OTTAVIO SERRA
Esercitazioni di calcolo 2
Primitive di funzioni irrazionali e trigonometriche.

N.B. Le funzioni integrande dei vari tipi seguenti possono essere presenti come argomento di funzioni razionali più generali.

Tipo (1)

$\int\sqrt{1-x^2}\,dx$. Cambiamento di variabile : x=sent, dx=costdt. Segue

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}(t+sent\cos t)=\frac{1}{2}(arcsenx+x\sqrt{1-x^2})+c$$

Esempio: $J=\int\sqrt{2+x-x^2}\,dx$. Si tratta di ridurre l'argomento della radice al tipo **(1).**

$$2+x-x^2=2-(x^2-x)=2-\left[(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\right]=\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$$ e pertanto

$J=\int\sqrt{2+x-x^2}\,dx=\int\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}\,dx$ e, posto x-1/2 = z, $J=\int\sqrt{\frac{9}{4}-z^2}\,dz$.

Posto z=3t/2,

$$J=\frac{9}{4}\int\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{9}{8}(arcsent+t\sqrt{1-t^2})+c=\frac{9}{8}(arcsen\frac{2x-1}{3}+\frac{2x-1}{3}\sqrt{1-(\frac{2x-1}{3})^2})+c$$

E in definitiva, $J=\frac{9}{8}arcsen\frac{2x-1}{3}+\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+c.$

Tipo (2)

$\int\sqrt{x^2-1}\,dx.$ Poniamo $\sqrt{x^2-1}=x-t$, da qui segue $x=\frac{t^2+1}{2t},\sqrt{x^2-1}=\frac{1-t^2}{2t},dx=\frac{t^2-1}{2t^2}dt.$

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\int\frac{1-t^2}{2t}\frac{t^2-1}{2t^2}dt=-\frac{1}{4}\int\frac{(t^2-1)^2}{t^3}dt=-\frac{1}{4}(\frac{1}{2}t^2-2Ln(t)-\frac{1}{2t^2})=$$
$$\frac{1}{2}Ln(x-\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}.$$

Esempio: $J=\int\sqrt{x^2+x-2}\,dx=\int\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}\,dx$. Posto x+1/2=z, e poi z=3t/2, si avrà:

$J=\frac{9}{4}\int\sqrt{t^2-1}\,dt=\frac{9}{4}(\frac{1}{2}Ln(t-\sqrt{t^2-1})+\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-1})$, e, posto $t=\frac{2x+1}{3}$, si otterrà

$$J=\frac{9}{8}Ln(2x+1-2\sqrt{x^2+x-2})+\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x-2}+c.$$

Tipo (3)

$\int\sqrt{x^2+1}\,dx.=\frac{1}{2}Ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+c,$ con una sostituzione analoga a quella usata nel tipo (2).

Esempio: $J=\int\sqrt{4x^2+3}\,dx.$ Posto $x=\frac{t\sqrt{3}}{2}$, si ottiene, $J=\frac{3}{4}Ln(\sqrt{4x^2+3}+2x)+\frac{1}{2}x\sqrt{4x^2+3}+c.$

Tipo (4)

$\int\sqrt{ax^2+bx+c}.dx$. **Se gli zeri del trinomio sono reali** (e distinti, altrimenti la radice sparisce), detti α e β gli zeri, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$ e col cambiamento di variabile $\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha} = t^2$, si ottiene la razionalizzazione della funzione integranda.

Esempio:

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}}dx = \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}}dx$$. Posto $\frac{3-x}{x-2} = t^2$, si ricava

$x = \frac{3+2t^2}{1+t^2}, x-2 = \frac{1}{1+t^2}, dx = \frac{-2t.dt}{(1+t^2)^2}$ e perciò $J = -2\arctan(t)+c = -2\arctan\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}+c.$

N.B. Scrivendo $\sqrt{-x^2+5x-6} = (3-x)\sqrt{\frac{x-2}{3-x}}$ e ponendo $\frac{x-2}{3-x} = t^2$, si sarebbe ottenuto

$J = 2\arctan\sqrt{\frac{x-2}{3-x}}+c$. Verificare che le due primitive sono uguali a meno di una costante.

Se gli zeri del trinomio sono complessi, i coefficienti a e b devono essere positivi, altrimenti la radice quadrata non sarebbe reale. In tal caso, messa in evidenza $\sqrt{a}$, o ci si riduce al **Tipo (3)** o si pone direttamente $\sqrt{x^2+px+q} = x+t$, (oppure x-t).

Esempio: $J = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$ Si ponga $\sqrt{x^2+x+1} = x-t$; $x = \frac{t^2-1}{2t+1}, dx = \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt.$

Infine $J = -2\int \frac{dt}{2t+1} = -Ln|2t+1|+c = -Ln\left|2x-2\sqrt{x^2+x+1}+1\right|+c$.

Verificare che J si può scrivere: $J = Ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+c.$

Esercizi. Verificare che

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}Ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)\right|+c.$$

Posto $J = \int \frac{x-1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$, con la sostituzione $x-\frac{1}{2} = z$ e poi $z = \frac{3}{2}t$ in modo da ridurre la radice al denominatore alla forma standard $\sqrt{1-t^2}$, verificare che si ottiene

$J = -\sqrt{2+x-x^2}-\frac{1}{2}arcsen\frac{2x-1}{3}+c$;

invece col cambiamento di variabile $\frac{2-x}{x+1} = t^2$ (fare i calcoli) si ottiene

$J = -\sqrt{2+x-x^2}+\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}+c$. Se non ci sono errori, la somma

$\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}+\frac{1}{2}arcsen\frac{2x-1}{3}$ deve essere costante. Quanto vale?

