Ottavio Serra

Spazi vettoriali e geometria.

Definizione. Uno spazio vettoriale V su R è un insieme non vuoto di elementi detti vettori, sui quali sono definite due operazioni

I) Addizione di vettori: VxV → V che conferisce a V la struttura di gruppo abeliano:
 a) (u+v)+w=u+(v+w) proprietà associativa;
 b) esiste un elemento *neutro*, vettore nullo o zero, tale che u+o=0+u=u;
 c) per ogni u esiste un vettore (opposto) –u tale che u+(-u)= -u+u=0;
 d) u+v=v+u proprietà commutativa.

II) prodotto di uno scalare (numero reale) per un vettore: RxV→V tale che (a,b numeri reali)
 a) a(u+v)=au+av;
 b) a(bv)=(ab)v;
 c) (a+b)v=av+bv;
 d) 1.v=v.

Modelli di spazi vettoriali sono R, R^2, R^3,… R^n, quando si pongono le definizioni esemplificate per R^3: (x,y,z)+(x',y',z')=(x+x', y+y', z+z'); a(x,y,z)=(ax, ay, az).
R^2 ed R^3 sono modelli per il piano e lo spazio euclidei.

Combinazioni lineari di vettori: $w=\sum_{i=1}^{k} a_i v_i$. Se accade che w=0 solo se tutti gli scalari a_i sono nulli, i k vettori v_1, v_2, …v_k si dicono linearmente indipendenti o liberi, altrimenti si dicono linearmente dipendenti o legati. Base di R^n è una n-pla di vettori liberi. Per esempio, in R^3 una base è {e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)}. Il vettore (x,y,z) si può pensare come combinazione lineare dei vettori di base e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1) (base canonica).
Verificare che {(1,1,2), (2,-1,5), (4,1,9)} non è una base di R^3.
In R^3 il massimo numero di vettori liberi non può superare 3; perché?
Verificare che {(u=(1,1,2), v=(2,0,1), w=(3,1, 1)} è una base di R^3 ed esprimere il vettore (4,1,7) come combinazione lineare di essi, cioè calcolare i numeri (gli scalari) a,b,c tali che
(4,1,7) =au+bv+cw.

Sottospazi. Un sottoinsieme S di V è un sottospazio se è chiuso rispetto alle operazioni di spazio vettoriale definite in V.
Esempi. In R^2 è un sottospazio l'insieme S dei vettori (x,y) tali che ax+by=0. Una base di S è il vettore (b,-a). Per ogni scelta della coppia di scalari a,b si ha un sottospazio. Nel piano cartesiano sono interpretabili come rette per l'origine.
In R^3 ci sono due tipi di sottospazi non banali S ={t.v}={t(a,b,c)}ha v come base ed è un sottospazio di dimensione 1 (si può interpretare come una retta per l'origine); H={αu+βv)} ha una base costituita dai due vettori u,v e ha dimensione 2, sempre che u e v siano linearmente indipendenti (H è interpretabile come piano per l'origine O(0,0,0).
N.B. Ogni spazio vettoriale ha due sottospazi banali: chi sono? Possono coincidere?

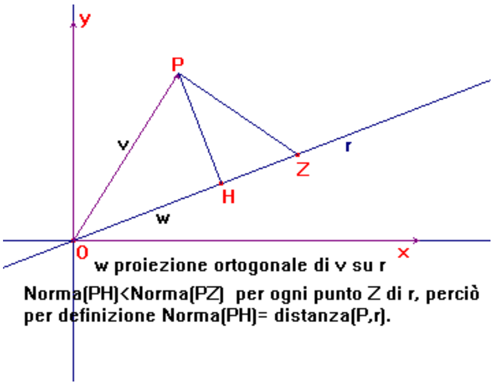
Esercizi.

