Esercitazioni di calcolo 2
OttavioSerra
Integrali (definiti)

a) Esempi di base.

(1) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1-Ln^2x}} = \int_0^{Ln2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[arcsent\right]_0^{Ln2} = arcsen(Ln2)$, (sostituzione: Ln x = t).

(2) $\int_0^{\pi} e^x senxdx = \left[-\cos xe^x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos xdx = e^{\pi}+1+\left[e^x senx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x senxdx \Rightarrow$

$$\int_0^{\pi} e^x senxdx = \frac{1}{2}(e^{\pi}+1).$$

b) Esempi di integrali impropri.

(1) $\int_{1/e}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-Ln^2x}}$; l'Integrale converge per x $\to$ 1/e perché la funzione integranda è ivi infinita di ordine 1/2 (è maggiorata da una funzione del tipo $\frac{k}{x^{\alpha}}$, con α<1 (α=1/2). Stesso discorso nell'altro estremo. In questo caso l'integrale è calcolabile elementarmente e si ha:

$$\int_{1/e}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-Ln^2x}} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[arcsent\right]_{-1}^{1} = \pi.$$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx;$ l'integrale converge per x = 0 perché la funzione integranda è un infinito di ordine <1;

(è maggiorata da $\frac{1}{\sqrt{x}}$);

converge anche per x$\to+\infty$ perché la funzione integranda è infinitesima di ordine >1 (è maggiorata da $\frac{1}{x^{3/2}}$). (ciò discende dal fatto che $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ per ogni x > 0).

In questo caso l'integrale è calcolabile in modo elementare e vale 2.

(3) $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{x^2}}{\sqrt{senx}}dx$. E' convergente (perché?) , ma non si può calcolare con primitive elementari.

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{1+Ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$ è divergente per $x \to +\infty$ perché…

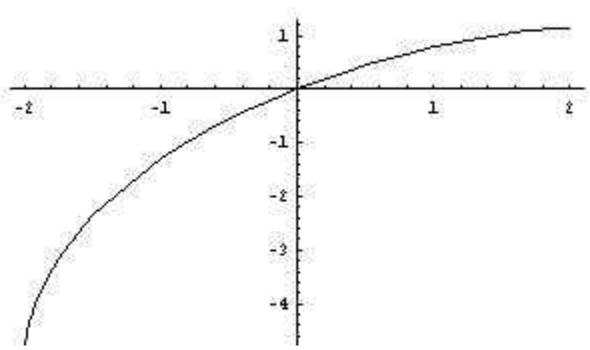
c) Esempi di funzioni integrali.

(1) $f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{2-t}{2+t}}dt$ Dominio [-2,2]; crescente, f ' ' < 0 nel dominio (f è sempre concava).

Tangente verticale per x=-2, tangente orizzontale per x=2.

Sostituzione: $\frac{2-t}{2+t} = z^2$.

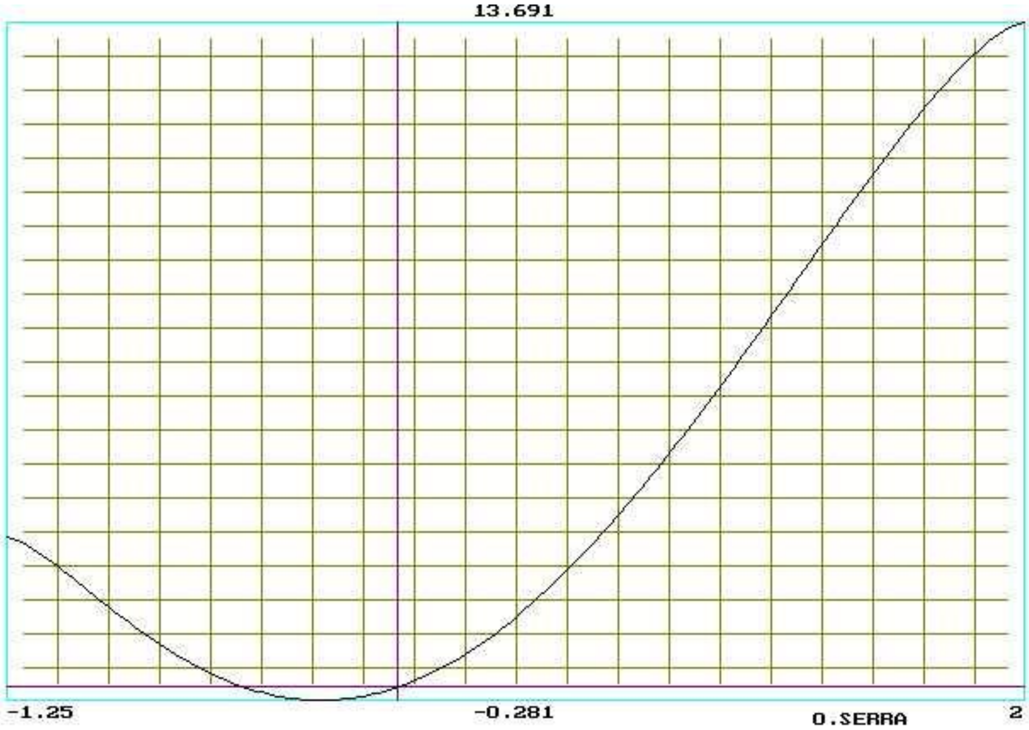
$f(x) = \sqrt{4-x^2} - 4\arctan\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} + \pi - 2.$ Grafico:



