Ottavio Serra

Quesiti intermedi.

1. Dimostrare che, se vale la legge della riflessione (indifferentemente per un raggio di luce o per una palla da biliardo), allora se un raggio di luce (una palla) va da un punto A a un punto B dopo essersi riflessa nel punto C di uno specchio (una sponda perfettamente elastica), il cammino AC+CB ha lunghezza minima.

2. Determinare il cammino che una palla A deve seguire per colpire una palla B dopo essersi riflessa su tre sponde di un biliardo.

3. Un prisma retto a base quadrate (spigolo di base lungo 1 metro), è poggiato su un piano orizzontale. Una formica parte da un punto A di uno spigolo verticale e raggiunge il punto B, dello stesso spigolo, che si trova a 3 metri al disopra di A, facendo un percorso che interseca anche gli altri tre spigoli verticali. Determinare il cammino di minima lunghezza, calcolando in particolare le quote dei punti (partendo dalla quota di A) nei quali il percorso della formica interseca gli altri tre spigoli.

4. Nel piano cartesiano è data la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y \\ y' = x + y\sqrt{3} \end{cases}$. Di quale trasformazione si tratta? Come vengono trasformate le lunghezze e le aree?

5. Si determini il luogo dei centri dei cerchi tangenti alla parabola di equazione $y=x^2+1$ nel punto (1; 2).

6. Si dimostri che la somma dei coefficienti di $(a+b)^n$ è 2^n per tutti gli n naturali.

7. Si dimostri che la somma dei coefficienti di posto dispari di $(a+b)^n$ è uguale alla somma dei coefficienti di posto pari.

8. Risolvere l'equazione $4\binom{n}{4} = 15\binom{n}{5}$ nell'incognita n (numero naturale).

9. Se i coefficienti binomiali $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

10. Per quali valori del parametro reale k l'equazione k.Cos(2x) – 5k+2 ha radici comprese tra 15° e 45°?

10. Siano dati due numeri reali positivi. Dimostrare, **senza usare le derivate**, che, se la loro somma è costante, il loro prodotto non supera il quadrato della semisomma e che tale massimo è raggiunto se i due numeri sono uguali.

Viceversa, se è costante il loro prodotto, che cosa si può dire della somma?

11. Corollario del teorema precedente: Tra tutti i rettangoli di dato perimetro quello di area massima è il quadrato. Dimostrare però che, a parità di perimetro, l'esagono regolare ha area maggiore del quadrato.

12. Consideriamo tutti i poligoni regolari di perimetro fisso 2p. Dopo aver verificato che l'area del poligono regolare di n lati è $S_n = \dfrac{p^2}{n\tan\frac{\pi}{n}}$, verificare che S_n cresce al crescere di n, mantenendosi però minore di un certo valore finito. Qual'è questo valore e che cosa rappresenta? (N.B. "tan" è la tangente trigonometrica).

13. Il numero reale z=39x-80y varia al variare di x e y, che sono soggetti al vincolo $x^2+y^2=1$. Determinare il massimo e il minimo valore di z e calcolare per quali valori di x e y tali estremi sono raggiunti.

14. Trovare quoziente e resto della divisione del polinomio $x^3+x^5+x^7+ \ldots +x^{2n-1}+x^{2n+1}$ per il binomio x^2-1.

15. Due sfere sono tangenti esternamente e sia α il piano tangente comune. Esse hanno altri infiniti piani tangenti che inviluppano il cono tangente. Il cono tocca le due sfere lungo due circonferenze che limitano un tronco di cono di apotema t. Calcolare l'area laterale del tronco e l'area del cerchio che il cono determina sul piano α. (N.B. L'unico dato è t).