Esercitazioni di calcolo 2
Ottavio Serra
Funzioni di due variabili
(Derivate parziali, direzionali, gradiente).

(1) Derivate parziali.

Data la funzione z=f(x,y), la derivata parziale di f rispetto alla prima variabile x nel punto (a,b) del suo dominio è il seguente limite:

$$f_1(a,b)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

se tale limite esiste.

Stessa definizione per la derivata parziale rispetto alla seconda variabile y:

$$f_2(a,b)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

se tale limite esiste.

In pratica, ci si riduce a funzioni di una variabile.

Esempio: $f(x,y)=x^2y+xy-xy^3+2x-1$ (Dominio è tutto il piano).

$f_1(x,y)=2xy+y-y^3+2,\ f_2(x,y)=x^2+x-3xy^2.$

Verificare che per $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2-y^2}$ le derivate parziali sono:

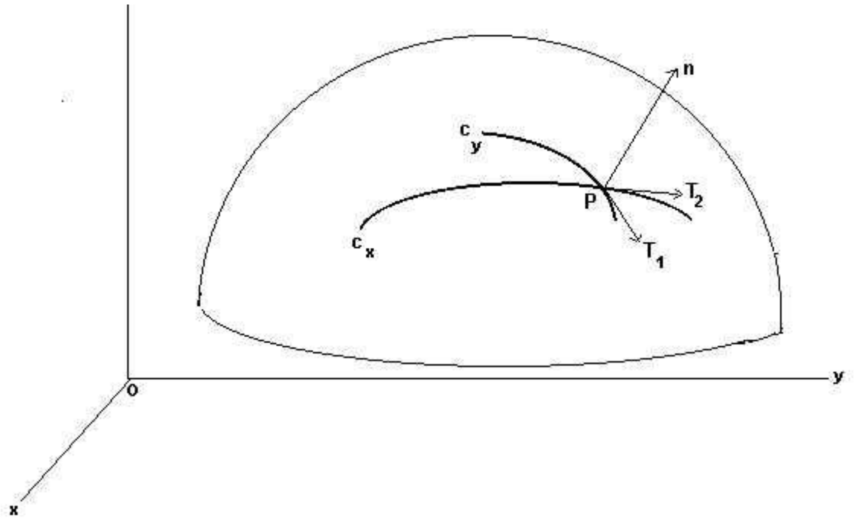
$f_1(x,y)=\dfrac{x^3-xy^2-2x^2}{(x^2-y^2)^2},\ f_2(x,y)=\dfrac{2xy}{(x^2-y^2)^2}$. Qual è il dominio di f?

(2) Piano tangente alla superficie grafico di z=f(x,y) nel punto P(a,b,c), con c=f(a,b)).

Secando la superficie col piano y=b, si ottiene la curva c_y di equazioni y=b, z=f(x,b). La derivata di f rispetto a x è $f_1(a,b)$ e il vettore tangente a c_y in P è $T_1=(1,0,f_1(a,b))$.

Analogamente, secando la superficie col piano x=a, si ottiene la curva c_x di equazioni x=a, z=f(a,y). Il vettore tangente a c_x in P è $T_2=(0,1,f_2(a,b))$. Il piano tangente alla superficie in P è $\pi=PT_1T_2$ e la sua normale **n** è ortogonale ai vettori T_1 e T_2. Risulterà **n**=$(f_1(a,b),f_2(a,b),-1)$ e l'equazione di π sarà $z-c=f_1(a,b).(x-a)+f_2(a,b).(y-b)$.

(Vedi fig. seguente)



(3) Linee di livello

Data la superficie di equazione z=f(x,y), le linee di livello sono le curve del piano xOy limitate al dominio D di f, di equazioni f(x,y)=c costante.

Esempio: $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. Il dominio è $D = \left\{(x,y) \in R^2 \,\middle|\, (x,y) \neq (0,0\right\}$. (Il piano privato dell'origine).