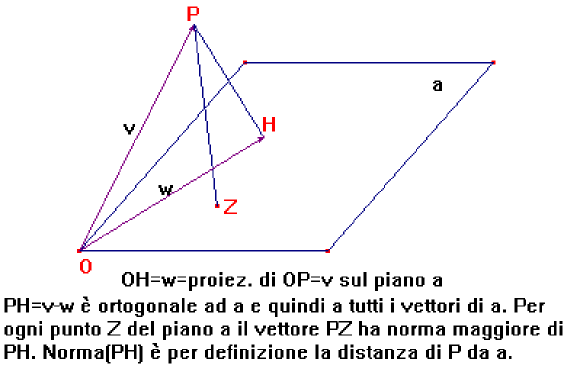
1) In R^3 è dato il sottospazio H di equazioni cartesiane: {x+y-z=0, 2x+3z=0}. Determinare la dimensione e una base di H.
2) In R^3 una base del sottospazio S é {(1,1,2)}. Scrivere le equazioni cartesiane di S.
3) In R^3 il sottospazio H ha equazione cartesiana 2x+3y-z=0. Determinare dimensione e una base.
4) In R^3 una base del sottospazio S è {(1,1,0), (0,1,2)}. Scrivere l'equazione cartesiana di S.
5) Un R^2 l'insieme dei vettori (x,y) tali che x^2-y=0 non è un sottospazio: perché?
6) Per quali valori del parametro k l'insieme dei vettori (x,y,z) di R^3 tali che 2x+z+k-3=0 è un sottospazio ?
7) I vettori (x,y,z) di R^3 tali che 2^{x+2y-z} = 1 formano un sottospazio: dare dimensione e una base.
8) I vettori (x,y,z) di R^3 tali che 2^{x+2y-z} = 2 non formano un sottospazio: perché?
9) I vettori (x,y,z) di R^3 tali che $2^{x+2y-z+1}$ = 2 formano un sottospazio? In caso affermativo determinare dimensione e una base.

Prodotto scalare e spazi metrici.
Nello spazio vettoriale V sul campo degli scalari reali R si definisce prodottko scalare una funzione di VxV → R tale che per tutti i vettori **u, v, w** e per ogni scalare a si abbia;

a) **u.v = v.u**;
b) **u.(v+w) = u.v+u.w**;
c) **u**.(a**v**) = a(**u.v**);
d) se **u** ≠ **0** , **u.u** >0. (N.B. **0** è il vettore nullo, 0 è il numero zero).

Norma o modulo di un vettore è $|v| = \sqrt{v^2} = \sqrt{v.v}$ (la radice quadrata del suo quadrato scalare, si noti l'analogia col valore assoluto di un numero reale).
Si verifica che in R^n il prodotto scalare è la somma dei prodotti delle coordinate omologhe. Per esempio, se **u**=(1,2,3) e **v**=(4,-3,-2) , **u.v**= 1.4+2(-3)+3(-2) = -8; |**u**| = $\sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$ **.**
Due vettori si dicono ortogonali, se il loro prodotto scalare è zero. Per Esempio,in in R^2 sono ortogonali (2,3) e (3,-2); in R^3 sono ortogonali (a,b,c) e (c,c, -a-b), (1,3,4) e (6,2,-3), eccetera.
Proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio. Sia **v** un vettore di V, S un sottospazio. La proiezione ortogonale di **v** su S è il vettore **w** di S tale che **h** = **v** – **w** risulti ortogonale a tutti i vettori di S. Naturalmente basta controllare che **h** sia ortogonale ai vettori di base di S: infatti, se {$\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, … $\mathbf{s}_k$}è una base di S, ogni vettore **u** di S è loro combinazione lineare: **u** = $c_1\mathbf{s}_1+c_2\mathbf{s}_2+\ldots+c_k\mathbf{s}_k$ e quindi **h.u** = **h**.($c_1\mathbf{s}_1+c_2\mathbf{s}_2+\ldots+c_k\mathbf{s}_k$) =$c_1$(**h**. $\mathbf{s}_1$)+…+ c_k(**h**. $\mathbf{s}_k$) = c_1.0+…+c_k.0 = 0.