Calcolare $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ (Risultato: $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}-arcsen(x)+c$).

Integrazione di alcuni tipi di funzioni trigonometriche.

1) J= $\int sen^n x \cos^m x.dx$

Se n oppure m è dispari, la cosa è semplice. Sia, per esempio, m dispari. Allora J= $\int sen^n x \cos^{m-1} x.d(senx)$, e siccome m-1 è pari, J si esprime come un polinomio in seni.

Esempi.

$$J = \int sen^4 x \cos^3 x.dx = \int sen^4 x(1 - sen^2 x).d(sen(x) = \frac{1}{5} sen^5 x - \frac{1}{7} sen^7 x + c.$$

$$J = \int sen^5 x \cos^8 x.dx = \int \cos^8 x(1 - \cos^2 x)^2.d(-\cos x) =$$

$$\int (2\cos^{10} x - \cos^8 x - \cos^{12} x)d(\cos x) = \frac{2}{11}\cos^{11} x - \frac{1}{9}\cos^9 x - \frac{1}{13}\cos^{13} x + c.$$

Se n ed m sono entrambi pari, si arriva a una formula ricorsiva, su potenze di soli seni o di soli coseni..

Esempio: $\int sen^8 x \cos^6 x.dx = \int sen^8 x(1 - sen^2 x)^3 dx$ (Solo potenze di senx).

$\int sen^6 x \cos^8 x.dx = \int (1 - \cos^2 x)^3 \cos^8 xdx$ (Solo potenze di cosx).

$$S_{2n} = \int sen^{2n-1} x.senx.dx = -sen^{2n-1} x \cos x + \int (2n-1) sen^{2n-2} x \cos^2 x.dx =$$

$$-\cos x sen^{2n-1} x + (2n-1)S_{2n-2} - (2n-1)S_{2n} \Rightarrow S_{2n} = \frac{2n-1}{2n} S_{2n-2} - \frac{1}{2n}\cos x sen^{2n-1} x.$$

Analogamente, $C_{2n} = \frac{2n-1}{2n} C_{2n-2} + \frac{1}{2n} senx \cos^{2n-1} x$.

Esercizi.

$$(1)\int sen^4 xdx, (2)\int sen^6 xdx, (3)\int \cos^4 xdx, (4)\int \cos^6 xdx$$

$$(5)\int sen^4 x \cos^2 xdx, (6)\int x.sen^4 xdx, (7)\int x^2 \cos^2 xdx.$$

Risposte:

(1) $-\frac{1}{4}\cos x sen^3 x - \frac{3}{8}\cos x senx + \frac{3}{8} x + c$

(2) $-\frac{1}{6}\cos x sen^5 x - \frac{5}{24}\cos x sen^3 x - \frac{5}{16}\cos x senx + \frac{5}{16} x + c$

(3) $\frac{1}{4} senx \cos^3 x + \frac{3}{8} senx \cos x + \frac{3}{8} x + c$

(4) $\frac{1}{6} senx \cos^5 x + \frac{5}{24} sen \cos^3 x + \frac{5}{16} senx \cos x + \frac{5}{16} x + c$, **(5)** $\int (sen^4 x - sen^6 x)dx$

(6) $x(-\frac{1}{4}\cos x sen^3 x - \frac{3}{8}\cos x senx + \frac{3}{8} x + \frac{1}{16} sen^4 x + \frac{3}{16} sen^2 x - \frac{3}{16} x^2 + c$

(7) $x^2(\frac{1}{2}senx\cos x+\frac{1}{2}x)+\frac{1}{2}x\cos^2 x-\frac{1}{4}senx\cos x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}x^3+c$.

Altri tipi di sostituzione.

$\int f(senx,\cos x)dx,$ con f funzione razionale. Salvo tecniche particolari, da valutare volta per volta, un cambiamento di variabile valido in generale è $\tan(\frac{x}{2})=t, x=2\arctan(t), dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

(N.B, $senx=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$). **Tan** è la funzione tangente.

$\int f(sen^2x,\cos^2x,\tan x)dx$. In generale, tan(x)=t. $x=\arctan(t), dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

(N.B. $sen^2x=\frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$).

Esercizi.

$\int \tan^4 x dx=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+c$, (Suggerimento: $\tan x=t$).

$\int sen^5 x\sqrt[3]{\cos x}dx=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x}+c$, ($senx=t$).

$\int \frac{dx}{\sqrt{senx\cos^3 x}}=2\sqrt{\tan x}+c$, ($\tan x=t$).

$\int \frac{dx}{\cos^6 x}=\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+c$, (porre $\tan x=t$).

$\int \frac{\cos^2 x}{sen^6 x}dx=-\frac{1}{5}\cot^5 x-\frac{1}{3}\cot^3 x+x$, (porre $\cot x=t$). **Cot** è la funzione Cotangente.

$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+c$, (porre x+1=z e $\sqrt{z^2+1}=z+t$, oppure x+1=tan t).

$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}=2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+c$, (porre x-1=z e $\frac{z-1}{z}=t^2$).