Le linee di livello sono le curve di equazioni $x^2 + y^2 - \gamma(x+y) = 0$, cerchi per l'origine (da escludere) con centro in $(\dfrac{\gamma}{2}, \dfrac{\gamma}{2})$ e raggio $\dfrac{|\gamma|}{\sqrt{2}}$, essendo $\gamma = \dfrac{1}{c}$. Per c=0, la linea di livello è x+y=0 privata dell'origine.

Esempio N°2 : $z = \dfrac{y}{x^2+1}$. $D = R^2$, curve di livello le parabole $y = c(x^2+1)$.

EsempioN°3 : $z = 2x^2 + 3y^2$. $D = R^2$, curve di livello le ellissi $2x^2 + 3y^2 = c$, c>0.

Si tratta di ellissi canoniche (centro nell'origine e assi coincidenti con gli assi cartesiani), di semiassi $a = \sqrt{\dfrac{c}{2}}, b = \sqrt{\dfrac{c}{3}}$.

(4) Gradiente

Il gradiente di f(x,y) nel punto (a,b) del dominio è il vettore Gradf(a,b)=($f_1(a,b), f_2(a,b)$), se le due derivate parziali esistono.

(5) Differenziale e differenziabilità.

Se i punti P(a,b) e P'(a+h,b+k) appartengono al dominio di f(x,y), si chiama differenziale di f in (a,b) l'espressione $df = f_1(a,b)h + f_2(a,b)k$. La funzione si dice differenziabile in (a,b) se la differenza tra l'incremento $\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a,b)$ e il differenziale df è un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla norma del vettore (h,k), cioè se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Una condizione sufficiente di differenziabilità è che le derivate parziali siano continue in (a,b).
Si chiama Gradiente di f il vettore Grad f(x,y) che ha per componenti le derivate parziali di f.
Se f è differenziabile in (a,b), allora Grad f(a,b) è perpendicolare alla (tangente alla) linea di livello passante per (a,b). Infatti, detti P(a,b) e P'(a+h,b+k) due punti sulla linea di livello, sia θ l'angolo formato dai vettori (applicati in P) Gradf(a,b) e PP'. Risulta $\cos\theta = \dfrac{< Gradf(a,b), PP' >}{\|Gradf(a,b)\| . \|PP'\|} = \dfrac{< Gradf(a,b), \overrightarrow{(h,k)} >}{\|Gradf(a,b)\| . \sqrt{h^2+k^2}}$ e passando al limite per P' $\to$ P, ovvero per (h,k) $\to$ (0,0), si ottiene:

$$\cos\theta_0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hf_1(a,b) + kf_2(a,b)}{\|Gradf(a,b)\| . \sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{df}{\|Gradf(a,b)\| . \sqrt{h^2+k^2}}$$

ovvero, ricordando che su una linea di livello Δf=0,

$$\cos\theta_0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-(\triangle f - df)}{\|Gradf(a,b)\| . \sqrt{h^2+k^2}} = 0$$, perché f è differenziabile in P(a,b).

Segue che θ_0 è un angolo retto. Intanto, $PP' \to 0$ significa che PP' ha assunto la direzione della tangente alla linea di livello e il teorema è dimostrato.

(6) Derivata direzionale.

Dato un vettore normalizzato **w** di componenti u e v, si chiama derivata direzionale di f in (a,b) secondo la direzione **w** il limite, se esiste, $f_w^{'}(a,b)=\lim_{\rho\to 0}\dfrac{f(a+\rho u,b+\rho v)-f(a,b)}{\rho}$.

Si noti che se **w**=(1,0), la derivata direzionale coincide con la derivata parziale rispetto ad x, se **w**=(0,1), coincide con la derivata parziale rispetto ad y.

Esempio: $f(x,y)=x^2-y^2$, (a,b)=(2,1), **w**=$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$. Allora

$$f_w^{'}(2,1)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\left[(2+\frac{\rho}{2})^2-(1+\frac{\rho\sqrt{3}}{2})^2\right]-\left[4-1\right]}{\rho}=2-\sqrt{3}\,.$$

Teorema 1 Sia g(t)=f(a+tu, b+tv) , essendo (u,v)=**w**. Allora $f_w^{'}(a,b)=g^{'}(t)_{(t=0)}$

Infatti $g^{'}(t)_{(t=0)}=\lim_{\rho\to 0}\dfrac{f\left[a+(t+\rho)u,b+(t+\rho)v\right]-f(a+tu,b+tv)}{\rho},(t=0)$

E per t=0 il limite precedente dà la derivata direzionale.

