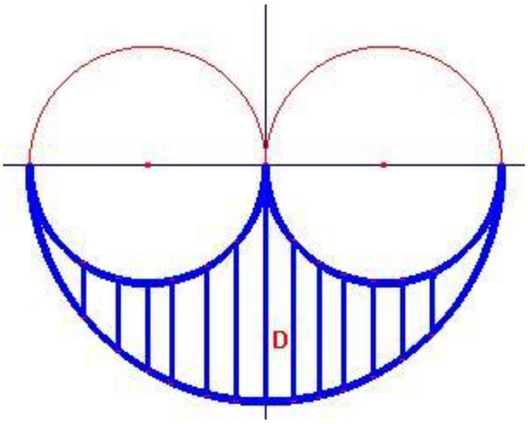
Ottavio Serra
Integrali doppi

1. Calcolare l'integrale doppio di f(x,y)=-xy(x+y^2) sul dominio D=A–B, essendo A={x,y), y<=0, x^2+y^2<=4}, B={(x,y), (x+1)^2+y^2<1 OR (x–1)^2+y^2<1}.

Il dominio D (bordato di blu, vedi fig. sottostante) è simmetrico rispetto all'asse y e la funzione f consta, rispetto alla x, di un addendo pari: -x^{2}y, e di un addendo dispari: -xy^3. Quest'ultimo dà contributo nullo all'integrale, mentre il primo dà contributo doppio di quello della metà destra del dominio.

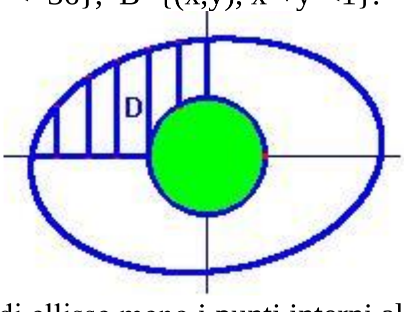


Perciò

$$\iint_D f(x.y)dsdy = \iint_D -x^2 ydxdy = 2\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} -x^2 ydy = -2\int_0^2 x^2 \frac{1}{2}[2x - x^2 - (4-x^2)]dx =$$

$$\int_0^2 (4x^2 - 2x^3)dx = \frac{8}{3}.$$

2. Calcolare l'integrale doppio di f(x,y)=xy(1+2x) sul dominio D=A–B, con A={x,y), x<=0, y>=0, 4x^2+9 y^2<=36}, B={(x,y), x^2+y^2<1}.



D è l'interno del 2° quadrante di ellisse meno i punti interni al cerchio B. Per avere D basta perciò togliere dal 2° quadrante di ellisse il 2° quadrante del cerchio. Perciò

$$\iint_D (x+2x^2)ydxdy = \int_{-3}^{0} [(x+2x^2) \int_0^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} ydy]dx - \int_{-1}^{0} [(x+2x^2) \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy]dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-3}^{0} (x+2x^2)\frac{4}{9}(9-x^2)dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (x+2x^2)(1-x^2)dx = \frac{2}{9}\frac{891}{20} - \frac{1}{2}\frac{1}{60} = \frac{99}{10} - \frac{1}{120} = \frac{1187}{120}$$

Allo stesso risultato si perviene usando la formula di Gauss – Green:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{y}\right)dxdy=\int_{+\partial D} Xdx+Ydy$$. Si ponga X=0, $\frac{\partial Y}{\partial x}=xy+2x^2y$ (uguale alla f(x,y)).

Segue che il nostro integrale doppio è uguale a $\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x}dxdy=\int_{+\partial D} Ydy=\int_{\partial D}\left(\frac{1}{2}x^2y+\frac{2}{3}x^3y\right)dy$.

Siccome l'integrale curvilineo è zero sui tratti rettilinei della frontiera di D (perché o è zero x, o è zero y), resta da calcolarlo sull'arco di ellisse (da π/2 a π) e sull'arco di cerchio (da π a π/2).

$$\int_{ArcoEllisse}\left(\frac{1}{2}9\cos^2 t.2sent+\frac{2}{3}27\cos^3 t.2sent\right)2\cos dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(18\cos^3 t+72\cos^4 t)(-d\cos t) =$$

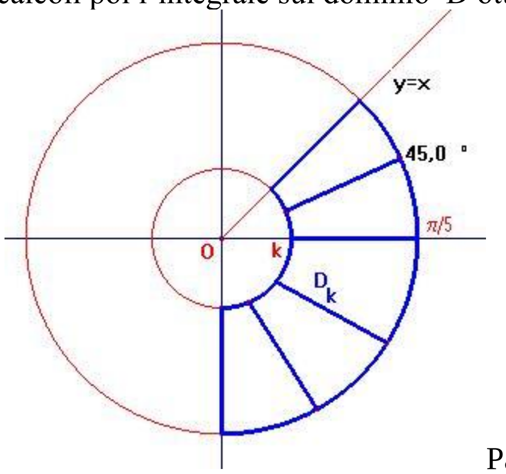
$$= \left[-18\frac{\cos^4 t}{4}-72\frac{\cos^5 t}{5}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{18}{4}+\frac{72}{5}=\frac{99}{10} \;;$$

$$\int_{ArcoCerchio} Ydy=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos^2 tsent+\frac{2}{3}\cos^3 tsent\right)\cos dt = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos^3 t+\frac{2}{3}\cos^4 t\right)(-d\cos t) =$$

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{\cos^4 t}{4}-\frac{2}{3}\frac{\cos^5 t}{5}\right]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=0-\left(-\frac{1}{8}+\frac{2}{15}\right)=-\frac{1}{120}.$$

Sommando i due valori, si ottiene 99/10 +(–1/120) = 1187/120, come col calcolo diretto.

