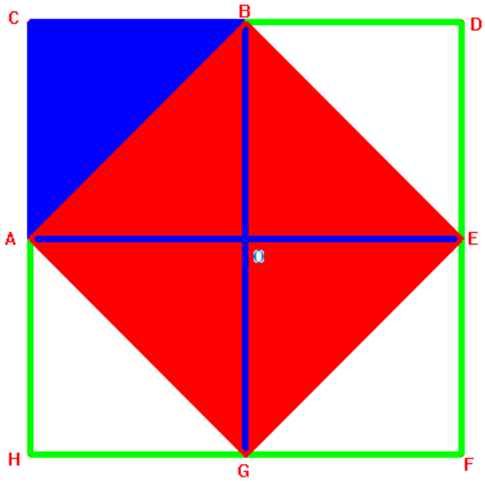
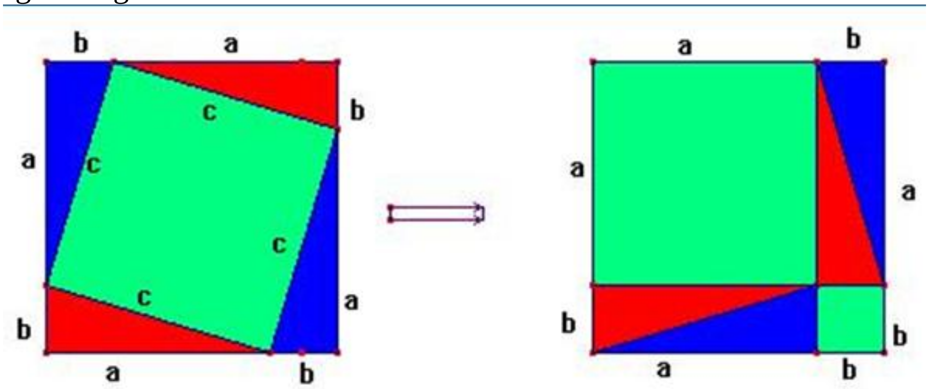
Ottavio Serra

Incommensurabili e costruzioni geometriche.

Nel dialogo “Menone” di Platone si narra come Socrate sia riuscito a far dimostrare a uno schiavo analfabeta un teorema di geometria. A noi non interessa la teoria platonica della metempsicosi e dell’apprendimento come ricordo di una vita precedente, ma l’aspetto matematico del problema: costruire un quadrato di area doppia di un quadrato dato.



Dal disegno si ricava che il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato(AOBC) è $\sqrt{2}$. Contro le loro attese, i pitagorici si accorsero che questo rapporto non è esprimibile come rapporto di numeri (numeri interi) e ciò decise il destino della matematica greca, che da allora si focalizzò sulla geometria. La figura dimostra anche il teorema di Pitagora nel caso particolare di un triangolo rettangolo isoscele. Il disegno seguente, dovuto al cinese Chou (II secolo a.C.) illustra la dimostrazione del teorema di Pitagora in generale.



Aristotele dimostra facilmente che la radice quadrata di ogni numero primo, non solo di 2, è irrazionale, cioè non è il rapporto di due segmenti commensurabili.

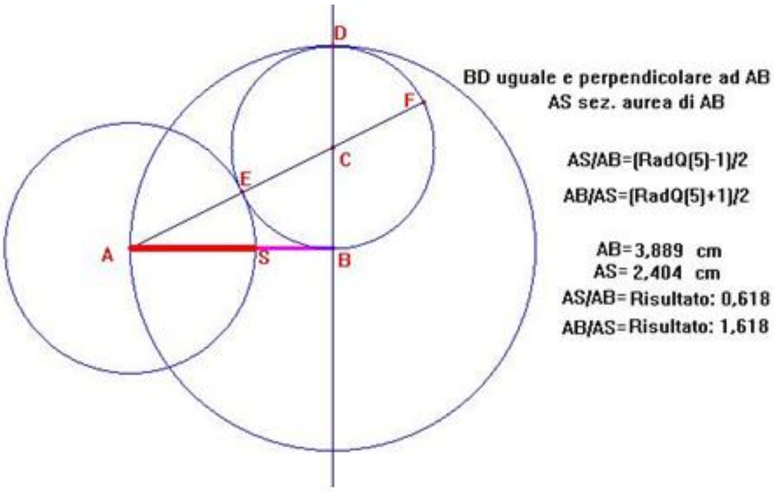
Seguendo l’indicazione di Aristotele, si dimostra facilmente che la radice quadrata di un numero primo non è razionale.

Sia p un numero primo. Se $\sqrt{p}$ fosse razionale, $\sqrt{p}$ = m/n, allora $m^2=pn^2$.

Il fattore primo p sta in m^2 un numero pari di volte, in pn^2 un numero dispari di volte. Ma $pn^2 = m^2$, perciò p sta in m^2 un numero pari di volte e nello stesso tempo un numero dispari di volte. Questa è una contraddizione, perciò $\sqrt{p}$ non può essere razionale.

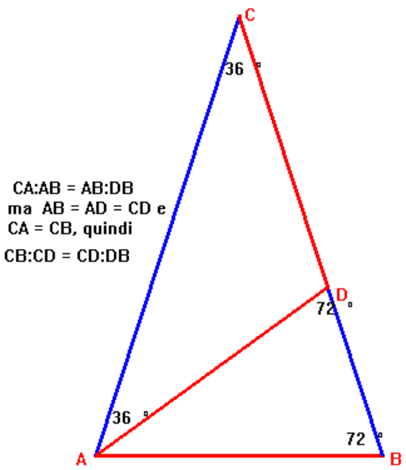
Tutte le costruzioni geometriche dei greci sono fatte con riga e compasso e portano spesso a numeri irrazionali.

