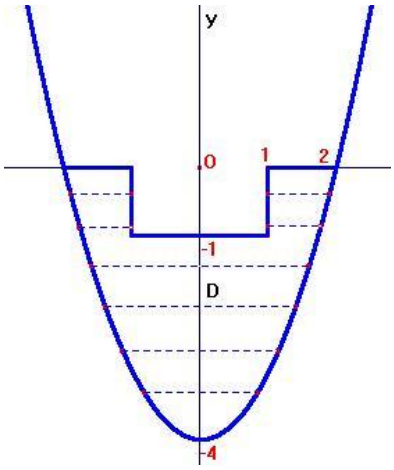
Ottavio Serra
Integrali curvilinei di campi vettoriali
(di forme differenziali lineari).

1. Data la forma differenziale $\omega(x,y)=(xy^2+2x^2y)dx+(x^2y^2-x^2)dy$ e il dominio D=A−B, con A={(x,y), y<=0, $y-x^2+4>=0$} e B={(x,y), −1<.x<1 e y>−1}, calcolare l'integrale di ω(x,y) lungo la frontiera di D percorsa una sola volta in senso antiorario.



Il dominio D consiste del segmento parabolico A meno la parte B_1 di B interna ad A. Siccome la frontiera di D consta di 6 tratti, conviene calcolare l'integrale col teorema di Gauss Green:

$\int_{\partial D} \omega(x,y) = \iint_D (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})dxdy = \iint_D [2xy^2 - 2x - (2xy + 2x^2)]dxdy$. Siccome il dominio D è simmetrico rispetto all'asse delle y, per la parità l'unico addendo dell'integrando che dà contributo non nullo all'integrale è $-2x^2$. Pertanto $\int_{\partial D} \omega = \alpha - \beta$, con

$$\alpha = \iint_A -2x^2 dxdy = \int_{-2}^{2} -2x^2 dx \int_{x^2-4}^{0} dy = \int_{-2}^{2} (2x^4 - 8x^2)dx = 2[\frac{2}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3]_0^2 = 2(\frac{64}{5} - \frac{64}{3}) = -\frac{256}{15},$$

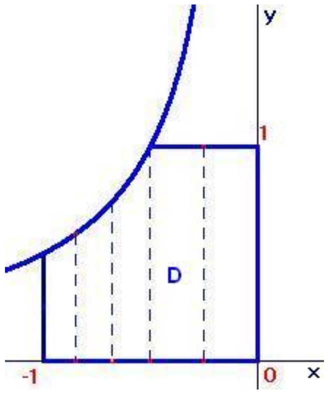
$$\beta = \iint_{B_1} -2x^2 dxdy = \int_{-1}^{1} -2x^2 dx \int_{-1}^{0} dy = \int_{-1}^{1} -2x^2 dx = 2[-\frac{2}{3}x^3]_0^1 = -\frac{4}{3}$$ e infine

$$\int_{\partial D} \omega(x,y) = -\frac{256}{15} - (-\frac{4}{3}) = \frac{-256+20}{15} = \frac{-236}{15}.$$

2. Data la forma differenziale $\omega(x,y)=(xy^2-2x^2y)dx+(x^2y^2-x^2)dy$ e il dominio D=A−B con A={(x,y), −1<=x<=0, 0<=y<=1} e B={(x,y), 2xy<−1}**,** si calcoli l'integrale curvilineo di ω
Lungo la frontiera di D percorsa una sola volta in senso antiorario.
Il dominio D si ottiene dal quadrato A togliendo la porzione di piano B_1 che sta nel quadrato al di sopra del ramo di iperbole 2xy=−1 (vedi figura nella pagina successiva). Perciò, applicando la formula di Gauss – Green, si ha:

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})dxdy = \iint_D (2xy^2 - 2x - 2xy + 2x^2)dxdy = \alpha - \beta$$ con

$\alpha = \iint_A (2xy^2 - 2x - 2xy + 2x^2)dxdy$ e $\beta = \iint_{B_1} (2xy^2 - 2x - 2xy + 2x^2)dxdy$. Segue



$$\alpha = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{1} (2xy^2 - 2x - 2xy + 2x^2)dy = \frac{11}{6} \;;$$

$$\beta = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{-1}{2x}}^{1} (2xy^2 - 2x - 2xy + 2x^2)dy = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2x^2 + \frac{1}{12x^2} - 1 + \frac{1}{4x} - \frac{4}{3}x)dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\log 2 .$$

Infine, $\displaystyle\int_{\partial D} \omega = \alpha - \beta = \frac{11}{6} - (\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\log 2) = \frac{7}{6} + \frac{1}{4}\log 2$.

