Ottavio Serra

Forme differenziali chiuse
(campi vettoriali solenoidali)

0. a) Un campo vettoriale **F**(**r**)=**F**(X(x,y),Y(x,y)) si dice *solenoidale* e la corrispondente forma differenziale ω(x,y)= **F**(**r**).***dr*** =X(x,y)dx+Y(x,y)dy si dice *chiusa* se $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ [1].

Questa è condizione necessaria perché **F**(**r**) sia *conservativo* ovvero ω(x,y) sia *esatta*, vale a dire, l'integrale curvilineo di ω lungo un arco di curva regolare γ non dipende da γ, ma solo dai suoi punti estremi; in particolare l'integrale di ω lungo un cammino regolare chiuso è zero. Se, infatti, $\int_\gamma \omega=(\gamma)\int_{P_1}^{P_2}F(r).dr=\int_{t_1}^{t_2}d\Phi(x(t),y(t))=\int_{t_1}^{t_2}(\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy)$, segue $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=X,\frac{\partial\Phi}{\partial y}=Y$ e derivando la prima rispetto a y, la seconda rispetto ad x, per il teorema di Schwartz segue la condizione necessaria [1]. Questa però non è sufficiente. Una condizione sufficiente è che valga la [1] e inoltre γ sia contenuta in un dominio D semplicemente connesso, cioè tale che ogni curva regolare semplice e chiusa contenuta in D sia **da <u>sola</u>** frontiera di un dominio tutto contenuto in D (D non deve avere *buchi o lacune* che dir si voglia).
La funzione scalare Φ si chiama primitiva (o potenziale) del campo vettoriale **F**; **F** = Grad(Φ).

b) Una forma differenziale ω(x,y)= $a\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}dx+b\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}dy$ si chiama forma di avvolgimento, se è chiusa. Si verifica facilmente che ciò accade se a=–α e b=α.
A meno della costante α la forma di avvolgimento intorno al punto (x_0, y_0) è perciò

[2] $\frac{-(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}dx+\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}dy$.(Forma di avvolgimento standard)

Essa è definita in D uguale al piano privato del punto (x_0, y_0), D non è un dominio semplicemente connesso, come prova il fatto che il suo integrale lungo il cerchio c di centro (x_0, y_0) e raggio r, percorso in senso antiorario, è 2π. (Basta parametrizzare c al solito modo: x-x_0=rcost, y-y_0=rsent e integrare rispetto a t da 0 a 2π). La forma di avvolgimento sarà esatta, se si esegue un taglio che impedisca di girare intorno al punto (x_0, y_0); in tal modo il dominio diventa semplicemente connesso e la forma ammette primitiva: Φ(x,y)=arctan[(y-y_0)/(x-x_0)] oppure Φ(x,y)=–arctan[(x-x_0)/(y-y_0)]. Si noti che le due espressioni differiscono per una costante: infatti arctan(z)+arctan/1/z) = π/2.

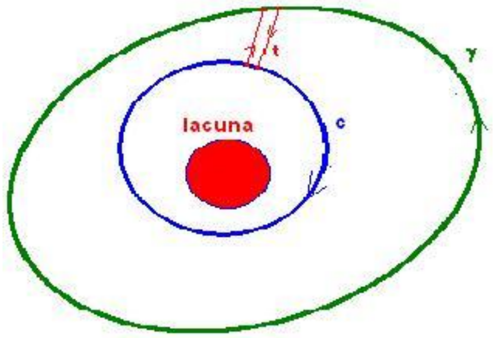
Infatti $\Phi(x,y)=\int\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}dy+\Psi(x)=\arctan\frac{y-y_0}{x-x_0}+\Psi(x)$;

derivando rispetto ad x e ricordando che $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=X=\frac{-(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(x-x_0)^2}$,

si ottiene $\Psi'(x)=0,\Psi(x)=c$ e dunque, a meno di una costante, Φ(x,y)=arctan[(y-y_0)/(x-x_0)].
Se una forma è chiusa, non necessariamente di avvolgimento, e il suo integrale lungo una linea chiusa γ che gira intorno a una lacuna è J, anche l'integrale intorno a qualsiasi altra linea chiusa c che gira intorno a quella lacuna è J. Infatti γ e c costituiscono insieme la frontiera di un sotto-dominio semplicemente connesso e l'integrale lungo γ + (-c) è zero. Si considerino anche i due tagli infinitamente vicini t percorsi in senso opposto in modo da raccordare γ e c in un'unica curva chiusa nel sotto-dominio semplicemente connesso.

$$\int_{\gamma+(-c)}\omega+\int_t\omega+\int_{-t}\omega=0\Rightarrow\int_\gamma\omega=\int_c\omega=J$$

(vedi figura seguente).