Teorema 2 Sia g(t)=f(x,y), con x=a+tu, y=b+tv. Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, $g^{'}(t)_{(t=0)}=f_1(a,b)u+f_2(a,b)v=f_w^{'}(a,b)$.

Applichiamolo all'esempio precedente $f(x,y)=x^2-y^2,(a,b)=(2,1),w(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

$f_w^{'}(2,1)=(2x)_{x=2}.u+(-2y)_{y=1}.v=2-\sqrt{3}$.

La formula del teorema 2 ci dice che la derivata direzionale è il prodotto scalare tra il gradiente di f in (a,b) e il vettore **w** (di norma 1).Detto θ l'angolo tra i due vettori, avremo anche

$f_w^{'}(a,b)=\left\|Gradf(a,b)\right\|.\cos\theta$ e perciò la derivata direzionale è massima in modulo nella direzione del gradiente. (Nel verso del gradiente la f ha il massimo accrescimento, nel verso opposto la massima diminuzione).

Esercizi.

Es 1) Data la funzione $f(x,y)=x^2+y^2$, e l'insieme $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\left|-1\le x\le 1,0\le y\le 1\right.\right\}$, si chiede: il gradiente di f in (-2,-1), il piano tangente al grafico in (-2,-3), le curve di livello in D, il grafico di f .

R. Gradf(-2-1)=(-4, -2); piano tangente: 4x+6y+z+13=0; archi di cerchi con centro in O(0,0) e raggio $r=\sqrt{c}$ (con $0\le c\le 2$); paraboloide rotondo con l'asse z come asse di rotazione.

Es 2) Stesso discorso per $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+1}$ negli stessi punti e nello stesso insieme D.

R. Gradf(-2,-1)=$(\frac{-4}{25},\frac{1}{5})$; piano tangente: 12x-5y+25z+24=0; archi di parabola di equazione $y=cx^2+c$, con c compreso tra 0 e 1, tenendo conto di D.

Es 3) Stesso discorso per $f(x,y)=x^2-y^2$: gradiente in (3, 4), piano tangente in (1, -2), curve di livello limitatamente all'insieme D($-1\le x\le 1,-1\le y\le 1$), grafico.

R. Gradf(3,4)=(6, -8), piano tangente: 2x+4y-z+3=0, curve di livello: archi di iperboli equilatere, con centro in (0,0), asintoti le bisettrici degli assi cartesiani, per c compreso tra -1 e 1 (per c<0, iperboli aventi l'asse y come trasverso, per c>0 l'asse x è asse trasverso, per c=0 l'iperbole degenera negli asintoti. Il grafico è un paraboloide a sella.

Es 4) Stesse domande per $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$: gradiente in (2,-3), piano tangente in (1,0), curve di livello in tutto l'insieme di definizione che si chiede di determinare.

Es 5) Trovare l'insieme di definizione di $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$, il gradiente e il piano tangente nel punto (0,0), il gradiente e il piano tangente nel punto (1,1). Nel punto $(1,\sqrt{3})$ esiste il gradiente? Qual è il piano tangente? Determinare le curve di livello.

Massimi, minimi o altro per funzioni di due variabili

1) Data la $f(x,y)=12x^3y-3y^4+12x^2y+4y^3+6xy^2$

e l'insieme D=$\{(x,y) : -1 \le x \le 0, 0 \le y \le 1, y \le x+1\}$, calcolare

(a) i punti stazionari di f;

(b) la natura di tali punti;

(c) il massimo assoluto in D;

(d) il minimo assoluto in D.

Risposta:

(a) (0,0), (-1,0), (-1/2, 1/2), (-1/3, 2/3),

(b) (-1,0) e (-1/3, 2/3) sella; (0,0) minimo relativo; (-1/2, 1/2) massimo relativo,

(c) massimo assoluto = 1 in (0, 1);

(d) minimo assoluto =0 in (a,0) con $-1 \le a \le 0$