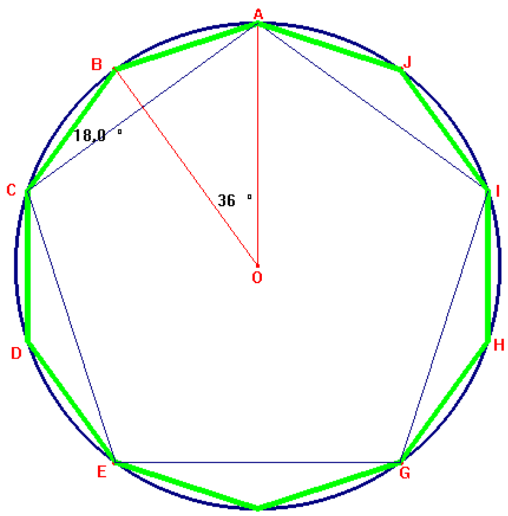
Famosa è la costruzione di Euclide della divisione un segmento in media ed estrema ragione: AB:AS=AS:SB. La proporzione fu detta *divina* dal matematico Luca Pacioli (1400). In seguito la media ragione AS fu chiamata *Sezione Aurea*. La costruzione seguente, realizzata con Cabri, riproduce quella di Euclide.



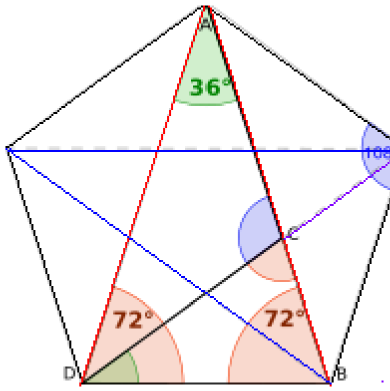
Il rapporto tra la sezione aurea di un segmento e il segmento stesso è $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Questo è un numero irrazionale, perciò la sezione aurea è incommensurabile col segmento. Spesso si considera il rapporto inverso $\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, che viene detto numero aureo. Posta uguale a 1 la sezione aurea di un segment x, dalla proporzione x:1=1:(x-1) si ricava l'equazione x^2-x-1=0, la cui soluzione positiva è il numero aureo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Scritta l'equazione nella forma x^2=x+1, si ricava x=1+1/x=1+1/(1+1/x) e quindi lo sviluppo in frazione continua del numero aureo: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$, risultato mirabile.

Si dimostra facilmente che la base di un triangolo isoscele avente l'angolo al vertice di 36° è la sezione aurea del lato oblique. Segue che il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio del cerchio circoscritto.



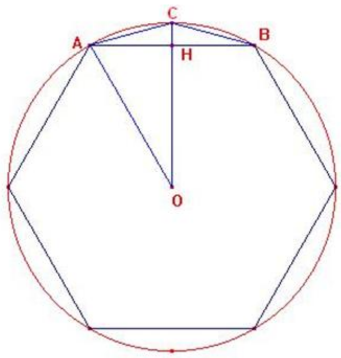


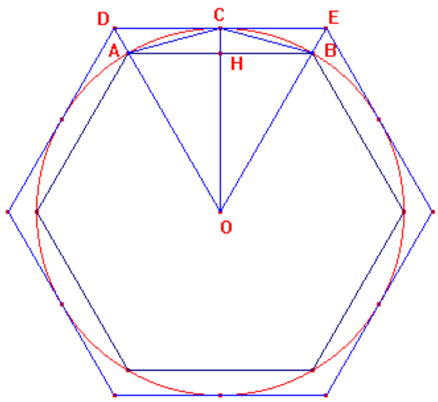
Congiungendo i vertici del decagono in modo alterno, si ottiene il pentagono regolare, che è una figura mirabile: il lato è sezione aurea di una diagonale, due diagonali si tagliano ciascuna in due parti tali che la maggiore è sezione aurea dell'intera diagonale e perciò è uguale al lato del pentagono, le cinque diagonali individuano a loro volta un pentagono regolare e così via.



A proposito, in un triangolo non ci sono diagonali, in un quadrangolo due, in un pentagono cinque; quante diagonali ci sono in un poligono di n lati?

Quadratura. Tutti i poligoni sono quadrabili, cioè è possibile costruire con riga e compasso il quadrato equivalente, ma il cerchio no. L'impossibilità di quadrare il cerchio fu dimostrata solo nel 1882, quando Lindemann (Carl Louis Ferdinand von **Lindemann,** Hannover 1852 – Monaco di Baviera 1939) dimostrò che π, rapporto tra area del cerchio e quadrato del raggio, ovvero rapporto tra circonferenza e diametro, è un numero *trascendente*. Archimede non poteva saperlo, ma escogitò un algoritmo eccellente per il calcolo approssimato, per difetto e per eccesso.





Se $AB=l_n$, lato dell'n-agono regolare, $AC=l_{2n}$, allora con un po' di geometria si trova $l_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}}$ e π(difetto)=$n.l_{2n}$. Però la formula che dà l_{2n} è instabile e conviene scriverla nella forma equivalente stabile $l_{2n}=\dfrac{l_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-l_n^2}}}$ (perché instabile? Perché stabile?).

Per ottenere π per eccesso si ricorre ai poligoni circoscritti. Si trova che il lato L_n=DE dell'n-agono circoscritto è $L_n=\dfrac{2l_n}{\sqrt{4-l_n^2}}$ e π(eccesso)=$n.L_{2n}$. (Vedi i miei programmi Pascal o Visual Basic nel mio sito *digilander.libero.it/ottavioserra0*).