3. Si calcoli l'integrale doppio di f(x,y)=$\frac{9}{\sqrt{x^2+y^2}(25+x^2+y^2)}$ sul dominio D_k={(x,y), $x^2+y^2>=k^2$, $x^2+y^2<=b^2$, y<=x}, con k<b. Si calcoli poi l'integrale sul dominio D ottenuto da D_k per k→0.



Passando a coordinate polari,

$$\int_{D_k} f(x,y)dzdy=\int_{-\pi/2}^{\pi/4}d\theta\int_k^b\frac{9\rho d\rho}{\rho(25+\rho^2}=\frac{3\pi}{4}\frac{9}{5}\left[\arctan\frac{\rho}{5}\right]_k^b=\frac{27\pi}{20}\left(\arctan\frac{b}{5}-\arctan\frac{k}{5}\right).$$

Per k→0 si ha $\int_D f(x,y)dzdy=\frac{27\pi}{20}\arctan\frac{b}{5}$.

4. Data la funzione $f(x,y)=\dfrac{1}{(4+x^2+y^2)^3}$ e gli insiemi $D_k=\{(x,y),\ x>=0,\ x^2+y^2<=k^2\}$, con k>0, e D={(x,y), x>=0}, si calcoli l'integrale di f su D_k e su D.

Si noti che D_k è il semidisco, a destra dell'asse y, di centro O(0,0) e raggio k e D, che si può considerare il limite di D_k per $k\to\infty$, è il semipiano a destra dell'asse y.

Passando a coordinate polari, $\displaystyle\iint_{D_k}\frac{dxdy}{(4+x^2+y^2)^3}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^k\frac{\rho d\rho}{(4+\rho^2)^3}=\pi\int_0^k\frac{\frac{1}{2}d\rho^2}{(4+\rho^2)^3}=$

$$\frac{\pi}{2}[-\frac{1}{2(4+\rho^2)^2}]_0^k=\frac{\pi}{4}(\frac{1}{16}-\frac{1}{(4+k^2)^2}).$$

Per $k\to\infty$, l'integrale su D vale π/64.

5. Data la funzi**one** $f(x,y)=\dfrac{\log\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$ e gli insiemi

$D_k=\{(x,y),\ k^2<=(x-1)^2+(y-2)^2<=e^{12}\}$, $D=\{(x,y),\ (x-1)^2+(y-2)^2<=e^{12}\}$, calcolare l'integrale Doppio di f(x,y) su D_k e su D.

L'insieme D_k è la corona circolare di centro O e raggi k ed e^6. Passando a coordinate polari, si ha:

$$\iint_{D_k}\frac{\log\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_k^{e^6}\frac{\log\rho}{\rho}\rho d\rho=2\pi[\rho\log\rho-\rho]_k^{e^6}=$$

$$=2\pi[e^6\log e^6-e^6-(k\log k-k)]=2\pi(5e^6-k\log k+k).$$

L'integrale su D si ottiene dal precedente per k→0 e perciò vale $10\pi e^6$.

6. E' data la funzione f(x,y) = $(y-x)(y+3x)e^{-(y+3x)^2}$ e, per ogni k>3, l'insieme D_k = {(x,y), x–1<=y<=x+3, –3x+3 <=y<= –3x+k}. Si calcoli l'integrale di f su D_k.

D_k è un parallelogrammo. Conviene il seguente cambio di variabili: y–x=u, y+3x=v, in modo che il parallelogrammo si riduca a un rettangolo normale. Calcolo dello Jacobiano:

$\dfrac{1}{|J|}=\begin{vmatrix}-1,1\\ 3,1\end{vmatrix}=4$, perciò $|J|=\dfrac{1}{4}$ e pertanto

$$\iint_{D_k}f(x,y)dxdy=\frac{1}{4}[\frac{1}{2}u^2]_{-1}^3.[-\frac{1}{2}e^{-v^2}]_3^k=\frac{1}{2}(e^{-9}-e^{-k^2}).$$

Per k→ ∞ D_k diventa una striscia illimitata verso l'alto a destra e l'integrale su D vale $\dfrac{1}{2}e^{-9}$.

7. Calcolare il seguente integrale doppio improprio: $\displaystyle\iint_D\frac{2}{x[1+(y+Logx)^2}dxdy$, essendo

$$D=\{(x,y)\,|\,y\le Logx+3,\ y\ge Logx+2,\ y\ge 1-Logx\}.$$

Risposta: π/4. (Sugg. Porre y-Logx = u, y+Logx=v…).

8. Calcolare l'integrale doppio di $\frac{2x}{1+y^2}$ sul dominio illimitato

$$\left\{(x,y)\middle|0 \le x \le 4, 0 \le y, xy \le 16, x^2 + y^2 \ge 16\right\}.$$

Risposta: 68+255ArcTang4−128π.
(Suggerimento: D è normale rispetto a entrambi gli assi, però conviene decomporlo in due domini anch'essi normali rispetto a entrambi gli assi).