Ottavio Serra

Serie di potenze

1) Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^k}$$

al variare del parametro reale k. (Utilizzare il confronto con un integrale improprio).

La serie proposta ha lo stesso carattere di convergenza dell'integrale

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\log x)^k}=\int_2^{+\infty}\frac{d(\log x)}{(\log x)^k}.$$

Questo diverge positivamente per $k\leq 1$. Invece per k>1 converge a $\frac{1}{(k-1).(\log 2)^{k-1}}$. Perciò la serie converge per k>1.

2) Studiare la serie

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{x^k}{k.(k+1)!}.$$

Il raggio di convergenza r = $+\infty$, perciò la serie converge assolutamente su tutto ***R*** e uniformemente su ogni intervallo chiuso e limitato a una funzione f(x), che ora determinerò.

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{1}{x^2}\sum_{h=2}^{\infty}\frac{x^h}{h!}=\frac{1}{x^2}(e^x-x-1),$$

perciò

$$f(x)=\int_0^x\frac{e^t-t-1}{t^2}dt.$$

(N.B. Non esiste una primitiva elementare della funzione integranda).

3) Studiare la serie $\displaystyle\sum_{0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$.

Il raggio di convergenza è 1, perciò la serie converge assolutamente nell'intervallo aperto A=]-1, 1[e uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in A. Si noti che la serie converge anche negli estremi di A. Per x=1, la serie converge ad 1 (è una serie numerica ***telescopica***), per x=-1 la serie, a segni alterni, converge a 0,386…

Determino ora la somma della serie.

Detta f(x) la somma della serie, posto f(x)= g(x)/x^2, si ha

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)},$$

da cui segue $g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ con g'(0) = 0 e $g''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, somma di una serie geometrica. Perciò

$$g'(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\log(1-x)$$

e $g(x)=\int_0^x-\log(1-t)dt=[(1-t)\log(1-t)-(1-t)]_0^x=(1-x)\log(1-x)+x$, per cui infine

$$f(x)=\frac{(1-x)\log(1-x)+x}{x^2},$$

valida per x appartenente all'insieme aperto A= $(-1,0)\cup(0,1)$.
Si noti che per x=0, la serie converge a 0, mentre il limite di f(x) è 1/2.
In realtà la f(x) rappresenta la serie nell'insieme $[-1,0)\cup(0,1]$, perché il limite per x→1 di f(x) è uguale a 1 e f(-1) = 2log2-1 = 0,386.

4) Detta f(x) la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty}(n-x)e^{x-n-1}$ **,** calcolare $J=\int_0^1 f(x)dx.$

La serie converge uniformemente su tutto ***R***.

$$J=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n+1}}\int_0^1(n-x)e^x dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n+1}}[(n-x)e^x+e^x]_0^1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n+1}}[ne-(n+1)]$$ e infine

$$J=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{e^{nè1}}=\frac{1}{e}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{e^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{e^{n+1}}=\frac{1}{e}.$$

5) Data la funzione $f(x)=\frac{1}{(1-x)(2-x)^2}$, **svilupparla in serie di potenze con punto iniziale $x_0=0$.**

Condizione necessaria per lo sviluppo in serie è x diverso da 1 e da 2. Siccome $\frac{1}{(2-x)^2}=\frac{d}{dx}\frac{1}{2-x}$, sotto la condizione $|x|<1$ si otterrà

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{d}{dx}\frac{1}{2-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1}$$ e infine

$f(x)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}.\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{x}{2})^{n-1}$. Una sua approssimazione è

$$f(x)=\frac{1}{4}(1+x+x^2+x^3+...).(1+x+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x^3+...)=\frac{1}{4}(1+2x+\frac{11}{4}x^2+\frac{13}{4}x^3+...)$$

Una verifica si ha per x=1/2; f(1/2) = 8/9 =0.88888888… Lo sviluppo in serie dà 0.77, se ci si limita alla terza potenza. Per ottenere 0,8888889, si deve procedere fino alla 22ma potenza (la convergenza è lenta).
Se invece si prende un x più piccolo, per esempio x=0.1, si ha f(0.1)=0.307787, mentre lo sviluppo fino alla terza potenza dà 0.30768.

5) Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ e calcolarne la somma nel campo di convergenza uniforme.

Il raggio di convergenza è 1, perciò la serie converge assolutamente per x in]-1, 1[e uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto nel campo di convergenza assoluta. Si noti che la serie converge anche nell'estremo sinistro x = -1, ma non assolutamente.

Detta f(x) la somma della serie, $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$, perciò $f(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=\log\frac{1}{1-x}$.

Si noti che, per x=-1, la serie numerica converge, lentamente perché la convergenza non è assoluta, a log(1/2):

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\log(1/2)$, da cui segue $\log 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

6) Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$.

Questa serie converge assolutamente per $|x|<1$ e non converge per $|x|\geq 1$. Detta f(x) la somma della serie, si ha $f(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$. Posto $g(x)=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$, si ottiene

$f(x)=x.g'(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$. Verificare che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=f(1/2)=2$, approssimando convenientemente la serie numerica.

7) Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty}n^2 3^n x^n$.

Il raggio di convergenza è 1/3. La serie non converge agli estremi del campo di convergenza. Per x $\geq$1/3 la serie diverge positivamente, per x $\leq$ -1/3 la serie è indeterminata. Calcolo la funzione f(x) somma della serie in un intervallo chiuso contenuto nell'intervallo di convergenza.

$$f(x) = x.\sum_{n=1}^{\infty} n^2 3^n x^{n-1} = x.g'(x)$$,

essendo $g(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} 3^n n^2 t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(3x)^n$.

Siccome

$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ = $\frac{x}{(1-x)^2}$ **(vedi esercizio 5), sarà g(x) =** $\frac{3x}{(1-3x)^2}$ **e g'(x) =** $\frac{3(1+3x)}{(1-3x)^3}$ per cui infine

$$f(x) = \frac{3x(1+3x)}{(1-3x)^3}.$$

Verificare, che, per x=1/6, la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = f(\frac{1}{6}) = 6.$ (Procedere a una conveniente approssimazione della serie numerica).

8) Ricordando la somma delle serie standard:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ **, per tutti i valori reali di x,**

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$ **, per tutti i valori reali di x,**

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = senx$ **, per tutti gli x reali,**

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}.x^n}{n} = \log(1+x)$ **, per** $|x| < 1$**,**

verificare le seguenti uguaglianze:

$e^{-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}$,

$sen^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$ **, (utilizzare cos(2x) = 1-2sen²x),**

$sen^3 x = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ **, (utilizzare sen(3x) = 3senx-4sen³x),**

$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ **, per** $|x| < 1$ **(per x=1/3 si ottiene log2),**

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$, **per** $|x|<1$,

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}[sen\frac{2\pi(n+1)}{3}]x^n$$, **per** $|x|<1$,

(Suggerimento: $(x^2+x+1).(x-1) = x^3-1$).