ESERCITAZIONI DI CALCOLO 2

Ottavio Serra

Funzioni primitive e tecniche di calcolo.

Data una funzione f(x), una sua primitiva è una funzione F(x) tale che F'(x) = f(x).
Notare che in tal caso anche F(x)+c è una primitiva di f(x), per ogni costante c.
La generica primitiva di f(x) si chiama integrale di f(x) e si indica con

$$\int f(x)dx$$

Che ricorda una somma; serve infatti a calcolare l'area racchiusa tra l'asse x, e il grafico di f in un intervallo [a,b]dell'asse x come limite di una somma di rettangoli.
Il simbolo dx si chiama differenziale di x e ricorda qual è la variabile.
In generale, il differenziale di una funzione f(x) è il prodotto tra la derivata di f e l'incremento di x: df=f'(x)*Δx . in particolare, se f(x)=x, dx=Δx.

Esempi

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + c; \int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + c, ..., \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ se\, n \neq -1,\ \int \frac{1}{x}dx = Ln|x| + c.$$

$$\int \mathrm{sen}(x)dx = -\cos(x) + c,\ \int \cos(x)dx = \mathrm{sen}(x) + c,\ \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan g(x) + c,\ \int \frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)}dx = -\cot ang\ (x) + c, \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \mathrm{arcsen}\ (x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arc\tan g(x) + c$$

Tutte le primitive precedenti sono immediate.
Siccome la derivata è un operatore lineare, anche l'operatore inverso, cioè la primitiva o integrale indefinito è lineare:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;\ \int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Notare anche la seguente proprietà: se l'integrale di f(x) è g(x) , allora l'integrale di f(ax) è g(ax)/a, come si verifica immediatamente per derivazione. Esempi:

$$\int \mathrm{sen}(3x)dx = \frac{-\cos(3x)}{3} + c,\ \int e^{-4x}dx = \frac{e^{-4x}}{-4} + c.$$

Questa regola è un caso particolare del teorema di integrazione per sostituzione (cambiamento di variabile), che vedremo tra poco.

Esercizi Integrare le seguenti funzioni:

$$\frac{1}{1+4x^2},\ \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}},\ \frac{1}{\cos^2(2x)},\ \cos^2(7x) + \mathrm{sen}^2(7x)$$

Con un po' di trigonometria si integrano facilmente anche

$$\operatorname{sen}(x)\cos(x) \ e \ \cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x).$$

Integrazione per sostituzione

A volte non si sa integrare f(x) rispetto ad x; se però si riesce a trovare una funzione invertibile x=g(t), allora dx=g'(t)dt e per sostituzione si ha:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt$$

Se il secondo integrale si sa calcolare, e sia h(t) una sua espressione, si ottiene il primo integrale con la sostituzione inversa

$$t = g^{-1}(x)$$

Esempi.

$$\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx = (posto\ \operatorname{sen}(x)=t)\ \int t.dt = \frac{1}{2}t^2+c=\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x)+c$$

$$\int \operatorname{sen}^3(x)dx = \int \operatorname{sen}^2(x)d(-\cos x) = \int (\cos^2(x)-1)d(\cos x) = \frac{1}{3}\cos^3(x)-\cos(x)+c$$

La sostituzione è stata t=cos(x).

$$J = \int x\sqrt{x^2+3}dx, t = x^2+3, dt = 2xdx,\ \ J = \int \frac{1}{2}\sqrt{t}dt = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+3)^3}+c.$$

Esercizi. Integrare le seguenti funzioni:

$$\cos^3(x),\ \ \frac{e^{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}},\ \ \frac{1}{xLn(x)},\ \ \frac{Ln^3(x)}{x},\ \ \frac{1}{xLn(x)(Ln(Ln(x)))},\ \ (1+\tan^2 x)e^{\tan\ x}$$

(N.B. tan è la funzione "tangente).
Integrare ancora:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}},\ \ \frac{1}{e^x+e^{-x}},\ \ \sqrt[3]{4x+3},\ \ xe^{-x^2},\ \ \frac{arc\tan x}{1+x^2}.$$

E' data la funzione integranda

$$f(x) = g(x).\sqrt[3]{4x^2+x+7}$$

Come va scelta la funzione g(x) perché f(x) si possa integrare facilmente per sostituzione?

Calcolare ancora: $\int sen^3 x dx, \int \cos^3 x dx, \int (x^2+1)\sqrt[4]{x^3+3x+1}dx$

(suggerimento: cosx=t, senx=t, $x^3+3x+1=t$.
Ancora:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}dx, (x=t^2), \int \frac{1}{xLn(x)}dx, \int \frac{1}{xLn(x)(LnLn(x))}dx, \int (1+\tan^2 x)e^{\tan x}dx.$$

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx, \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx, \int xe^{-x^2}dx, \int \frac{\cos z}{sen^3 z}dz.$$

Integrazione per parti.
Formula:

$$\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

Per dimostrarla basta derivare ambo i membri.
Che **g'(x) sia una derivata** di g(x) non ce l'ha scritto in fronte, occorre arguirlo.

