Ottavio Serra

Invarianti in geometria.

In matematica e in particolare in geometria la ricerca di invarianti è una guida sicura per raggruppare proprietà a prima vista eterogenee in uno schema unificante. L'invarianza è relativa a un insieme di operazioni che costituiscono un gruppo, gruppo di trasformazioni: la molteplicità sotto la specie dell'unità. Il concetto di invarianza trova fondamentale applicazione in fisica, in particolare sotto l'aspetto dei principi di simmetria che reggono le sottostanti leggi di conservazione. Per esempio, l'omogeneità del tempo conduce alla legge di conservazione dell'energia, eccetera. A questo proposito si può vedere il mio articolo "*Principi di simmetria e leggi di conservazione*" pubblicato sul "*Foglio*" del Liceo classico di Castrovillari, reperibile anche sul mio sito.

Farò ora un breve cenno di invarianti in alcuni capitoli della geometria.

1) Invarianti topologici. Un invariante topologico è una proprietà che non muta quando una figura viene deformata, stirata o piegatata, senza però produrre strappi. Farò un solo esempio, riguardante una invarianza topologica dei poliedri dello spazio. Una proprietà analoga vale anche nel piano per i poligoni, che sono l'analogo dei poliedri. Un poligono ha una faccia e tanti vertici quanti sono gli spigoli (i lati), perciò per ogni poligono il numero V dei vertici più il numero F delle facce meno il numero S degli spigoli è un invariante : V+F-S=1. Ciò è banale, ma nello spazio (tridimensionale) l'analogo invariante non è affatto immediato. La superficie poliedrica è una superficie chiusa costituita da poligoni attaccati due a due per uno spigolo, come un cubo, una piramide o altro. Per un poligono sappiamo che V+F-S=1 e tale numero non cambia se il poligono è suddiviso in triangoli, tracciando delle diagonali; infatti ogni diagonale fa aumentare di 1 il numero delle facce e quello degli spigoli, mentre i vertici restano invariati. Perciò completiamo il poliedro a partire da un triangolo, aggiungendo un triangolo alla volta. Alla fine avremo una specie di ciotola poliedrica, per la quale V+F-S=1. Per avere la superficie poliedrica chiusa dobbiamo aggiungere un ulteriore triangolo, una specie di coperchio che non altera né il numero dei vertici né quello degli spigoli, ma aggiunge una faccia. Perciò per un poliedro dello spazio **V+F-S=2**. Questo risultato è dovuto a Eulero. Forse qualcosa di analogo succede per un *iperpoliedro* in uno spazio a più di tre dimensioni? Azzardate un ipotesi per un *politopo, iperpoliedro* in uno spazio a quattro dimensioni.

2) Invarianti affini nel piano e nello spazio.

a) Trasformazione affine nel piano.

$$\begin{pmatrix} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$, che si può scrivere in forma matriciale così:

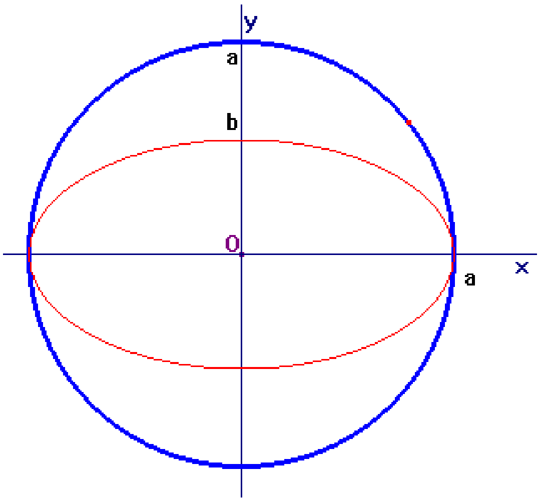
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, essendo A la matrice $\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{pmatrix}$, che si suppone non singolare per assicurare la biunivocità, e il prodotto matrice per vettore si intende riga per colonna.

Si verifica che A muta rette in rette e conserva il parallelismo (non la direzione).

Invariante della trasformazione affine è il rapporto delle aree, che è uguale al valore assoluto del determinante di A: Area(F')/Area(F)=|Det(A)|=$|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|$. Per esempio, il triangolo F di vertici O(0,0), A(1,0), B(0,1) ha area ½. Il trasformato F' ha vertici O'(0,0), A'(a_{11},a_{21}), B'(a_{12},a_{22}) e area uguale a ½$|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|$, come potete controllare.

Una particolare affinità è la seguente: $\begin{pmatrix} x' = x \\ y' = ky \end{pmatrix}$. Det(A)=k e perciò il rapporto delle aree è |k|.

Vediamo come un cerchio diventa un'ellisse.



Il cerchio diventa l'ellisse ponendo k=b/a. Siccome l'area del cerchio è πa^2, segue che l'area dell'ellisse (della parte di piano racchiusa dall'ellisse) è πa^2.b/a=$\boldsymbol{\pi ab}$. Questo bel risultato si può, naturalmente, ottenere con i metodi del calcolo integrale, ma è molto elegante la sua derivazione da un invariante affine.

Nota sul rischio delle generalizzazioni affrettate. Siccome la lunghezza della circonferenza in figura è 2πa=π(a+a), si è tentati di generalizzarla alla lunghezza dell'ellisse, congetturando la formula Lunghezza(ellisse) = π(a+b). Purtroppo questa formula è bella, ma è sbagliata, come si può verificare considerando un caso limite. (Provate a proseguire da soli). La lunghezza dell'ellisse è un rompicapo che ha dato filo da torcere a grandi matematici, finché si dimostrò che la lunghezza di un arco di ellisse non è esprimibile con funzioni elementari, (A proposito, quali sono le funzioni *elementari?*).

b) Nello spazio. Le equazioni di una trasformazione affine dello spazio (tridimensionale) sono analoghe a quelle del piano, salvo l'ordine 3 anziché 2. Il valore assoluto del determinante della matrice A (3x3) rappresenta ora il rapporto dei volumi dei solidi F' ed F, essendo F' il trasformato di F.

E' particolarmente interessante la trasformazione affine avente matrice

$A = \begin{pmatrix} 1,0,0 \\ 0,\frac{b}{a},0 \\ 0,0,\frac{c}{a} \end{pmatrix}$, che rappresenta la trasformazione della sfera di raggio a nell'ellissoide di semiassi a, b, c. Il determinate di A, che è positivo stante il significato di a, b, c, è $\frac{bc}{a^2}$.

Supponendo noto il volume della sfera, $\frac{4}{3}\pi a^3$, si ricava il volume dell'ellissoide: $\frac{4}{3}\pi abc.$

Nota. Per ora si suppone di conoscere, dalla scuola media, le formule dell'area del cerchio e del volume della sfera, in attesa di dimostrarle.

Esercizio. Verificare che se la matrice dell'affinità del piano gode delle seguenti proprietà: $\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = k \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0 \end{cases}$, l'affinità è una similitudine. Se k=1, è una isometria (rotazione intorno ad O oppure simmetria assiale con asse passante per O a seconda che il determinante di A è …).