(2) $f(x) = \int_0^x (4s+1)\sqrt{\frac{(2-s)(4s+5)}{s+2}}ds$

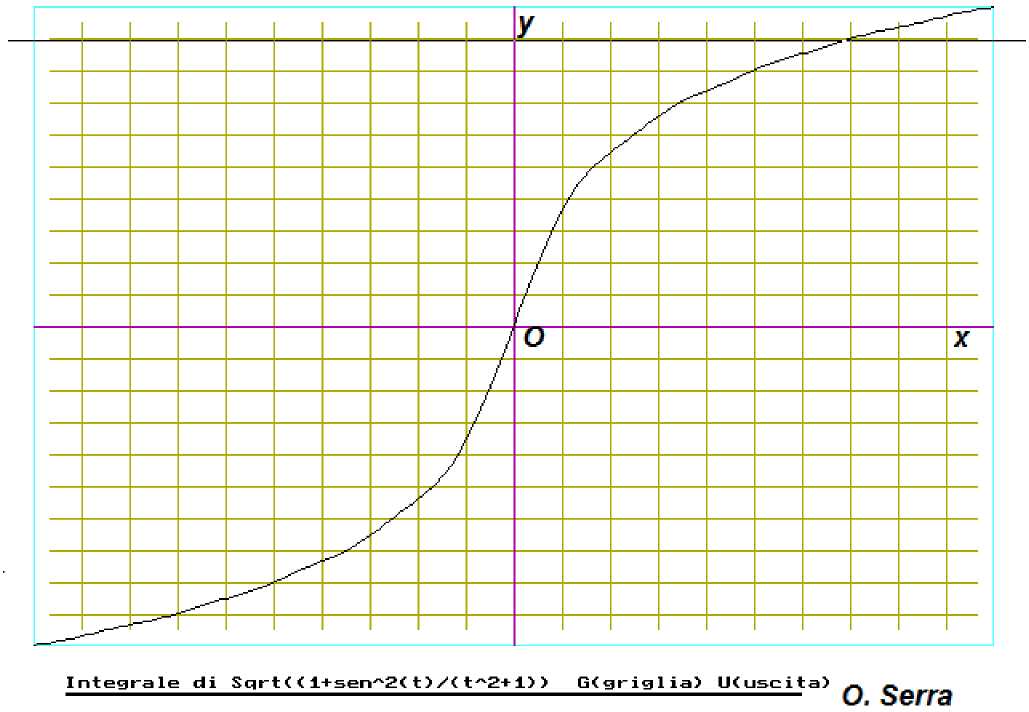
Dominio di f :[-5/4 , 2]. Minimo per x=-1/4. Flessi per $x = -1$ e $x = \frac{\sqrt{233}-5}{8}$.

N.B. Non cercare una primitiva elementare! Grafico:



$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + sen^2 t}{t^2 + 1}}\, dt$$

Dominio di f.]-∞, +∞[. f(x) diverge per x $\rightarrow +\infty$ perché la funzione integranda è maggiore di 1/(2x) che diverge. (tangente in O(0,0): y=x.
La f(x) possiede asintoti orizzontali per x→ -∞ e per x→ +∞. Grafico:



Esercizi.