Esempi: $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

(Ho preso x come fattore finito f(x) ed e^x come fattore differenziale g'(x)).

$$\int xsen(x)dx = -x\cos(x) - \int -\cos(x)dx = -x\cos(x) + sen(x) + c$$

$$\int x\cos(x)dx = x.sen(x) - \int sen(x)dx = x.sen(x) + \cos(x) + c$$

(In questi ultimi due esempi ho preso x come fattore finito f(x) perché…).

Esercizi.

$\int Ln(x)dx$ (prendere g'(x)=1, f(x)=Ln(x).

$\int arcsenx.dx, \int \arctan x.dx, \int xLn(x)dx, \int arcsen(3x)dx,$

$\int x.\arctan(x)dx, \int x^2.\arctan(x)dx, \int x^3 \arctan(x)dx$

$\int sen(\sqrt{x})dx, \int \arctan(\sqrt{x})dx, \int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

(Porre prima $\sqrt{x}=t$ e poi integrare per parti). $\sqrt{x}=t$

A volte si ritorna all'integrale di partenza, che si calcola come l'incognita di un'equazione.

Esempio:

$$J = \int e^x \cos(x)dx = e^x sen(x) - \int e^x sen(x)dx = e^x sen(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

$$\Rightarrow 2J = e^x(sen(x)+\cos(x)) + c \Rightarrow J = \frac{1}{2}e^x(senx + \cos x) + c.$$

Esercizi

$\int sen^2(x)dx, \int \cos^2(x)dx$, già calcolati con altro procedimento. Porre nel primo f=senx, g'=senx, nel secondo f=cosx, g'=cosx .

Analogamente $\int sen^4(x)dx,$ ponendo f= $sen^3 x, g' = senx$; $\int \cos^4 x dx$.

Altri esercizi. $\int sen^3 x \cos^3 x.dx,$ osservando che cos(x)dx=d(senx);

$\int \cos^2 x sen^3 x.dx, \int \cos^3 x sen^2 x.dx, \int \cos^2 x sen^4 x.dx, \int \cos^4 x sen^4 x.dx$.

$\int x^3 e^{-x^2} dx, \int sen\sqrt{x}dx, \int x^5 e^{x^2} dx,$ $\int x^4 Ln(x)dx.$ $\int sen(\sqrt[3]{x})dx$.

Integrazione di alcuni altri tipi di funzioni :

(a) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, porre: x = a.sen(t)$

(b) $\int \tan(x)dx, \int \cot an(x)dx,$ $\int \frac{1}{senx}dx, \int \frac{1}{\cos x}dx$.

In (b) i primi due integrali sono facili, per il terzo osservare che sen x=2sen(x/2)cos(x/2) e che il numeratore si può scrivere $\cos^2 \frac{x}{2} + sen^2 \frac{x}{2}$;

nel quarto esprimere il coseno come seno del complementare di x.

In entrambi i casi si può usare la sostituzione $\tan \frac{x}{2} = t,$ da cui segue $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Verificare che risulta $\int \frac{1}{senx}dx = \log\left|\tan \frac{x}{2}\right| = \log\left|\frac{1-\cos x}{senx}\right|$, $\int \frac{1}{\cos x}dx = \log\left|\frac{1+senx}{\cos x}\right|$.

Integrazione delle funzioni razionali.

Data la frazione algebrica $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$ R(x) è un polinomio di grado minore di quello di B(x). Siccome Q(x) si integra facilmente, tutto sta ad integrare la frazione propria $\frac{R(x)}{B(x)}$.

1° caso : B(x) ha solo zeri reali; allora

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{c}{x-x_2} + \frac{d}{(x-x_2)^2} + ...$$

e le costanti a, b, c, d,…si calcolano riducendo a forma intera e imponendo l'identità dei due polinomi.

Esempio:

$$\frac{x+3}{(x-2)(x+4)^2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+4}+\frac{c}{(x+4)^2} \longrightarrow x+3=a(x+4)^2+b(x+4)(x-2)+c(x-2)$$

Ponendo x=2, si ha a=5/36, ponendo x=-4, si ha c=1/6; a questo punto

$b(x+4)(x-2)=x+3-\frac{5}{36}(x+4)^2-\frac{1}{6}(x-2).$ Dividendo ambo i membri per (x+4)(x-2) si ricava: b=-5/36.