Nota. L'integrale si sarebbe potuto ottenere direttamente, parametrizzando i 5 tratti della frontiera di D. L'integrale è nullo lungo i due tratti giacenti sugli assi, vale I_1=5/24 sul tratto orizzontale y=1 con x da 0 a -1/2, vale I_2= 11/24 sul tratto verticale x=-1 con y da ½ a 0, vale I_3=1/2+(1/4)log2 sull'arco di iperbole parametrizzato con x=t, y=-1/(2t), dx=dt, dy=dt/(2t^2), t che va da -1/2 a -1.

In definitiva $\displaystyle\int_{\partial D} \omega = \frac{5}{24} + \frac{11}{24} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log 2) = \frac{7}{6} + \frac{1}{4}\log 2$, come con la formula di Green.

3. Data la forma differenziale ω(x,y)=5y^{4}dx+40xy^{3}dy e il dominio D={(x,y), 0<=x<=8/3, 0<=y<=1, y^2<=x}, calcolare l'integrale di ω lungo la frontiera di D percorsa una sola volta in senso orario.
Nota. Il dominio D è normale rispetto all'asse delle ordinate.

Usando le formule di Gauss – Green, $\displaystyle\int_{-\partial D} \omega = -\int_{\partial D} \omega = -\iint_D (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})dxdy = \iint_D -20y^3 dxdy =$

$$-20\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\frac{8}{3}} y^3 dx = -20\int_0^1 y^3(\frac{8}{3} - y^2)dy = -20[\frac{8}{3}\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{6}y^6]_0^1 = -10.$$

4. Calcolare l'integrale di ω(x,y)=xydx+2x^{2}dy lungo la frontiera di D={(x,y),0<=x<=3, −x<=y<=x} percorsa una sola volta in senso positivo (antiorario).
Nota. D è un triangolo rettangolo con il vertice dell'angolo retto in O(0,0), cateti sulle bisettrici

del primo e del quarto quadrante e ipotenusa sulla retta x=3. Adoperando la formula di Green, $\int_{\partial D}\omega = \int_{\partial D}(Xdx+Ydy) = \int_D (\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}) = \int_0^3 dx\int_{-x}^{x} 3xdy = \int_0^3 dx\int_0^x 6xdy = 54$.

L'integrale calcolato direttamente dà:

lungo il cateto nel 4° quadrante (x=t,y=-x=-t, dx=dt, dy=-dt), $J_1=\int_0^3 (-t^2dt+2t^2(-dt)) = -27;$

lungo l'ipotenusa(x=3, dx=0, y=t, -3<=t<=3, dy=dt), $J_2=\int_{-3}^{3} 2.3^2 dt = 18.6 = 108;$

lungo il cateto nel 1° quadrante (percorso verso O) (x=y=t, dx=dy=dt), $J3=\int_3^0 3t^2 dt = -27;$

sommando i tre contributi, si ottiene 54, come con la formula di Green.

5. Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale $\omega(x,y)=(16x^3-8y^3)dx+(8x^3+8y^3)dy$ lungo la frontiera di D={(x,y), $x^2+y^2<=4$, x>=0, y>=0} percorsa una sola volta in senso antiorario.

Il dominio D è la quarta parte del disco di centro O(0,0) e raggio 2 giacente nel 1° quadrante. Conviene usare la formula di Gauss – Green e poi passare a coordinate polari:

$$\int_{\partial D} X(x,y)dx+Y(x,y)dy = \iint_D 24(x^2+y^2)dxdy = 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^2 \rho^3 d\rho = 24\frac{\pi}{2}\frac{1}{4}16 = 48\pi.$$

Nota. Il calcolo diretto sulla frontiera di D (in particalare sull'arco di cerchio) è molto laborioso.

