OTTAVIO SERRA, COSENZA

Quesiti di aritmetica e di algebra

1°) Uno zio (americano) lascia ai nipoti (italiani) un'eredità che deve essere così divisa: al primo nipote toccano 1000$ più un decimo del rimanente; al secondo 2000$ più un decimo del rimanente, al terzo 3000$ più un decimo del rimanente; e così via. Alla fine si trova che tutti i nipoti hanno avuto la stessa somma. **Si chiede l'ammontare dell'eredità e il numero dei nipoti**. (Da Eulero).

2°) Una coppia fa un viaggio in aereo portando in tutto 94 libbre di bagaglio (siamo in America). Il marito deve pagare un dollaro e mezzo per peso eccedente e la moglie due dollari per lo stesso motivo. Se il marito avesse viaggiato da solo con lo stesso bagaglio complessivo (94 libbre), avrebbe dovuto pagare 13$ e 50 cents. **Quante libbre di bagaglio esente da pagamento può portare una persona?** (Da Polya).

3°) Le età di tre fratelli, alcuni anni fa, erano tali che le età dei due più piccoli, sommate, davano l'età del maggiore. Oggi la somma delle età di due fratelli è il doppio dell'età del terzo e gli anni trascorsi da allora sono i 2/3 della somma delle tre età iniziali.
Sapendo che oggi uno dei fratelli ha 21 anni, determinare l'età degli altri due. (Da Lewis Carroll).

4°) Dimostrare che ArcTang(8/15) = 2ArcTang(1/4) . [Non usare la calcolatrice!]

Quesiti di geometria

1°) Una matrice quadrata A di ordine n si dice alta se tutti gli elementi della diagonale e quelli al di sotto sono nulli (matrice triangolare superiore stretta)**. Dimostrare che A^k =O per ogni k maggiore o uguale ad n**. Si noti che A non è invertibile, però lo è I-A e risulta **$(I–A)^{-1}$ = ...**

2°) Sia U un insieme finito, A,B,C,... sottoinsiemi di U. Si ponga d(A,B) uguale al numero degli elementi della intersezione di A e del complementare di B, più il numero degli elementi dell'intersezione di B e del complementare di A: $d(A,B) = n(A \cap \bar{B}) + n(B \cap \bar{A})$. Ovviamente d(A,B) è non negativa; quand'è che è zero? E' anche ovvio che la funzione d è simmetrica. **Si dimostri che vale la relazione triangolare d(A,B) <= d(A,C)+d(C,B),** pertanto d è una distanza nell'insieme delle parti di U.

3°) Due sfere sono tangenti esternamente in un punto P. Si consideri una tangente esterna s alle due sfere e siano A e B i punti di contatto rispettivamente con la prima e con la seconda sfera. Al variare di s il segmento AB descrive un **tronco di cono**, di cui si chiede **l'area (laterale)** in funzione della lunghezza x del segmento AB. (Da Newton).

Quesiti di calcolo

1°) Risolvere in forma esplicita la seguente equazione alle differenze finite
[1] F(n+2)=F(n+1)+F(n), con le condizioni iniziali F(0)=a, F(1)=b. [$n \geq 0$]
Le soluzioni della [1] sono le successioni di Fibonacci. Dedurne che per ogni numero naturale n

l'espressione $\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$ è un numero intero positivo.

2°) Studiare la funzione integrale $F(x) = \int_0^x \sqrt[3]{\frac{2-t}{1-t^2}}dt$, dopo aver individuato il dominio della funzione integranda (dominio ristretto) e il dominio della funzione integrale (dominio esteso).

Quesiti di probabilità

1°) Un giocatore incallito possiede la somma a e gioca in una bisca che dispone di un capitale b, fino a quando il giocatore è rovinato (perde tutto) oppure fa saltare il banco.

Calcolare la **probabilità della rovina del giocatore** nell'ipotesi che ad ogni partita la probabilità di vittoria del giocatore è p e del banco è q>p (p+q=1). Che succede se p=q?

2°) N gettoni numerati da 1 ad N son via via estratti a caso senza rimpiazzo (come alla tombola). Si chiede di calcolare la **probabilità P** che si abbia **almeno una concordanza** (cioè che alla k-ma estrazione esca il gettone marcato k, per almeno un k). Quale famoso numero è il limite cui tende Q=1-P per N tendente all'infinito?

Quesiti di informatica

1°) Scrivere una versione **ricorsiva** e una **iterativa** della seguente funzione intera:
F(n)=F(n/2), se n è pari, F(n)=F((n-1)/2))+F((n+1)/2)), se n è dispari, con le seguenti condizioni iniziali: F(0)=0, F(1)=1.

2°) Scrivere una versione ricorsiva e una iterativa della funzione intera (di Fibonacci):
[1] F(n+2)=F(n+1)+F(n), con le condizioni iniziali F(0)=0, F(1)=1.
Verificare che F(30)=832.040, F(50)=12.586.269.025.
Quale delle due versioni è più efficiente?

3°) Si immagini di colorare i numeri naturali nel seguente modo: 1 ROSSO; 2 VERDE; 3 e 4 ROSSI, 5 e 6 VERDI; 7, 8 e 9 ROSSI, 10, 11 e 12 VERDI; e così continuando: 4 numeri ROSSI e 4 numeri VERDI, 5 numeri ROSSI e 5 numeri VERDI,... **Di che colore è un milione?**
Scrivere una funzione che restituisca il **colore** di un dato numero **n**.

4°) Scrivere una funzione che esgua il test di primalità di un numero naturale.

5°) Scrivere una procedura che fattorizza un numero naturale, per esempio: 48=2^4*3.

6°) Scrivere una procedura che approssima lo zero di una funzione continua im [a,b].

7°) Scrivere una procedura che approssima l’area di un trapezoide limitato dal grafico di una funzione non negativa, dall’asse x e dalle rette x=a, x=b.

8°) Scrivere una procedura che ordina una sequenza di numeri interi.