Infine:

$$\int\frac{x+3}{(x-2)(x+4)^2}dx=\int(\frac{5}{36(x-2)}-\frac{5}{36(x+4)}+\frac{1}{6(x+4)^2})dx = \frac{5}{36}Ln\frac{|x-2|}{|x+4|}-\frac{1}{6(x+4)}+c .$$

Altro esempio:

$$J = \int\frac{x+1}{x(x-2)(x-3)^2}dx ;$$

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x-3)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}+\frac{d}{(x-3)^2}$$, per cui

$$x+1=a(x-2)(x-3)^2+bx(x-3)^2+cx(x-2)(x-3)+dx(x-2) .$$

Per x=3, 4=d.3 d=4/3;
per x=0, 1=a(-18) a=-1/18;
per x=2, 3=b.2 b=3/2.

Isolando il termine con c, si ricava:

$$\frac{c}{x-3}=\frac{x+1}{x(x-2)(x-3)^2}+\frac{1}{18x}-\frac{3}{2(x-2)}-\frac{4}{3(x-3)^2}=\ldots=\frac{-26x^3+130x^2-156x}{18x(x-2)(x-3)^2}=-\frac{13}{9(x-3)}$$

per cui c=-13/9.

Infine $J=\int(-\frac{1}{18x}+\frac{3}{2(x-2)}-\frac{13}{9(x-3)}+\frac{4}{3(x-3)^2})dx=$

$$-\frac{1}{18}Ln|x|+\frac{3}{2}Ln|x-2|-\frac{13}{9}Ln|x-3|-\frac{4}{3}\frac{1}{x-3}+c .$$

Caso in cui il denominatore ha zeri non tutti reali.

In questo caso compaiono frazioni semplici del tipo $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ con $\Delta=p^2-4q\prec 0$,

(N.B. il coefficiente di x^2 si può sempre ridurre uguale ad 1).

Esercizio. Verificare che $\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx=\frac{a}{2}Ln(x^2+px+q)+\frac{2b-ap}{\sqrt{-\Delta}}\arctan(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}})$

Eseguendo il cambiamento di variabile x+p/2 = t, ci si può sempre ridurre a frazioni del tipo:

$$\frac{at+b-\frac{ap}{2}}{(t^2+\frac{-\Delta}{4})^n}$$, (dt=dx).

Con l'ulteriore cambiamento di variabile

$$z=\frac{t}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4}}}$$

(e aggiustato il differenziale), ci si riduce a integrare frazioni del tipo $\frac{ax+b}{(x^2+1)^n}$.

Per n=1, $\int\frac{ax+b}{x^2+1}dx=\frac{a}{2}Ln(x^2+1)+b.\arctan(x)$. Per n>1 $\int\frac{ax}{(x^2+1)^n}dx=-\frac{a}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$;

perciò resta da integrare il secondo addendo.

Posto $J_n=\int\frac{1}{(x^2+1)^n}dx$, $J_n=\int\frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^n}dx=J_{n-1}-\int\frac{x.x}{(x^2+1)^n}dx$.

Questa è una formula ricorsiva che riduce il calcolo a quello con esponente n-1:

(N.B. Il secondo integrale della formula ricorsiva si calcola per parti, assumendo x come fattore finito e il resto come fattore differenziale).Alla fine si ottiene:

(*) $$J_n(x)=\frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1}+\frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}}.$$

In definitiva, si ha la seguente formula:

$$\int\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{-a}{(2n-2)(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{2b-ap}{2(-\frac{\Delta}{4})^{n-\frac{1}{2}}}J_n(t),$$

dove $J_n(t)$ è la formula ricorsiva (*) , $t=\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}$, $\Delta=p^2-4q.$

Esempi.

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{1}{x^2+1}dx-\int\frac{x.x}{(x^2+1)^2}dx=\arctan(x)-\frac{1}{2}[-\frac{x}{(x^2+1)}+\int\frac{1}{x^2+1}dx]=$$

$$\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan(x)+c.$$

Si voglia calcolare $J=\int\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx.$

Poniamo $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{(x^2+1)^2} + \frac{h(x)}{x^2+1}$

Eliminando i denominatori, si ricava:

$1 = a(x^2+1)^2 + b(x+1)(x^2+1)^2 + (cx+d)(x+1)^2 + h(x)(x^2+1)(x+1)^2.$

ponendo x=-1, si ottiene **a=1/4.**

Portando il termine con a=1/4 a sinistra, ciò che rimane a destra è divisibile per x+1, perciò lo è anche il primo membro. Dopo aver diviso ambo i membri per x+1, si ottiene b ponendo x=-1.
Risulta **b=1/2.**
Dopo aver portato anche il termine con b (=1/2) a sinistra, ambo i membri sono ancora divisibili per x+1. Eseguita tale divisione, si ottiene: $-\frac{1}{4}(2x^3 - x^2 + 4x - 1) - cx - d = h(x).(x^2+1).$