6. E' dato il campo vettoriale ***F***(r) = ***F***(x,y)=[(x+y)**i** + (y-x)**j**]/(x^2+y^2) e il cerchio c: $x^2+y^2=a^2$.
Calcolare l'integrale curvilineo di ***F*** lungo il cerchio c percorso una sola volta in senso antiorario.

$$\int_c F(r).dr = \int_c X(x,y)dx+Y(x,y)dy = \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t+asent)(-asent)+(asent-a\cos t)(a\cos t)}{a^2}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(-sen^2 t-\cos^2 t)dt = -2\pi.$$

Nota. Se si potesse applicare a questo esercizio la formula di Gauss – Green, siccome $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0,$
l'integrale curvilineo dovrebbe valere zero. Ma non si può applicare la formula di Gauss – Green, perché il dominio avente c come frontiera non è semplicemente connesso.
Se invece si considera il campo di componenti $X(x,y)=x/(x^2+y^2)$, $Y(x,y)=y/(x^2+y^2)$, per il quale la condizione necessaria $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0$ di conservatività (o esattezza) è soddisfatta come nel precedente esercizio, l'integrale curvilineo su c viene zero. Ciò significa che l'essere il dominio di bordo c (o altra linea regolare semplice e chiusa) semplicemente connesso è condizione **sufficiente**, ma

non necessaria, perché l'integrale curvilineo lungo c venga zero, (una volta soddisfatta la condizione necessaria di *chiusura* $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0$).

7. data la formadifferenziale ω(x,y)= $\frac{x+y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$, se ne calcoli l'integrale

a) lungo il cerchio c di centro O(0,0) e raggio r percorso in senso antiorario;
b) lungo il bordo q del quadrato di vwrtici opposti (-1,-1), (1,1) percorso in senso antiorario;
c) lungo l'ellisse e di equazione $4x^2+y^2=4$ percorsa in senso antiorario.

a) $\int_c \omega=\int_0^{2\pi}\frac{(r\cos t+rsent)(-rsent)+(r\cos t)(r\cos t)}{r^2}dt=\int_0^{2\pi}(-sent.d(sent)+\cos(2t)\frac{d(2t)}{2}=0.$

b) $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{t-1}{t^2+1}dt=[\frac{1}{2}\log(t^2+1)-\arctan t]_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2};\quad I_2=\int_{-1}^{1}\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{2};$

$I_3=\int_{1}^{-1}\frac{t+1}{t^2+1}dt=[\frac{1}{2}\log(t^2+1)+\arctan t]_{1}^{-1}=-\frac{\pi}{2};\quad I_4=\int_{1}^{-1}\frac{-1}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{2}.$ Sommando:

$\int_q \omega=0.$

c) $\int_e \omega=\int_0^{2\pi}\frac{(2\cos t+sent)(-2sent)+2\cos t.\cos t}{4\cos^2 t+sen^2 t}dt=\int_0^{2\pi}(\frac{-4\cos t sent}{4\cos^2 t+sen^2 t}+2\frac{\cos^2 t-sen^2 t}{4\cos^2 t+sen^2 t})dt;$

l'integrale del primo addendo vale zero, perché la funzione integranda assume valori opposti passando da un quadrante al successivo, la seconda è pari, perciò:

$$\int_e \omega=2\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 t-sen^2 t}{4\cos^2 t+sen^2 t}dt=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t-sen^2 t}{4\cos^2 t+sen^2 t}dt=8\int_0^{+\infty}\frac{1-z^2}{(4+z^2)(1+z^2)}dz$$

(sostituzione tangt=z). Posto $\frac{1-z^2}{(4+z^2)(1+z^2}=\frac{A}{4+z^2}+\frac{B}{1+z^2}$, si ricava A=-5/3, B=2/3 e

$$\int_e \omega=8[-\frac{5}{3}\int_0^{+\infty}\frac{2d(z/2)}{4(1+(z/2)^2)}+\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}]=8[-\frac{5}{6}\arctan\frac{z}{2}+\frac{2}{3}\arctan z]_0^{+\infty}=\frac{8}{3}(-\frac{5}{2}\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{2})$$

$=-\frac{2\pi}{3}$.

d) Verificare che il primo addendo della funzione integranda, integrato nel 1° quadrante, dà valore –(log2)/3, nel 2° quadrante (log2)/3, nel 3° –(log2)/3 e nel 4° (log2)/3;
perciò il contributo complessivo è zero, come previsto con considerazioni di simmetria.

e) Verificare che la condizione necessaria di integrabilità $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0$ (condizione di chiusura della forma differenziale) non è soddisfatta, altrimenti i tre integrali **a b c** avrebbero dovuto dare lo stesso risultato.