Ottavio Serra

Somme e formule iterative.

Abbiamo visto nel secondoo incontro come dimostrare col principio di induzione matematica (di Peano) le seguenti formule aritmetiche:

[1] $\sum_{i=1}^{n} i$ = (1+2+ … + n) = $\frac{n(n+1)}{2}$,

[2] $\sum_{i=1}^{n} i^2$ = ($1^2+2^2+ \dots +n^2$) = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

[3] $\sum_{i=1}^{n} i^3$ = ($1^3+2^3+ \dots +n^3$) = $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

La prima è la famosa formula attribuita a Gauss bambino, a tutti nota, che si può dimostrare, oltre che per induzione, con l'osservazione che il 1° più l'ultimo addendo è uguale al 2° più il penultimo, eccetera, oppure con le progressioni aritmetiche. Ma come si è arrivati alle formule per le somme [2] e [3]? Partite ancora dalla [1] e dimostratela sviluppando il binomio $(k+1)^2$ per k=0, 1, … n. Sommate poi membro a membro i termini di sinistra e di destra. Per dimostrare la [2] sviluppate il binomio $(k+1)^3$ per k=0, 1, … n e utilizzate la formula [1]; per dimostrare la [3] sviluppate il binomio $(k+1)^4$ per k=0, 1, … n e utilizzate le formule [1] e [2], semplificate e … buona fortuna.

(a) Calcolate ora $\sum_{i=1}^{n}(2i)$ e $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$ utilizzando diversi procedimenti.

(b) Utilizzando la [2] calcolate $\sum_{i=1}^{n}(2i)^2$ e $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2$.

(c) Utilizzando la [3] calcolate $\sum_{i=1}^{n}(2i)^3$ e $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3$.

Il procedimento suggerito per dimostrare le formule [2] e [3] è detto "*iterativo*", perché richiede la dimostrazione preventiva dei casi precedenti. Sapreste immaginare una procedura iterativa per trovare una formula per la somma $\sum_{i=1}^{n} i^m$? (m=4, 5, …). Utilizzate lo sviluppo del binomio

$(k+1)^{m+1} = \sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}k^j$ per k=0, 1, 2, … n. (Ricordate un po' di calcolo combinatorio?).

Iterazione. Formule iterative si incontrano nei più svariati campi della matematica.

Esempi.

La potenza ad esponente intero (positivo): $P=x^n$ [P=1; mentre n>0 fai (P=P.x; n=n-1)].

Esercizio: Modificate la procedura per tener conto di un eventuale esponente negativo.

Il calcolo di $1.000001^{1000000}$ (1 più un milionesimo elevato a un milione) richiede un milione di iterazioni. Sapreste prevedere a quale famoso numero ci si avvicina? Un milione di iterazioni sono tante e si rischiano grossi errori di arrotondamento; sapreste immaginare una procedura "**ultrarapida**" (qualche decina di iterazioni anziché un milione?).

Il fattoriale: n! [Fattoriale=1; mentre n>1 fai [Fattoriale=Fattoriale.n; n=n-1)].

Metodi iterativi per approssimare uno zero di una funzione.

Metodi iterativi per bisezione: Perché i vocabolari e gli elenchi telefoni sono *ordinati* ?

La dicotomia o bisezione è una tecnica potente; la usava già Platone per le classificazioni.

Riporto dal dialogo "*FEDRO*":

"L'*amore* è un appetito che ha per oggetto il bello, ma anche chi non ama desidera cose belle. Occorre dunque rendere più specifica la definizione". Si usa il metodo della *dicotomia*, cominciando da un genere molto ampio e suddividendolo in due parti, ripetendo, eventualmente, la medesima operazione con ciascuno delle due parti ottenuti e si procede così finché non si ottiene una definizione che identifichi in modo preciso l'oggetto di indagine.

GIOCO: Pensa un numero naturale tra 1 e 1000; io lo indovinerò in non più di 10 domande. Tu ogni volta mi devi dire se il numero da te pensato è minore, maggiore o uguale a quello che io dico.

Un esempio preso dalla zoologia.

Il seguente schema semplificato serve per identificare le classi del subphylum vertebrati. Tiene conto di caratteri primitivi e generali (vi sono mammiferi, alcuni con pelo, altri senza come i cetacei, uccelli implumi, eccetera, per cui seguendo lo schema sottostante, un delfino finirebbe nei pesci ossei).

1a. Con pelo .... Classe Mammiferi
1b. Senza pelo 2
2a. Con piume .... Classe Uccelli
2b. Senza piume 3
3a. Senza mandibole .... Classe Agnati
3b. Con mandibole 4
4a. Con pinne pari...5
4b. Senza pinne; con zampe o senza 6
5a. Con scheletro osseo .... Classe Osteichthyes (pesci ossei)
5b. Con scheletro cartilaginoso .... Classe Condritti (pesci cartilaginosi)
6a. Pelle secca, coperta di squame .... Classe Rettili
6b. Pelle umida, senza squame .... Classe Anfibi

Se il nostro esemplare è una rana, realizzerà la condizione **1b** (senza pelo), per cui passeremo alla dicotomia **2**; delle due opzioni, realizzerà la **2b** (senza piume), e passeremo alla dicotomia **3**; avendo mandibole, seguiremo la dicotomia **4** e, siccome ha zampe e non ha pinne (opzione **4b**), continueremo nella **6**; infine, dato che manca di squame ed ha la pelle umida (**6b**), concluderemo che appartiene alla classe degli anfibi. Potremmo continuare con una chiave per gli ordini di anfibi:

1a. Senza zampe .... Ordine Apodi
1b. Con zampe 2
2a. Con coda .... Ordine Urodeli
2b. Senza coda .... Ordine Anuri

Siccome la nostra rana possiede zampe (**1b**) e manca di coda (**2b**), risulta che è un anuro. In questo modo, seguendo la dicotomia di rango tassonomico sempre più basse, potremo arrivare alla specie.

Esempi informatici.

In un elenco telefonico **non ordinato** di un milione di nomi la ricerca di un dato richiede **in media** 500 mila accessi, ma se l'elenco è ordinato ne bastano 20 (spiegare perché). Ecco perché ci si dà tanta pena per ordinare i nomi di un elenco e le parole di un vocabolario.

Esercizio: scrivete una procedura per ordinare un insieme finito (di numeri interi o di parole). Scrivete una procedura per individuare il posto occupato da un dato in un elenco ordinato o che ci dica che non è in elenco.

Sapete cosa sono i metodi ricorsivi? Sono metodi in cui una procedura o una funzione richiama se stessa. Esempio per il fattoriale: "Se n<2 allora Fattoriale=1 altrimenti Fattoriale=n.Fattoriale(n-1)".

Esercizio: scrivete una funzione ricorsiva per la potenza ad esponente intero positivo.

Successione di Fibonacci: $a_0=0$, $a_1=1$, per $n>1$ $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. Questa definizione è già ricorsiva e pronta per essere implementata. Ma la definizione chiama due volte se stessa, perciò richiede un grande spazio di memoria; dal punto di vista informatico sarebbe preferibile una funzione iterativa, a saperla immaginare!