Ottavio Serra

Sistemi di equazioni differenziali

(omogenee a coefficienti costanti)

$\underline{x}' = A\underline{x}$.

1°) $A = \begin{pmatrix} 2,1 \\ 1,2 \end{pmatrix}$. Autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Siccome i due autovalori hanno molteplicità algebrica m.a. = 1, la matrice A è diagonalizzabile e le funzioni incognite si separano.

Autovettori $u_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}$. Molteplicità geometrica, ovviamente, uguale ad 1.

Base di autovettori $P = (u_1| u_2)$. Siccome $A = P.\Lambda.P^{-1}$, essendo Λ la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,3 \end{pmatrix}$, $\underline{x}' = A\underline{x} = P.\Lambda.P^{-1}x$, da cui $P^{-1}\underline{x}' = \Lambda(P^{-1}\underline{x})$ e posto $\underline{y} = P^{-1}\underline{x}$, si ottiene l'equazione

$$\underline{y}' = \Lambda.\underline{y}, \quad \text{quindi } \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^t \\ c_2e^{3t} \end{pmatrix} \text{ e infine}$$

$$\underline{x} = P\underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1,+1 \\ -1,+1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_1e^t \\ c_2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +c_1e^t + c_2e^{3t} \\ -c_1e^t + c_2e^{3t} \end{pmatrix} .$$

2°) $A = \begin{pmatrix} -1,-5 \\ +1,+3 \end{pmatrix}$. Gli autovalori sono complessi coniugati, $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$. Però il procedimento è lo stesso che nel caso di autovalori reali.

Autovettori $u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2-i \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2+1 \end{pmatrix}$ per cui

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 5 \\ -2-i \end{pmatrix} + c_2e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} 5 \\ -2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +5e^t(c_1e^{it} + c_2e^{-it}) \\ -2e^t(c_1e^{it} + c_2e^{-it}) - ie^t(c_1e^{it} - c_2e^{-it}) \end{pmatrix}.$$

Qui potrei dire di aver finito, ma la soluzione può essere data in termini di funzioni goniometriche, che mettono in luce il carattere oscillatorio delle funzioni $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2$, usando le formule di Eulero:

e^{it} = cost+isent, e^{-it} =cost-isent. Quindi

$x_1 = 5e^t(c_1\text{cost}+c_1\text{isent}+c_2\text{cost}-c_2\text{isent})$

$x_2 = -2e^t(c_1\text{cost}+c_1\text{isent}+c_2\text{cost}-c_2\text{isent})-ie^t(c_1\text{cost}+c_1\text{isent}-c_2\text{cost}+c_2\text{isent})$, da cui

$x_1 = 5e^t([c_1+c_2]\text{cost}+i[c_1 - c_2]\text{sent})$,

$x_2 = -2e^t([c_1+c_2]\text{cost}+i[c_1 - c_2]\text{sent}) -e^t(i[c_1 - c_2]\text{cost}-([c_1+c_2]\text{sent})$.

Posto $c_1+c_2 = a$, $i[c_1 - c_2] = b$, si ha infine

$x_1 = e^t(5a\text{cost}+5b\text{sent})$,

$x_2 = e^t([-2a-b]\text{cost}+[a-2b]\text{sent})$.

3°) $A = \begin{pmatrix} +2,+1 \\ -1,+4 \end{pmatrix}$. Det(A–λI) = 0 => $\lambda^2-6\lambda+9 = 0$, $\lambda = 3$ con m.a.=2.

L'unico autovettore è $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, perciò A non è diagonalizzabile. La si deve ridurre alla forma canonica di Jordan $J = \begin{pmatrix} 3,1 \\ 0,3 \end{pmatrix}$, trovando un vettore $\underline{v}$ che completi $\underline{u}$ a una base P={$\underline{u}$ | $\underline{v}$} di $\boldsymbol{R}^2$ in modo che A.P = P.J.