Esempio. Trovare la proiezione ortogonale di **v** =(3,1,-1) di R^3 su S di equazione x+y+z = 0.
Una base di S è {(1,-1,0), (1,0,-1)}. Il generico vettore **w** di S è **w** = (a+b, -a, -b) e perciò
v – **w** = (3-a-b, 1+a, -1+b). Impongo che **v** – **w** sia ortogonale a (1,-1,0) e (1,0,-1):

$$\begin{cases}(3-a-b,1+a,-1+b).(1,-1,0)=0\\(3-a-b,1+a,-1+b).(1,0,-1)=0\end{cases} \text{ da cui } \begin{cases}3-a-b-1-a=0\\3-a-b+1-b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b=2\\a+2b=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0\\b=2\end{cases} \text{ e quindi}$$

w = (a+b, -a, -b) = (2,0,-2).
Varietà lineari. Una varietà lineare L è l'insieme dei vettori che si ottengono sommando un vettore fissato **u** con tutti i vettori di un dato sottospazio S : L = **u** + S. S si chiama sottospazio direttore (direzione) di L. **Due varietà lineari L ed L' si dicono parallele** se la direzione di L è inclusa nella direzione di L' o viceversa. In R^2 le uniche varietà non banali sono quelle aventi come direzione i sottospazi di dimensione 1 : sono interpretabili come rette del piano. Due rette del piano sono parallele se hanno la stessa direzione. In R^3 abbiamo rette (di dimensione 1) e piani (di dimensione 2).
Per un piano di R^3, di equazione ax+by+cz+q=0, il vettore **n**=(a,b,c) è ortogonale al sottospazio direttore ax+by+cz=0 del piano. (E' evidente). Il vettore **n** si chiama **vettore normale** (al piano).
Due rette si dicono perpendicolari se i loro vettori direttori sono ortogonali.
Due piani si dicono perpendicolari se i loro vettori normali sono ortogonali.
Una retta e un piano si dicono perpendicolari se la direzione della retta è ortogonale a tutti i vettori del sottospazio direttore del piano e quindi se la direzione della retta è parallela alla normale al piano.

I vettori in tale contesto si chiamano anche **punti.**
Uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare diventa uno spazio metrico, quando si assuma come **distanza** di due punti P e Q la norma del vettore *differenza* Q-P, cioè del vettore che ha per componenti le differenze delle coordinate di Q e di P.
Esempi. ***Trovare*** la retta r per P(2,-1,0) parallela alla retta s di equazioni {x+y-7=0, x+y+2z=0}.
La direzione di s si ottiene da x+y=0, x+y+2z=0; S={t(1,-1,0)}, quindi r: x=2+t, y=-1-t, z=0 (equazioni Parametriche). Eliminando t ho le equazioni cartesiane di r: y = -1-x+2, z=0, ovvero

x+y-1=0, z=0.

ESERCIZI.

