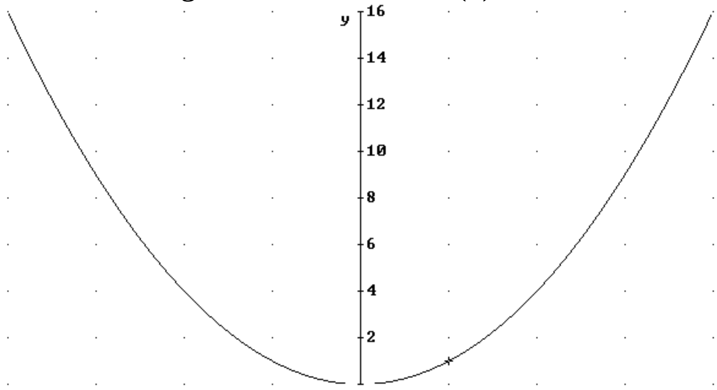
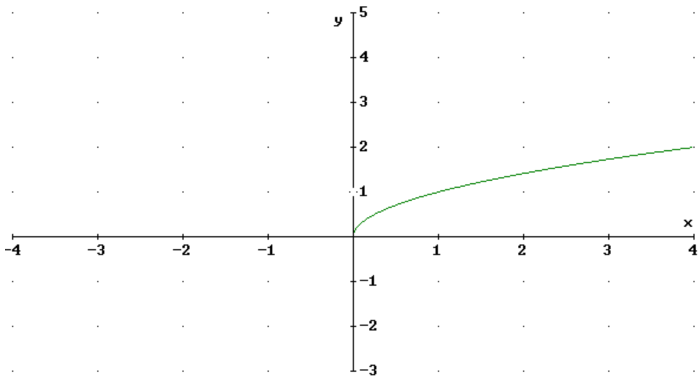
Ottavio Serra
Esercizi di calcolo 2
Funzioni invertibili

Una funzione f: A → B iniettiva e suriettiva è biunivoca e perciò invertibile.
Ricordo che f è iniettiva se per tutti gli x , y di A, f(x) = f(y) implica x = y;
f è suriettiva se f(A) = B (l'immagine del dominio uguaglia il codominio).
Posto y = f(x), l'inversa di f, in simboli f^{-1}, applica B in A e risulta $f^{-1}(y) = x$ se f(x) = y.
Esempio: $y = f(x) = x^3$ è biunivoca su ***R*** e risulta $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.
L'uso è di indicare la variabile indipendente con x, perciò $f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x}$.
Una condizione **necessaria** per l'invertibilità di f è la sua monotonia (f sempre crescente o sempre decrescente in A). Questa condizione è anche **sufficiente** se A è un intervallo.
Per esempio, f(x) = tang(x) è monotona crescente nel suo dominio, A =***R*** - $\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$, tuttavia non è invertibile in A perché tang(x) = tang(x + nπ):
La tangente non è una funzione iniettiva.
Restrizione del dominio e invertibilità.
Si consideri la funzione ***elevazione al quadrato.*** $f(x) = x^2$ applica ***R*** sul semiasse delle y non negative, però non è iniettiva (x e -x hanno lo stesso quadrato). Però lo è la sua ***restrizione*** al semiasse delle x non negative. In tal caso la $f(x) = x^2$ è invertibile e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.