Si ottiene il sistema $\begin{cases} Au = 3u \\ Av = u + 3v \end{cases}$; la prima equazione è identicamete soddisfatta, la seconda fornisce $\underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+1 \end{pmatrix}$ e si può prendere, per esempio, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. [**Perché si può scegliere α ad arbitrio?**]

La matrice P sarà $\begin{pmatrix} 1,0 \\ 1,1 \end{pmatrix}$ e, posto $P^{-1}\underline{x} = \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, risolvo il sistema a scala $\underline{y}' = J\underline{y}$ ovvero

$(y_1)' = 3y_1 + y_2$

$(y_2)' = 3y_2$, da cui $y_2 = c_2e^{3t}$, $y_1' - 3y_1 = c_2e^{3t}$, da cui $y_1 = c_1e^{3t} + c_2te^{3}$. Infine

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 1,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1e^{3t} + c_2te^{3t} \\ c_2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t}(c_1 + c_2t) \\ e^{3t}(c_1 + c_2 + c_2t) \end{pmatrix}.$$

Ora studio due sistemi differenziali (sempre lineari omogenei a coefficienti costanti) in $\boldsymbol{R}^3$.

4°) $A = \begin{pmatrix} 3,1,-1 \\ 0,4,-1 \\ 0,5,-1 \end{pmatrix}$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$, di m.a. =1, e $\lambda_2 = 3$, di m.a. =2.

L'autovettore associato a $\lambda_1 = -1$ è $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, mentre all'autovalore 3 sono associati due autovettori linearmente indipendenti $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, perciò A è diagonalizzabile e la soluzione è

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + c_2e^{3t} \\ c_1e^{-t} + c_3te^{3t} \\ 5c_1e^{-t} + c_3te^{3t} \end{pmatrix}$$

5°) $A = \begin{pmatrix} 4,1,2 \\ -2,1,0 \\ 0,0,2 \end{pmatrix}$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 3$ con m.a. = 1 e $\lambda_2 = 2$ con m.a. = 2.

Per $\lambda_1 = 3$ l'autovettore è $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, per $\lambda_2 = 2$ $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ di m.g. = 1, perciò A non è diagonalizzabile. La si può però ridurre alla forma canonica di Jordan, $J = \begin{pmatrix} 3,0,0 \\ 0,2,1 \\ 0,0,2 \end{pmatrix}$.

Assunta come base di $\boldsymbol{R^3}$ la matrice $P=(\underline{u}_1 \mid \underline{u}_2 \mid \underline{v})$ con $\underline{v}$ tale che AP = PJ, si ottiene $A\underline{v} = \underline{u}_2 + 2\underline{v}$ (Occhio alla terza colonna di J), da cui segue .

$\begin{pmatrix} +2,+1,+2 \\ -2,-1,+0 \\ +0,+0,+0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ +0 \end{pmatrix}$ e perciò $\underline{v} = {}^t(v_1, v_2, v_3) = {}^t(-1, 0, 3/2)$, $P = \begin{pmatrix} 1,1,-1 \\ -1,-2,0 \\ 0,0,3/2 \end{pmatrix}$.

Da $\underline{x}' = A\underline{x} = PJP^{-1}\underline{x}$, posto $P^{-1}\underline{x} = \underline{y}$, segue $\underline{y}' = J\underline{y}$, da cui

$y_1' = 3y_1$, $y_2' = 2y_2+y_3$, $y_3' = 2y_3$. Si ottiene .

$y_1 = c_1e^{3t}$, $y_3 = c_3e^{2t}$, e $y_2' = 2y_2+c_3e^{3t}$, che dà $y_2 = e^{2t}(c_2+c_3t)$. Infine:

$\underline{x} = P\underline{y} = c_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (c_2+c_3t)e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{3t} + (c_2 - c_3 + c_3t)e^{2t} \\ -c_1e^{3t} - (2c_2 + 2c_3t)e^{2t} \\ \frac{3}{2}c_3e^{2t} \end{pmatrix}$$