---

1. Data la forma differenziale $\omega(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2} + y)dx + (\frac{x}{x^2+y^2} + x)dy$,

a) verificare che è chiusa in D=$\boldsymbol{R}^2$–(0,0). Si tratta di una forma di avvolgimento intorno a (0,0) più la forma ydx+xdy che è chiaramente chiusa ($\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$).

b) Calcolare il suo integrale lungo il bordo q del quadrato di vertici $P_1(1,1)$, $P_2(-1,1)$, $P_3(-1,-1)$, $P_4(1,-1)$ percorso una volta in senso antiorario: integrale=2π.

c) Eseguire un taglio in D in modo da rendere D privato dei punti del taglio semplicemente connesso e calcolare una primitiva di ω. Il taglio può essere qualsiasi semiretta di origine O(0,0) , per esempio, y=-x, x<=0. Una primitiva di ω è $\Phi(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + xy$.

d) Calcolare l'integrale di ω lungo il cammino $P_1(1,1)$, $P_2(-1,1)$, $P_3(-1,-1)$, $P_4(1,-1)$, $P_1(1,1)$, $P_5(2,2)$.
Integrale = 2π+[Φ(2,2)–Φ(1,1)] = 2π+3.
Lo stesso, lungo un cammino regolare chiuso **γ** giacente nel 1° quadrante (x>0, y>0) da $P_1(1,1)$ a $P_1(1,1)$ più un arco di ellisse da $P_1(1,1)$ a $P_5(7,0)$. Integrale = 0.
Come prima, lungo **γ** più un arco di parabola da $P_1(1,1)$ a $P_5(1,\sqrt{3})$.
Integrale = (arctan $\sqrt{3}+\sqrt{3}$) – (arctan1+1) = π/12 + $\sqrt{3}$ – 1.

2. Considerato il campo vettoriale **F**(**r**)= – **r**/r^3,

a) verificare che è solenoidale in D = $\boldsymbol{R}^2$ – {(0,0)},

b) calcolare l'integrale di **F**(**r**) lungo un cerchio c di centro O(0,0) e raggio a, verificando che **F**(**r**) è conservativo in tuttoD;

c) calcolare un potenziale di **F**(**r**);

d) calcolare il lavoro di **F**(**r**) lungo una ellisse di centro O da P(1,0) a P(1,0) e poi su un arco PQ , con Q(3,4).

a) Dire che **F**(**r**) è solenoidale in D equivale a dire che la corrispondente forma differenziale

$$\omega(x,y) = Xdx + Ydy = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dx + \frac{-y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dy$$ è chiusa.

Ora, $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{+x\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}.2y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, per ragioni di simmetria: quindi segue che ω è chiusa.

b) $\int_c F(r).dr = \int_c \omega = \int_0^{2\pi} \frac{a\cos t.(-asent) + asent.(a\cos t)}{a^3} dt = 0$. Ciò garantisce che

F(**r**) è conservativo (ω è esatta) in tuttoD, che pure non è semplicemente connesso. (La connessione semplice è condizione sufficiente, non necessaria, alla conservatività).

c) Un potenziale di **F** (una primitiva di ω) è $\Phi(r) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

d) Il lavoro W=W(lungo l'ellisse)+W (lungo PQ) = 0 + Φ(Q) – Φ(P) = 1/5 –1 = –4/5.

3. Sia $\omega(x,y) = [3 + 2xy - \frac{y-3}{(x-2)^2 + (y-3)^2}]dx + [x^2 - 3y^2 + \frac{y-3}{(x-2)^2 + (y-3)^2}]dy$.

a) ω è chiusa in A=$\boldsymbol{R}^2$–{(2,3)} ?

b) ω è esatta in B={(x,y): x>2 e y>3} ?

c) Calcolare una primitiva di ω in B.

d) L'integrale di ω lungo una curva regolare β che si avvolge due volte, in senso antiorario, intor-
no al punto (2,3), passante per il punto P(3,3) e poi continuando da P(3,3) fino a Q(4,4).

a) ω = $\omega_1 + \omega_2$, essendo $\omega_1 = (3+2xy)dx + (x^2-3y^2)dy$, mentre ω_2 è una forma di avvolgimento intorno a (2,3). La prima è chiusa in tutto il piano e dunque in A (verifica immediata), la seconda è chiusa in A per averlo dimostrato nel precedente punto 0. Dunque ω è chiusa in A.

b) ω è esatta in B perché B è semplicemente connesso (è il quadrante aperto di vertice (2,3) giacente nel 1° quadrante del piano cartesiano.

c) Una primitiva di ω_2 è $\Phi_2 = \arctan\frac{y-3}{x-2}$. Una primitiva di ω_1 si calcola così:

$\Phi_1 = \int X_1(x,y)dx + \Psi(y) = \int (3+2xy)dx + \Psi(y) = 3x + x^2y + \Psi(y)$ e imponendo

Che $\frac{\partial\Phi1}{\partial y} = Y_1(x,y)$, cioè $x^2 + \Psi'(y) = x^2 - 3y^2 \Rightarrow \Psi(y) = -y^3$ e infine

$\Phi(x,y) = 3x + x^2y - y^3 + \arctan\frac{y-3}{x-2}$.

d) $\int_\beta \omega = 4\pi + \Phi(4,4) - \Phi(3,3) =$

$= 4\pi + [12 + 64 - 64 + \arctan\frac{1}{2}] - [9 + 27 - 27 + \arctan 0] = 4\pi + 3 + \arctan\frac{1}{2}$.