Dire se i seguenti integrali impropri convergono e in caso affermativo calcolarli, se possibile.

$J = \int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x-3}}$ (Converge). Porre $\sqrt{x^2+2x-3} = \sqrt{(x+1)^2-4} = x+1-t$.

Si ottiene $J = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

J=$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ (Converge). $J = 4(\sqrt{3}-1)$. Porre $\sqrt{x} = t$.

$J = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ (…?…) $J = \frac{1}{2}$

$J = \int_{-\infty}^{+\infty} sen^2 x.e^{-x^2} dx$ (Converge perché…) Valore approssimato=0.56

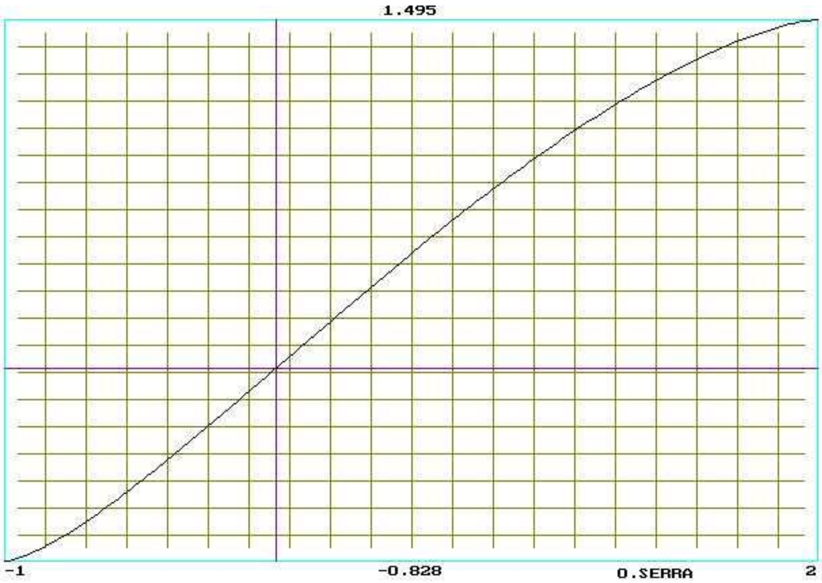
$J = \int_{-\infty}^{+\infty} sen^3 x.e^{-x^2} dx = 0$ (Perché?)

$J = \int_{-1}^{2} \frac{x-1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx$ (Converge). $J = -\frac{\pi}{2}$.

Sostituzioni suggerite: $\frac{x+1}{2-x} = t^2$ oppure $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} sent$.

Studiare le seguenti funzioni integrali:

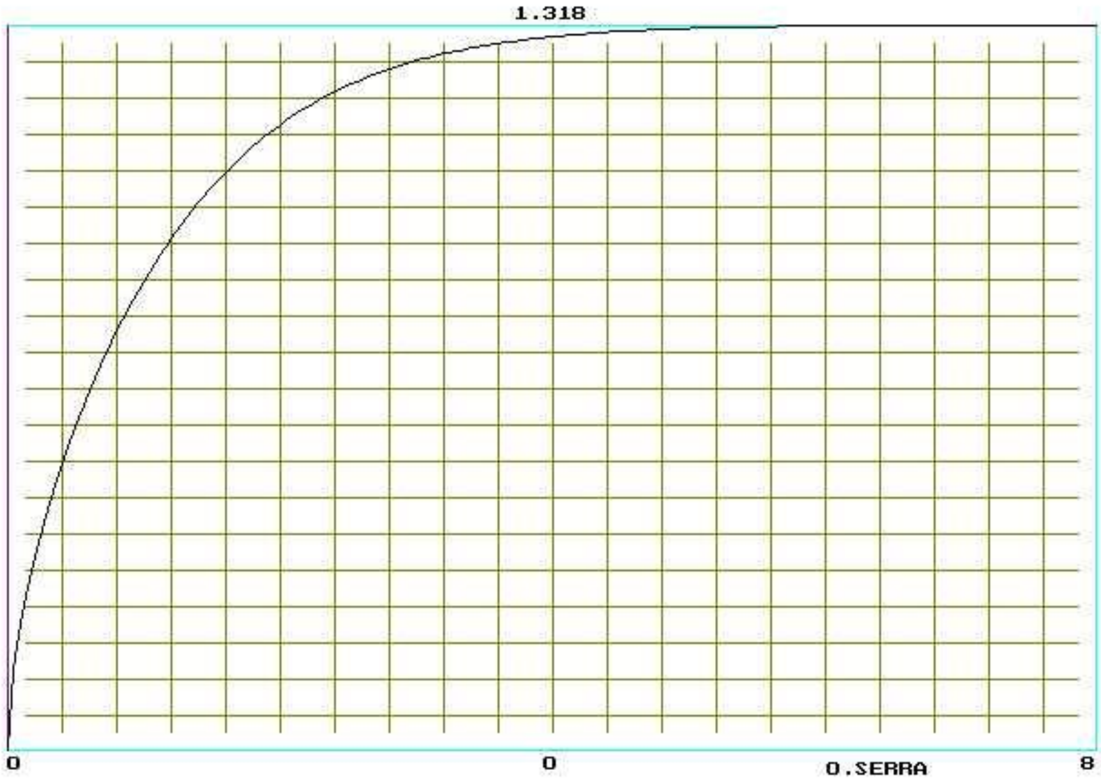
$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{2+s-s^2}{2+s}} ds$ Dominio =[-1, 2], tangenti orizzontali nei punti estremi, flesso per x=0. Grafico:



$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{3-s}{(s+1)(1-s)}}ds$. Dominio = [-1, 1]. Tangenti verticali agli estremi, flesso per $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{4-s^2}{s+1}}ds$. Dominio = [-1, 2], tangente verticale per x=-1, orizzontale per x=2. Derivata seconda negativa.

$f(x)=\int_0^x \frac{\sqrt{s}+1}{\sqrt{s}(e^s+2)}ds$. Dominio = [0, $+\infty$[, f convergente per x $\to$0 e per x $\to +\infty$.



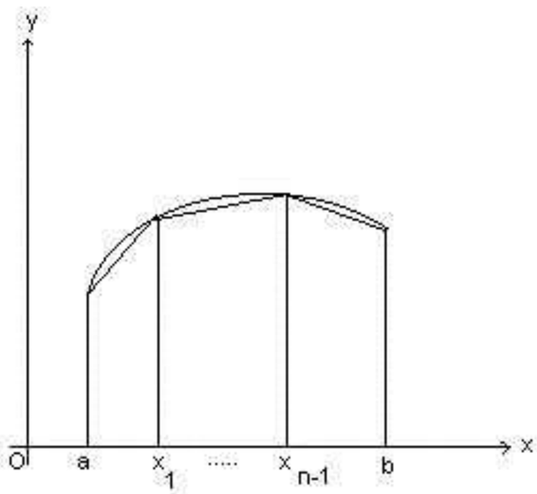
Tangente verticale per x=0, asintoto orizzontale per $x \to +\infty$; f ' ' <0.

Lunghezza d'arco.

La lunghezza di un arco di curva regolare si riduce al calcolo di un integrale definito.
Il grafico della funzione y=f(x) in [a, b] si dice regolare se f è derivabile in [a, b].

Diviso [a, b] in n parti mediante i punti intermedi x_1, x_2, x_{n-1}, si approssima l'arco con la poligonale inscritta nell'arco i cui vertici hanno le ascisse $x_0 = a, x_1, ...x_{n-1}, x_n = b.$

(vedi fig.).



La lunghezza della poligonale è $l(Pn)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+(\frac{\Delta f}{\Delta x})^2}\,\Delta x.$

Per Max$\{\Delta x\}\to 0$, si ottiene la lunghezza dell'arco:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Esempi.

(1) Arco di parabola $y=x^2, x\in[0,1]$. $l=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}Ln(\sqrt{5}+2).$

(2) $f(x)=\sqrt{x^3}, x\in[0,1]$. $l=\frac{13}{27}\sqrt{13}-\frac{8}{27}.$

Esercizi. Calcolare la lunghezza d'arco delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato.

(1) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, x\in[0,b].$

(2) $f(x)=Ln(x), x\in\left[\sqrt{3},\sqrt{8}\right].$

(3) $f(x)=arcsen(e^{-x}), x\in[0,1].$

(1) $l=\frac{e^b-e^{-b}}{2}$

(2) $l=1+\frac{1}{2}Ln\frac{3}{2}$

(3) $l=Ln(e+\sqrt{e^2+1}$