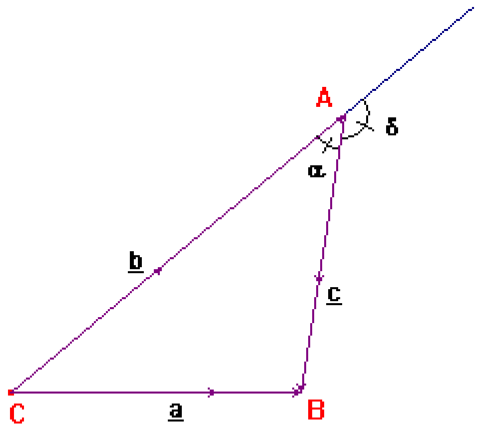
Determinare il piano β per P(3,1,-4) parallele al piano α: 2x+3y-5z+12356=0.
Equazione di β: 2(x-3)+3(y-1)-5(z+4)=0 → 2x+3y-5z -29=0.
Trovare le rette s per P(4,-2,-4) parallele al piano π: (x,y,z)=(5,7,4)+a(1,1,2)+b(2,-1,3).
Il sottospazio direttore H di π ha eq. param. x=a+2b, y=a-b, z=2a+3b. Eliminando i due parametri a e b ho b=a-y, x=a+2a-2y → a=(x+2y)/3, b=(x-y)/3, per cui H: z=(2x+4y)/3+x-y → 3z=5x+y ovvero H: 5x+y-3z=0. Le rette s richieste hanno eq. param. x=4+lt, y=-2+mt, z=-4+nt e il vettore direttore di s: (l,m,n) deve appartenere ad H: 5l+m-3n=0 → m=3n-5l. Equazioni parametriche delle rette s:
$\begin{cases} x = 4 + lt \\ y = -2 + (3n - 5l)t \\ z = -4 + nt \end{cases}$. Al variare della coppia <u>omogenea</u> di parametri (l,n) si hanno ∞^1 rette s (le ret0.te s dipendono da un **solo parametro essenziale** perché l ed n non possono essere entrambi nulli). Le rette s costituiscono un *fascio* di rette per P giacenti nel piano π' per P parallelo a π.
π': 5(x-4)+(y+2)-3(z+4)=0 ⇔ 5x+y-3z-30=0. (Verificarlo).
Determinare il piano passante per P(1,1,-3) e contenente la retta r : x+y+z+2=0, 2x-y-3z+5=0.
Suggerimento: fascio di piani di asse r : a(x+y+z+2)+b(2x-y-3z+5)=0, imporre il passaggio per P; si trova un'equazione da cui si ricava il rapporto a/b (o b/a).
Determinare i piani paralleli alla retta r : x+y+37=0, 2y-z=0 e passanti per il punto P(1,2,3). Verificare che formano un fascio di asse la retta s per P parallela ad r.
Calcolare la distanza del punto P(3,2,-1) dal piano π : x+2y-3z+4=0.
Posto in generale P(x_0, y_0, z_0) e π : ax+by+cz+q=0, verificare che la distanza che avete calcolato si può trovare anche con la formula $d(P,\pi) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
Calcolare la distanza del punto P(4,1,0) dalla retta r: x+2y-4=0, 2x+y-z-1=0.
Suggerimento: ricavare le equazioni parametriche di r che esprimono le coordinate del generico punto H di r; imporre che il vettore PH sia ortogonale alla direzione di r; si determina così il vettore PH ortogonale alla retta e la sua norma è la distanza richiesta.
Determinare la retta r passante per P(1,1,), incidente e perpendicolare alla retta s di equazioni parametriche: x=t, y=3-2t, z=2+3t. (Vedi esercizio precedente).
Determinare la retta h incidente e perpendicolare alle rette r: x=a, y=2+3a, z=-1+2a ed s: x=y=z.
Suggerimento: prendere il generico punto R su r, S su s, imporre che il vettore RS sia ortogonale ad r e ad s, eccetera. Calcolate anche la norma di RS: che cosa rappresenta tale norma?

Applicazioni alla trigonometria.

Sia x un numero reale, **u** e **v** due vettori. Il quadrato scalare del vettore x**u**+**v** è non negativo: $(x\mathbf{u}+\mathbf{v})^2 \geq 0$. Sviluppando il quadrato, segue che il trinomio $u^2x^2+2(\mathbf{u.v})x+v^2 \geq 0$ per ogni x. Si conclude perciò che il discriminante del trinomio sia ≤0 (non positivo). Se i vettori **u** e **v** sono non nulli, segue $-1 \leq \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{u.v} \leq 1$. (Ho indicato con lettere corsive le norme dei vettori, con lettere in neretto o sormontate da una freccia i vettori). La frazione vale 1 se i vettori sono paralleli e concordi, -1 se discordi, zero se ortogonali. Ciò induce a identificarla con il coseno dell'angolo compreso tra i due vettori. Siccome il prodotto scalare, come il prodotto numerico, è commutativo, segue che il coseno è una funzione pari. Da questo punto di partenza si potrebbe ricavare tutta la trigonometria.

Esercizi.

Ricavare il teorema del coseno (teorema di Carnot), utilizzando i vettori e il prodotto scalare. Guardando la seguente figura



Da **a=b+c,** segue $a^2=b^2+c^2+2(\mathbf{b.c})= b^2+c^2+2bc.\cos(\delta)= b^2+c^2-2bc.\cos(\alpha)$, essendo δ l'angolo adiacente ad α. (δ è l'angolo tra il verso di **b** da C verso A e il verso di **c** da A verso B).

Calcolare in funzione dei lati a, b, c di un triangolo il coseno e il seno dell'angolo α opposto al lato a. Sapendo che l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso, ricavare la formula di Erone, che esprime detta area in funzione dei tre lati a, b, c.

Dato un parallelepipedo di vertici opposti O(0,0,0) e P(3,4,5), avente tre spigoli sugli assi cartesiani, calcolare in gradi e minuti primi gli angoli che la diagonale OP forma con gli assi cartesiani. (Potete usare la calcolatrice). Calcolate la somma dei quadrati dei coseni di questi tre angoli: che cosa ottenete? Il risultato vale in generale? Se sì, quale proprietà di trigonometria piana generalizza?