

Ottavio Serra

Principio di induzione . Coefficienti binomiali. Serie geometrica.

a) Principio di induzione infinito-numerabile o principio di Peano. “Se la proprietà P è vera per $k \in \mathbb{N}$ e se, essendo vera per n, è vera per n+1, allora P è vera per ogni $n > k$. (k può essere zero). $[P(k) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)] \Rightarrow [(\forall n > k) P(n)]$.

Esempi.

1) Dimostrare che $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$.

4) *Ragionamento del tacchino.* Premetto un aneddoto dovuto a Bertrand Russell, che mostra come sia pericoloso affidarsi acriticamente al principio di induzione empirica, che pure è fondamentale nelle scienze sperimentali. “Un tacchino aveva notato che la contadina gli portava il mangime ogni mattina, col bello e il cattivo tempo, e cominciò a pensare che ciò fosse una legge di natura. La sua convinzione si rafforzava ogni nuovo giorno, perché il fenomeno si ripeteva con straordinaria regolarità. Tuttavia la sua teoria sulla legge di natura fu drammaticamente smentita la vigilia di Natale, quando la contadina arrivò non col mangime, ma con un coltello”. Esaminiamo ora il seguente esempio.

Sembra che se al prodotto dei primi n numeri primi si sommi 1, si ottenga ancora un numero primo. Verificare che ciò è vero per n=1, n=2, n=3, n=4:

Per n=1, 2+1=3: primo;

per n=2, 2.3+1=6+1=7: primo;

per n=3, 2.3.5+1=30+1=31: primo;

per n=4, 2.3.5.7+1=210+1=211: primo.

Ce la sentiremmo di concludere che la proprietà è vera per ogni n? Il tacchino direbbe di sì; e voi?

Se per n=4 fossimo giunti a una conclusione falsa, la proprietà sarebbe falsa, ma ora come facciamo? Non credo che qui si possa applicare il principio di Peano. Vogliamo provare con qualche altro valore di n, per esempio 5? Secondo voi, come va a finire?

Euclide dimostrò alcuni teoremi sui numeri primi facili da enunciare e anche facili da dimostrare. Il primo dice che esistono infiniti numeri primi, dimostrando che, comunque si prendano dei numeri primi p_1, p_2, \dots, p_n , ne esiste almeno uno diverso da essi. (Sapete che il numero 1 non è considerato primo? Sapete perché?) Il secondo dice che comunque si fissi un numero naturale n, esiste una sequenza di n numeri consecutivi nessuno dei quali è primo, cioè i numeri primi si vanno diradando illimitatamente. Provate a dimostrarli.

Però ci sono proposizioni aritmetiche molto semplici da enunciare, che, a tutt'oggi, sono indecise e forse indecidibili: (a) ogni numero pari è somma di due numeri primi?, (b) esistono infinite coppie di numeri primi *gemelli*? (numeri primi la cui differenza è 2, come 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19), (c) esistono o non esistono numeri *perfetti* dispari? (un numero si dice perfetto se è somma di tutti i suoi divisori, 1 incluso, come 6, 28,...),....

Alcune proposizioni aritmetiche, altrettanto semplici da enunciare, sono state dimostrate con mezzi matematici elevati. (a) ogni numero naturale è somma, al più, di quattro quadrati (Poincaré, fine del XIX° secolo), (b) l'equazione *pitagorica* $x^n+y^n=z^n$ non ammette soluzione con terne x,y,z di numeri naturali, se $n > 2$. (Enunciata da Fermat, dimostrata da Andrew Wiles nel 1996).

5) Il principio di induzione di Peano serve a confermare (o a rigettare) una proprietà ipotizzata, ma non ci dice nulla sul modo di arrivare a quella proprietà. Una via per arrivare alla 1) è la seguente:

$S=1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)+n$; per la proprietà commutativa si può scrivere:

$S=n+(n-1)+(n-2)+\dots+3+2+1$, per cui, sommando, $2S=(1+n).n$, donde la tesi.

Le formule 2) e 3) sembrano cadute dal cielo; è vero, si dimostrano per induzione, ma come ci si è arrivati?

Verificare che la **2)** si ricava sommando i cubi di $(0+1), (1+1), (2+1), \dots (n+1)$ e utilizzando la **1)**. Analogamente la **3)** si ricava sommando le quarte potenze e utilizzando la **2)** e la **1)**.

6) Verificare o rigettare la seguente formula: $1^4+2^4+\dots+n^4 = n^4 \cdot (n-1) + 1$.

