 a. Dimostrare che le traslazioni del piano formano un gruppo abeliano.

9 b. Dimostrare che le rotazioni del piano (di dato centro) formano un gruppo abeliano.

9 c. Dimostrare che l'insieme delle rotazioni e delle traslazioni formano un gruppo non abeliano.

9 d. Dimostrare che l'insieme delle rotazioni e simmetrie assiali formano un gruppo non abeliano.

Nei gruppi precedenti chi è l'elemento neutro?

9 e. Dimostrare che l'insieme delle simmetrie assiali rispetto ad assi passanti per l'origine O delle coordinate **non è un gruppo.**

9 f. Che succede se si compone una simmetria assiale S con se stessa? S°S= ? in generale S^n= ?

N.B. S^n è la potenza n-ma funzionale di S, cioé $S^n(P)=S(S(...(S(P)...))$.

9 g. Sia $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ la matrice di una simmetria assiale. Determinate l'asse di simmetria.

Calcolate la matrice S^2=S°S facendo il prodotto riga per colonna: che cosa ottenete?