Siccome il secondo membro è divisibile per x^2+1, lo è anche il primo. Dividendo il primo membro per x^2+1 e imponendo che il resto sia zero si ottiene:
Quoziente=h(x)=-1/2x+1/4 e uguagliando a zero il resto deriva: **c=-1/2 e d=0**.
Infine

$$J = \frac{-1}{4(x+1)} + \frac{1}{2}Ln|x+1| + \frac{1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{4}Ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\arctan(x) + c.$$

Verificare che $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx = L\,\mathrm{n}|x| - \frac{1}{2}Ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c$

Trovare le primitive di: $f = \frac{x+1}{x^2(x^2+1)}, g = \frac{x+1}{x(x^2+1)^2}, h = \frac{1}{x^3+x^2+x}$

$$l = \frac{1}{x^3+1}, m = \frac{1}{x^4-1}, n = \frac{1}{x(x^2+1)^2}$$

Risposte $\int f dx = -\frac{1}{x} + Ln|x| - \frac{1}{2}Ln(x^2+1) - arc\tan(x) + c;$

$$\int g dx = Ln|x| - \frac{1}{2}Ln(x^2+1) + \frac{x+1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x) + c$$

$$\int h dx = Ln|x| - \frac{1}{2}Ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + c$$

$\int l dx = \frac{1}{3}Ln|x+1| - \frac{1}{6}Ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + c$

$\int m dx = \frac{1}{4}Ln\frac{|x-1|}{|x+1|} - \frac{1}{2}\arctan(x) + c$, $\int n dx = Ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2(x^2+1)} + c$.

Verificare che:

1) $\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4}Ln|x+1| + \frac{1}{8}Ln(x^2+1) + \frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}\arctan x + c$;

2) $\int \frac{x+1}{(x^2+4)\sqrt{x}}dx = \frac{1}{8} Ln \frac{x-2\sqrt{x}+2)}{x+2\sqrt{x}+2} + \frac{3}{4}\arctan(\sqrt{x}-1) + \frac{3}{4}\arctan(\sqrt{x}+1) + c$;

Porre dapprima $\sqrt{x} = t$ e ricordare che $t^4 + 4 = (t^2 - 2t + 2)(t^2 + 2t + 2).$

3) $\int \frac{1}{x^3 + x^2 + x}dx = Ln(x) - \frac{1}{2}Ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c,$

4) $\int \frac{1}{x^4 - 1}dx = \frac{1}{4}Ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan(x) + c,$

5) $\int \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}Ln|x+1| - \frac{1}{6}Ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$,

6) $\int \frac{1}{(x-3)^2(x^2+1)}dx = -\frac{3}{50}Ln|x-3| - \frac{1}{10(x-3)} + \frac{3}{100}Ln(x^2+1) + \frac{4}{50}\arctan(x) + c$,

7) $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{1}{3}\arctan(x) - \frac{1}{6}\arctan\frac{x}{2} + c,$

(Porre $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{h(x)}{x^2+4}$, eliminare i denominatori e, isolato il termine con h(x), osservare che ambo i membri sono divisibili per $x^2+1.$ Imponendo che il resto sia zero, si trovano a e b; il quoziente è h(x). Prevedere che b=0 e che h(x) è una costante: perché?).

8) $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+x+1)} = \frac{1}{6}Ln\frac{x^2+x+1}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + c$,

9) $\int \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)^2} = \frac{1}{18}(\arctan\frac{x}{2} + \arctan x) + \frac{x}{6(x^2+1)} + c$,

10) $\int \frac{x^3+x-2}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx = \frac{4}{3(x+1)} + \frac{1}{2}Ln(x^2-x+1) - \frac{\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$,

11) $\int \frac{x^3-1}{(2x-1)^2(x^2+x+1)}dx = \frac{1}{4(2x-1)} + \frac{1}{4}Ln|2x-1| + c$,

12) $\int \frac{x^4 dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} - \frac{5x}{8(x^2+1)} + \frac{3\arctan(x)}{8} + c$,

13) $\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}dx = \frac{1-x}{2(x^2+1)} + \frac{\arctan(x)}{2} + Ln|x| - \frac{1}{2}Ln(x^2+1) + c$,

14 $\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^3}dx = \frac{1-x}{4(x^2+1)^2} + \frac{4+x}{8(x^2+1)} + \frac{\arctan(x)}{8} + Ln|x| - \frac{Ln(x^2+1)}{2} + c,$

15) $\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx = \frac{1-x}{4(x^2+1)} - \arctan(x) + \frac{3}{4}Ln|x-1| - \frac{3}{8}Ln(x^2+1) + c$,

16) $\int \frac{x^2-4}{(x-1)(x^2+1)^2}dx = \frac{5(x-1)}{4(x^2+1)} + 2\arctan(x) - \frac{3}{4}Ln|x-1| + \frac{3}{8}Ln(x^2+1) + c$.