Ottavio Serra

Integrali curvilinei di campi scalari

0. Un campo scalare è una funzione a valori scalari sui punti di uno spazio euclideo a 2 o a 3 dimensioni. Es. f(**r**)=f(x,y)=x^2y, f(**r**)=f(x,y,z)=x+senz, etc..

Sia **γ** un arco di curva regolare, cioè l'unione di un numero finito di ***porzioni di curve regolari***, del tipo **r** = **r**(t) , a<=t<=b, **r**(t) derivabile con derivata **r'**(t) non identicamente nulla in [a,b]. L'elemento d'arco di **γ è (teorema di Pitagora)** $ds = \|r'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$.

(z=0 in $\boldsymbol{R}^2$).

Si definisce poi integrale curvilineo di f su **γ** $\int_\gamma f(r)ds = \int_a^b f[x(t), y(t), ...]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + ...}dt$ **.**

Se f=1, l'integrale dà la lunghezza dell'arco **γ**. Se f si interpreta come una densità lineare, l'integrale dà la massa dell'arco. Se f=x, l'integrale, diviso per la lunghezza (la massa) dell'arco, dà l'ascissa del baricentro dell'arco, etc.

1. Sia **γ** l'arco di cicloide x=1-cost, y=sent, 0<=t<=2π. Calcolare la lunghezza dell'arco.

$$s = \int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{sen^2 t + \cos^2 t}\,dt = 2\pi .$$

2. Si calcoli la massa di un filo circolare di raggio r con densità lineare $\lambda(x, y) = |x| + |y|$.

Per simmetria, i 4 quadranti hanno la stessa massa, perciò

$$M = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos t + rsent).rdt = 4r^2[sent - \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4r^2[1-(-1)] = 8r^2 .$$

3. Si calcoli la massa dell'arco di parabola y=x^2, 0<=x<=1, con densità lineare x.

$$M = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\frac{2}{3}[\sqrt{(1+4x^2)^3}]_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

4. si calcoli la lunghezza dell'arco di parabola y=x^2, 0<=x<=a.

$s = \int_0^a \sqrt{1+4x^2}dx$. Posto $\sqrt{1+4x^2} = 2x + t,$ si ottiene x=$\frac{1-t^2}{4t}$, dx=$\frac{-(1+t^2)}{4t^2}dt$,

$\sqrt{1+4t^2} = \frac{1+t^2}{2t}$ e quindi s= $\int_1^{\sqrt{1+4a^2}-2a} \frac{1+t^2}{2t}.\frac{-(1+t^2)}{4t^2}dt = -\frac{1}{8}\int_1^{\sqrt{1+4a^2}-2a} (t + \frac{1}{t^3} + \frac{2}{t})dt$, da cui

$$s = \frac{-1}{8}[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2t^2} + 2\log|t|]_1^{\sqrt{1+4a^2}-2a} = \frac{a}{2}\sqrt{1+4a^2} - \frac{1}{4}\log(\sqrt{1+4a^2} - 2a) .$$

Verificare che s si può esprimere anche così: $\frac{a}{2}\sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{4}\log(\sqrt{1+4a^2} + 2a)$.

5. Calcolare il baricentro G dell'arco circolare $x^2+y^2=1$, $y>=0$.

Per ragioni di simmetria $x_G=0$ (l'integrale da 0 a π di cost è 0), $y_G = \dfrac{\int_\gamma y ds}{\int_\gamma ds} = \dfrac{\int_0^\pi sent dt}{\pi} = \dfrac{2}{\pi}$.

6. Calcolare $\int_c x^2 ds$, essendo c il semicerchio di centro O(0,0) e raggio r, con $x>=0$.

(Questo integrale è il momentodi inerzia del semicerchio rispetto all'asse y).

$$\int_c x^2 ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t.rdt = r^3 \frac{1}{2}[t + sent.\cos t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^3}{2}.$$

7. Calcolare la lunghezza dell'arco di elica cilindrica $x=\cos t$, $y=sent$, $z=ht$, $0<=t<=2\pi$.

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+h^2} dt = 2\pi\sqrt{1+h^2}.$$

8. Calcolare $\int_c (x+y)ds$, essendo c il bordo del triangolo di vertici O(0,0), A(1,0), B(0,1) percorso una volta in senso antiorario.

$\int_c (x+y)ds = J_1+J_2+J_3$, essendo $J_1 = \int_{OA} (x+y)ds = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$, $J_2 \int_{AB} (x+y)ds = \int_1^0 (1)\sqrt{2}dx = -\sqrt{2}$,

$J_3 = \int_{BO} (x+y)ds = \int_1^0 ydy = -\frac{1}{2}$, perciò $\int_c (x+y)ds = -\sqrt{2}$.

9. Calcolare l'integrale curvilineo del campo scalare x^2+y^2 sulla curva c di equazione $a(\cos t+tsent).\underline{\mathbf{i}} + a(sent-t\cos t).\underline{\mathbf{j}}$, per t che va da 0 a 2π.
Risulta $ds=atdt$, perciò

$$\int_c (x^2+y^2)ds = a^3 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + t^2 sen^2 t + 2tsent\cos t + sen^2 t + t^2\cos^2 t - 2t\cos tsent).tdt =$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} (1+t^2).tdt = 2\pi^2 a^3 (1+2\pi^2).$$

10. Calcolare $\int_c zds$, essendo c la curva tcost **i** + tsent **j** + t **k**, 0<=t<=a.

Risulta $ds = \sqrt{(\cos t - tsent)^2 + (sent + t\cos t)^2 + 1}dt = \sqrt{1+t^2}dt$, perciò

$$\int_c zds = \int_0^a t\sqrt{2+t^2}dt = \frac{1}{2}[\frac{2}{3}\sqrt{(1+t^2)^3}]_0^a = \frac{1}{3}(\sqrt{(2+a^2)^3} - 2\sqrt{2}).$$