$y=x^2$

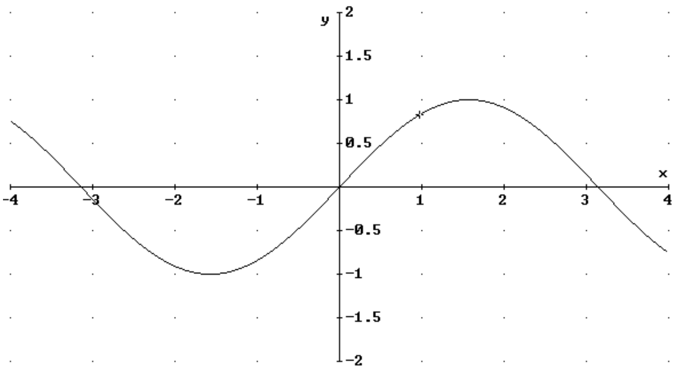


$y=\sqrt{x}$

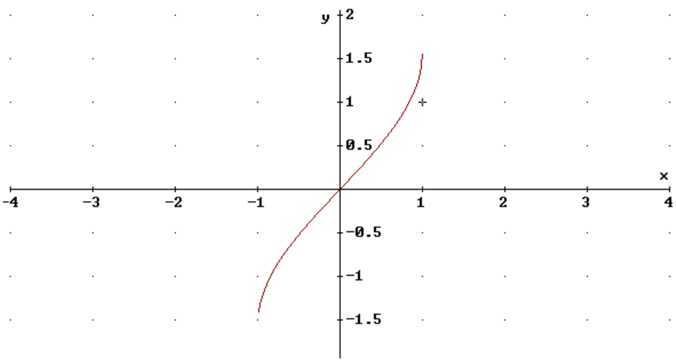
Le funzioni circolari inverse.

L'***arcoseno*** (Sen^{-1}) richiiede la restrizione della funzione ***seno*** al dominio $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

ArcSen : [-1,1] $\rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

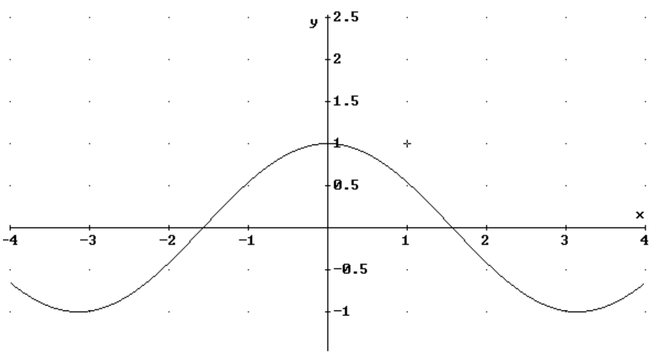


y=sen(x)

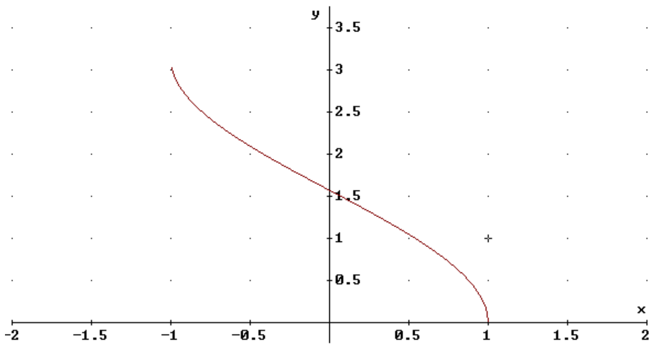


y=arcsen(x)

Analogamente, la restrizione del coseno all'intervallo [0, π] permette l'inversione:
ArcCos(x) : [-1, 1] $\rightarrow$[0, π].



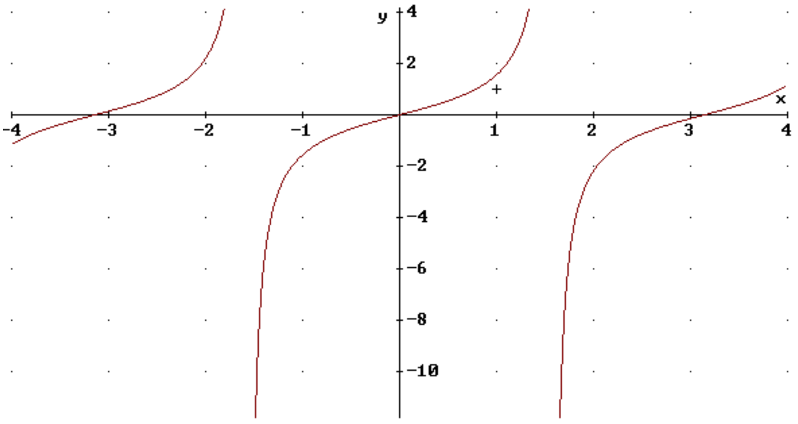
y=cos(x)



