Ottavio Serra

Prodotto scalare ed endomorfismi

in uno spazio vettoriale sul campo complesso.

1. Prodotto scalare. Mi limiterò al caso di dimensione finita: $\boldsymbol{C}^n$. Siccome si vuole che i vettori siano dotati di norma, la definizione è un po' diversa che nel caso reale.

Il prodotto scalare (u|v) di due vettori è una funzione di $\boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C}^n \rightarrow \boldsymbol{C}$ definita dai seguenti assiomi:

a) (u|v) = (v|u)* (* denota il complesso coniugato);

b) (u|λv) = λ(u|v);

c) (u|v+w) = (u|v)+(u|w);

d) (u|u) > 0 (reale positivo) per ogni vettore u ≠ $\underline{0}$. (**N.B**. Vettore zero: $\underline{0}$, scalare zero: 0).

Ciò consente di definire la norma: $\|u\| = \sqrt{(u\,|\,u)} = \sqrt{u^2}$.

Prime proprietà.

a) (λu|v) = (v| λu)* =λ*(v| u)* = λ*(u|v).

b) Il prodotto scalare è zero se (almeno) uno dei due vettori è zero: (u|$\underline{0}$)=(u|0v)=0(u|v) = 0.

Prodotto scalare standard: Sia $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$; (u|v)= (^{t}u*).v = $\sum_{i=1}^{n} x_i^*.y_i$.

La norma viene: $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^*.x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

2. Endomorfismo "aggiunto". Sia A la matrice (rispetto alla base canonica) di un endomorfismo di $\boldsymbol{C}^n$; si chiama endomorfismo "aggiunto", di matrice B, un altro endomorfismo tale che, per tutti i vettori u, v di $\boldsymbol{C}^n$ risulti (Au|v) = (u|Bv). La matrice aggiunte di A si indica con A^+. Vediamo come è fatta A^+. Siano $x_1,\dots x_n$ le componenti di u, $y_1,\dots y_n$ quelle di v.

$(Au\,|\,v) = {}^t(Au)^*.v = \sum_{i=1}^{n}(Au)_i^*.y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}^* x_k^*)y_i = (u\,|\,Bv) = {}^tu^*.(Bv) = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}y_i)$ e confrontando segue $b_{ki} = a_{ik}^*$.

Dunque, B=A^+ è la trasposta della coniugata o la coniugata della trasposta di A: $A^+ = {}^t(A^*) = ({}^tA)^*$.

Se A^+ = A, A si chiama matrice hermitiana. Nel caso reale l'hermiticità si riduce alla simmetricità.

Esempi: $A = \begin{pmatrix} 2+3i, 4-i \\ 2-i, 1+i \end{pmatrix}$; $A^+ = \begin{pmatrix} 2-3i, 2+i \\ 4+i, 1-i \end{pmatrix}$≠A, perciò A non è hermitiana.

$A = \begin{pmatrix} 3, 2-i \\ 2+i, 4 \end{pmatrix}$. Questa è hermitiana. Si noti che gli **elementi diagonali** devono essere **reali**.

Teorema 1. Una matrice hermitiana è sempre diagonalizzabile, cioè lo spazio $\boldsymbol{C}^n$ è somma diretta degli autospazi di A.

Corollario. Siccome una matrice reale simmetrica è un caso particolare di matrice hermitiana, una matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

Teorema 2: Gli auto valori di una matrice hermitiana sono reali.

Dim. Sia Au = λu; segue (u|Au) = (u|λu) = λ(u|u) = (Au|u) = (λu|u) = λ^*(u|u)→ (λ - λ^*).(u|u) = 0; e siccome (u|u) è diverso da 0 (u è un autovettore), segue che $\lambda^* = \lambda$ (λ è reale).

Corollario. Gli auto valori di una matrice reale simmetrica sono reali e pari al numero della dimensione dello spazio, contandoli con le dovute molteplicità.

Teorema 3. Per una matrice hermitiana autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali.

Dim. Sia $Au = \lambda u$ e $Av = \mu v$. Si ha: $(v|Au)=(v|\lambda u)=\lambda(v|u)$ e $(Av|u)=(\mu v|u)=\mu^*(v|u)=\mu(v|u)$. Siccome $(v|Au)= (Av|u)$, segue $\lambda(v|u)- \mu(v|u) = (\lambda - \mu).(v|u) = 0$ con $\lambda - \mu \neq 0$, quindi $(v|u) = 0$.
Vale anche il viceversa: se autovettori associati ad autovalori distinti sono sempre ortogonali, la matrice è hermitiana.
Dunque, condizione necessaria e sufficiente perché una matrice sia hermitiana (simmetrica nel caso reale) è che autovettori associati ad autovalori distinti siano ortogonali. Solo in tal caso lo spazio $\boldsymbol{C}^n$ (rispettivamente, $\boldsymbol{R}^n$) ha una base ortogonale di autovettori di A.

Esempi. Costruzione di matrici simmetriche (in $\boldsymbol{R}^3$), con assegnati autovalori e autovettori ortogonali.

1. Autovalori: 1, 2, 3. Autovettori $v_1= {}^t(1,-1,0)$, $v_2= {}^t(1,1,1)$, $v_3= {}^t(1,1,-2)$.

$$D \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

$$P \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}$$

A=PDP^(-1)

$$\begin{matrix} 5/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 5/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 8/3 \end{matrix}$$

Det(P) = -6

2. Autovalori: 1 con m.a. 2 e 3 con m.a.1. Autospazio U_1: $x+2y-3z=0$ e U_3 : $x=t$, $y=2t$, $z=-3t$.
In U_1 è facile trovare una base ortogonale, vedi le prime due colonne di P.

D

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

P

$$\begin{matrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{matrix}$$

A=PDP^(-1)

$$\begin{matrix} 8/7 & 2/7 & -3/7 \\ 2/7 & 11/7 & -6/7 \\ -3/7 & -6/7 & 16/7 \end{matrix}$$

Det(P) = -42