7) Calcolare i seguenti limiti per $n \rightarrow \infty$ (per n che cresce ad oltranza):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3+2^3+\dots+n^3}{n^4}.$$

N.B. Applicare le precedenti formule **1), 2), 3)** e poi il **Teorema di Paperone**: Se $n \rightarrow \infty$, gli **Infiniti** di grado minore sono trascurabili rispetto a quelli di grado maggiore. Esempio:

$\lim_{n \rightarrow \infty} (9n^2 + 151n^3 - n^4) = -\infty$, che a sua volta discende dal **teorema di Paperino**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \text{miliardi}}{n} = 0.$$

8) Per $n \rightarrow \infty$ i limiti dei quozienti sono facili. Calcolare ora i seguenti limiti di somme o differenze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \sqrt{n^2 - 8n - 12} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n^2 - 8n - 12} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \sqrt{n^2 + 15} \right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt[3]{n^4 - 13n^3 - 16n} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 - \sqrt[3]{n^4 - 13n^3 - 16n} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_{10}(n)}{n}.$$

9) Calcolare in due modi diversi la somma $1+3+5+\dots (2n-1)$.

10) Calcolare $1^2+3^2+5^2+\dots (2n-1)^2$.

b) Calcolo combinatorio e coefficienti binomiali.

1) Disposizioni (semplici) di n oggetti di classe k (a k a k): sono le sequenze ordinate di k oggetti distinti scelti da un insieme di n oggetti. Il loro numero è $D_{n,k} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$, $k \leq n$.

Disposizioni con ripetizione (un oggetto può essere ripetuto). Il loro numero è $D_{n,k}^r = n^k$. **Questa volta k può superare n .**

Esempi: $D_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$; infatti, sia $\{a,b,c\}$ l'insieme di 3 oggetti e prendiamoli a 2 a 2: $(a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b)$. Invece le disposizioni con ripetizione sono $3^2=9$, perché, oltre alle precedenti, ci sono le disposizioni *ripetute* $(a,a), (b,b), (c,c)$.

In generale, due disposizioni si considerano diverse se differiscono per l'ordine o per almeno un elemento.

Se $k = n$, le disposizioni semplici sono $D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (Permutazioni P_n di n oggetti).

2) Combinazioni semplici di n oggetti di classe k sono i sottoinsiemi di k oggetti ciascuno scelti da un insieme di n oggetti. (l'ordine non conta). Permutando in ciascun sottoinsieme i k oggetti, si ottengono le disposizioni, perciò $k! \cdot C_{n,k} = D_{n,k}$ da cui

$$[1] C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \text{ Si osservi la proprietà di simmetria } C_{n,k} = C_{n,n-k}.$$

Siccome $C_{n,n} = 1$, volendo che la [1] sia sempre valida, occorre porre $C_{n,0} = 1$ e di conseguenza $0! = 1$.

I coefficienti $C_{n,k}$ si indicano anche con $\binom{n}{k}$ e si chiamano coefficienti binomiali.

Combinazioni con ripetizione $C_{n,k}^r = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$. (Dimostrarlo è complicato, fare solamente delle verifiche).

Esercizio, Dimostrare la relazione $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (Formula di Tartaglia).

Applicazione allo sviluppo del binomio:

$$(a + b)^n = (a + b) \cdot (a + b) \cdot \dots \cdot (a + b) = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n.$$

I coefficienti numerici delle potenze di a e di b sono i coefficienti binomiali e perciò

$$[2] (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Nota. Si pone $0! = 1$; sapreste dire perché? Questa fa il paio con $a^0 = 1$.

Esercizio. Verificare che $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ e che $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

c) Progressione e serie geometrica.

Sia data la successione di numeri reali $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$, con $a_{k+1} = q \cdot a_k$. Segue che

$$[1] \mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}.$$

1) Verificare che, se $q \neq 1$, posto $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ (*sommatoria*), risulta

$$[2], S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (\text{Calcolare } S_n - q \cdot S_n \text{ e utilizzare la [1]. Somma di una progressione geo-}$$

metrica).

In particolare, se $|q| < 1$,

$$[3] \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = a_1 \frac{1}{1 - q}.$$

Per esempio, per $q = 1/2$ (e $a_1 = 1$), $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, per $q = 1/3$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$.

La [3] si può giustificare per via cinematica (si pensi ad Achille e alla tartaruga).

2) Si può dimostrare che, se $\alpha > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ è convergente, cioè il suo limite è finito. (Si

può dimostrare per confronto con un integrale improprio o in altri modi, altrimenti credetemi sulla parola). Verifichiamo invece in modo elementare che, se $\alpha = 1$, la serie (detta serie armonica) diverge positivamente (tende a $+\infty$).

Infatti, $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + \dots = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \dots$ poi si associano 8 addendi, poi 16, poi 32 e così via e si osservi che in ogni parentesi la somma degli addendi supera $1/2$; perciò la somma della serie armonica supera la somma di infiniti addendi uguali a $1/2$ ed è perciò infinita. A maggior ragione, se $\alpha < 1$, la serie diverge positivamente.

3) Verificare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ è convergente. (Confrontare con una serie geometrica opportuna).

4) Verificare che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\text{Log}_2(n)}$ diverge (a $+\infty$). (Logaritmi in base 2)

5) Che fa la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\text{Log}_{\frac{1}{2}}(n)}$? (logaritmi in base $1/2$).