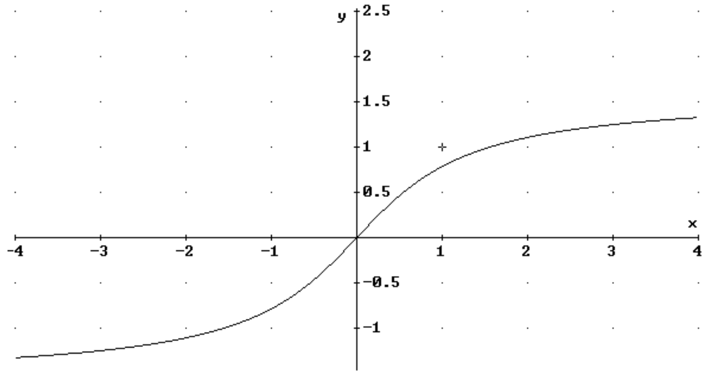
y=arcos(x)

Per invertire la funzione ***tangente*** occorre restringerne il dominio all'intervallo (aperto) $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

L'arcotangente applica ***R*** → $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

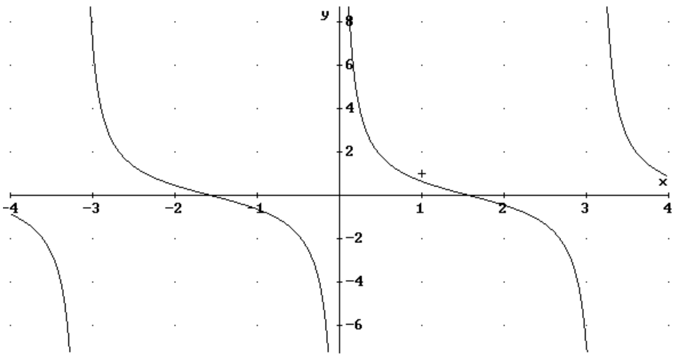


y=tang(x)

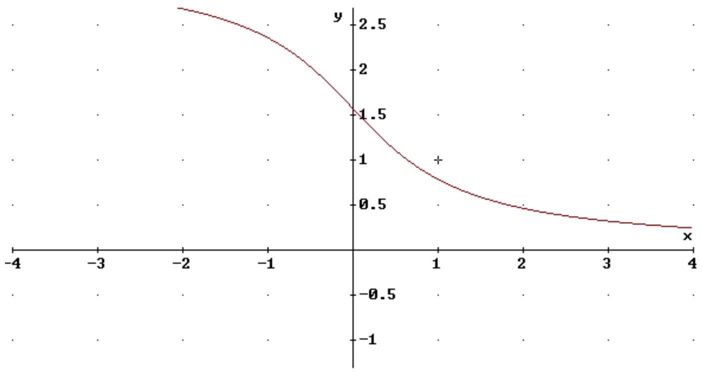


y=arctang(x)

Riporto infine il grafico dell'arcocotantente dopo opportuna restrizione del dominio della cotangente.



y=cotg(x)



y=arccotg(x)

Si noti che i grafici di una f invertibile e della sua inversa sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante; ciò è ovvio, ove si pensi che si passa da una funzione alla sua inversa scambiando la x con la y. Se poi il grafico di una funzione interseca tale bisettrice, per gli stessi punti deve passare il grafico della funzione inversa.

Un modo alternativo di vedere le cose è il seguente: si passa dal grafico di f al grafico di f^{-1} ruotando il foglio (la lavagna!!) di 90° in senso positivo (antiorario) e poi ribaltandolo rispetto rispetto al nuovo asse delle ordinate.

Altre ovvie proprietà. Una funzione biunivoca e la sua inversa funzionale hanno lo stesso tipo di crescenza. Però, dove l'una è convessa l'altra e concava e viceversa.

Notare il diverso comportamento dell'inversa algebrica 1/f(x).

Esercizi.

1) Disegnare nello stesso riferimento cartesiano il grafico di una funzione esponenziale di base 2 e della sua inversa ($\log_2$) dopo aver precisato dominio e codominio.
2) Lo stesso esercizio con base ½.
3) Calcolare arcsen(1/2), arcsen(-1/2), arctan(1), arctan(tang(3/7), arcsen(cos(3/4)).
4) Calcolare (senza calcolatrice!) ArcSen(2/3)+ArcCos(2/3).
5) Misurando gli angoli in gradi (sessagesimali), quanto fa $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$?

Derivate delle funzioni inverse.

Sia y=f(x) derivabile in x_0 con f'(x_0) diversa da zero. Se f è invertibile, f^{-1} è derivabile in $y_0=f(x_0)$ e risulta: $\frac{d}{dy}f^{-1}(y_0)=\frac{1}{\frac{d}{dx}f(x_0)}$.

Infatti, $\frac{\Delta f^{-1}}{\Delta y}=\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$. Siccome f è derivabile, è continua e perciò Δy tende a zero con Δx.

Esempi.
Sia y=arctang(x); x=tang(y) => d[tang(y)]/dy = 1+$\tan g^2$(y), da cui segue
d[(arctang(x))]/dx = 1/(1+$\tan g^2$(y)) = 1/(1+x^2).
Analogamente si trova $\frac{d}{dx} arcsen(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. E ancora:

$\frac{d}{dx} arc\cot g(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Esercizi.

1) Il fatto che la somma delle derivate di arcsen(x) e arccos(x) sia zero, implica che nell'intersezione dei loro domini, cioè in [0,π/2] arcsen(x)+arccos(x) sia costante. Calcolare il valore di tale costante, giustificando il risultato.
2) Ripetere l'esrcizio per arctang(x)+arccot(x).
3) Dimostrare che arcsen(x) = arctan($\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$).
4) Esprimere in funzione di arctan anche arccos(x) e arccot(x):
5) Esprimere in funzione di arcsen le altre funzioni circolari inverse.
6) Dimostrare che f(x)=x^3+x è invertibile in ***R*** e calcolare la derivata di f^{-1}(y) per y=2 e per y=10.
7) Calcolare la derivata dell'inversa di f(x)=$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, invertibile su tutto l'asse reale. Verificare poi che $y = Ln(x+\sqrt{1+x^2})$ è l'inversa della funzione f e verificare la derivata trovata.
8) Verificare che $f(x) = x + \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}}$ non è invertibile nel suo dominio, pur essendo in esso sempre crescente per aver derivata positiva, mentre lo è la sua restrizione al semiasse positivo delle x. Verificare poi che il grafico di f^{-1} ha tangente di flesso "orizzontale" nel punto (1,1).
9) La funzione $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ non è invertibile nel suo dominio$]0,+\infty[$. Lo è per $x \geq x_1$, con x_1 compreso tra ½ e ¾. Calcolare la derivata di f^{-1} nel punto y=1+$\sqrt{2}$.
10) La restrizione della f(x)=$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ all'intervallo $[0,+\infty[$ è invertibile. Calcolare esplicitamente f^{-1}(x) e verificare che vale il teorema di derivazione delle funzioni inverse.
11) Se f^{-1} è l'inversa di f: A→B, che cosa rappresentano le funzioni composte $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$?

.